AS
182
S22 MH+
v.5

Cornell University Library

THE ZARNCKE LIBRARY

COLLECTED BY FRIEDRICH ZARNCKE

THE GIFT OF

William H. Sage

1893

A.59041 1/10/93

The date shows when this volume was taken

To renew this book copy the call No. and give to the librarian.

NOV 2 3 1924

6 JAN 1925

APR 5 1964 HO

HOME USE RULES

All Books subject to recall

All borrowers must register in the library to borrow books for home use.

All books must be returned at end of college year for inspection and repairs.

Limited books must be returned within the four week limit and not renewed.

Students must return all books before leaving town. Officers should arrange for the return of books wanted during their absence from town.

Volumes of periodicals and of pamphlets are held in the library as much as possible. For special purposes they are given out for a limited time.

Borrowers should not use their library privileges for the benefit of other persons.

Books of special value and gift books, when the giver wishes it, are not allowed to circulate.

Readers are asked to report all cases of books marked or mutilated.

Do not deface books by marks and writing.

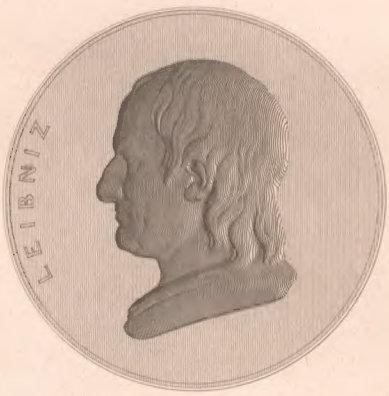
CORNELL UNIVERSITY LIBRARY

3 1924 059 913 198

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



SIEBENTER BAND.

MIT DREISSIG TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1861.

CORNELL
UNIVERSITY
LIBRARY

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

FÜNFTER BAND.

MIT DREISSIG TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1861.

A.59041

INHALT.

W. G. Hankel, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung, über das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung . . . . . S. 1

P. A. Hansen, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten Dritte Abhandlung – 81

G. T. Fechner, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens . . . . – 337

G. Mettenius, Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln . . . . – 565

G. Mettenius, Ueber Seitenknospen bei Farnen . . . . . – 609

W. Hofmeister, Neue Beiträge zur Erkenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln . . . . . – 629

Die mathematisch-physische Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften hat bei Abschluss des fünften Bandes ihrer Abhandlungen abermals der kräftigen Unterstützung der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft dankbar zu gedenken, durch welche die Herausgabe dieses Bandes wesentlich beschleunigt worden ist.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. HANKEL.

VIERTE ABHANDLUNG

ÜBER DAS VERHALTEN DER WEINGEISTFLAMME IN ELEKTRISCHER BEZIEHUNG.

Die eigenthümliche bereits zu Ende des sechzehnten Jahrhunderts von Gilbert *) wahrgenommene Wirkung der Flamme auf die Elektricität geriebener Körper ist der Ausgangspunkt für zahlreiche Untersuchungen über das Verhalten sowohl der mit Flamme brennenden als auch der blos glühenden oder glimmenden Körper geworden. Diese Untersuchungen haben die Entdeckung mehrerer sehr merkwürdiger Eigenschaften der Flammen zur Folge gehabt: die Flamme saugt aus den in ihrer Umgebung befindlichen elektrischen Körpern Elektricität ein, strahlt solche aber umgekehrt aus, wenn sie mit elektrisirten Leitern in Verbindung steht; führt man eine der beiden Modificationen der Elektricität durch glühende Metalldrähte in eine Flamme, so leitet dieselbe jede der beiden Elektricitäten scheinbar gleich gut, während sofort beträchtliche Unterschiede hervortreten, wenn beide Modificationen gleichzeitig in die Flamme gelangen, und wie an den Polen einer Volta'schen Säule in strenger Abhängigkeit von einander stehen; endlich hat man auch in der Flamme infolge des in ihr vorgehenden Verbrennungsprocesses eine selbstständige Elektricitätsentwickelung zu finden geglaubt.

Aehnliche Verhältnisse bieten die ohne Flamme brennenden oder blos glimmenden Körper dar.

Indess sind trotz aller bis jetzt über das Verhalten der Flammen und der glühenden Körper veröffentlichten Arbeiten unsere Kenntnisse über die meisten der hierher gehörigen Vorgänge noch sehr mangelhaft, und lassen uns namentlich über den eigentlichen Grund derselben im Unklaren.

Die Schwierigkeiten, welche einer strengen experimentellen, stets auf Maass und Zahl sich stützenden Untersuchung, namentlich in Bezug auf die Erregung der Elektricität in der Flamme, entgegenstehen, liegen

*) Tractatus sive physiologia nova de magnete etc. lib. II., cap. 2.

erstens in der Schwäche der elektrischen Kräfte, welche gemessen werden müssen, und zweitens in dem oft schwankenden und veränderlichen Zustande der Flammen selbst.

In Betreff der Nachweisung schwacher elektrischer Erregungen bedurfte es sonst stets des Condensators, eines Instrumentes, das unter so wandelbaren Umständen, wie die Flammen sie bisweilen darbieten, wohl dienen kann, das Vorhandensein einer elektrischen Spannung im Allgemeinen darzuthun, zu messenden Versuchen aber durchaus untauglich ist. Da nun die elektrischen Spannungen, welche bei dem Studium des elektrischen Verhaltens der Flammen gemessen werden müssen, ihrer Grösse nach von der Ordnung der durch die Berührung zweier heterogener metallischer Leiter entstehenden elektromotorischen Kräfte sind und letztere, wie ich in dem ersten Theile meiner elektrischen Untersuchungen (Bd. V. S. 406 ff. dieser Abhandlungen) bereits gezeigt habe, sich hinreichend genau mittelst des von mir construirten und an dem eben genannten Orte beschriebenen Elektrometers messen lassen: so durfte ich hoffen, dass dies Instrument mit Ausschluss jedes Condensators zu dem Studium der elektrischen Erscheinungen in der Flamme vollständig genügen würde; eine Voraussicht, welche durch die Erfahrung im vollsten Maasse bestätigt worden ist.

In der nachfolgenden Abhandlung beschränke ich mich auf die Untersuchung der Flamme einer Weingeistlampe, erstens in Bezug auf die in ihr auftretende Elektricität, und zweitens in Bezug auf ihre sogenannte unipolare Leitung, indem ich die Prüfung anderer Flammen, sowie die Erörterung mehrerer mit diesen Erscheinungen im Zusammenhange stehender Fragen einer spätern Abhandlung vorbehalte.

I. Ueber den Ursprung der in und oberhalb der Flamme einer Weingeistlampe auftretenden Elektricität.

1. *Kurze Uebersicht der bisher über die elektrischen Eigenschaften der Weingeistflamme veröffentlichten Untersuchungen.*

Volta glaubte aus seinen seit dem Jahre 1782 über die Elektricitätserregungen bei dem Verdampfen des Wassers, dem Verbrennen der Holzkohle und dem Auflösen von Eisenfeile in verdünnter Schwefelsäure angestellten Versuchen den Schluss ziehen zu dürfen, dass ein Körper beim Uebergehen in Dampfform eine grössere elektrische Capa-

cität erhalte, und desshalb den Gesetzen des elektrischen Gleichgewichts gemäss eine neue Dosis elektrischer Flüssigkeit einzusaugen strebe. Könnten die Dämpfe im Augenblicke ihrer Bildung nicht so viel derselben erhalten, als zu ihrer Sättigung erfordert würde, so entnähmen sie das Fehlende der Umgebung, welche dadurch negativ erscheinen müsste. Er weist desshalb in seinen meteorologischen Briefen *) auf die Möglichkeit hin, dass die Flammen wegen der in ihr vorgehenden Dampfbildung in der angegebenen Weise Elektricität erzeugen.

Im Jahre 1824 beobachtete Becquerel **), dass ein in die Flamme des Alkohols oder Wasserstoffs gehaltener Platindraht einen Condensator je nach der mehr oder minder hohen Temperatur negativ oder positiv lud. Die Flamme selbst zeigte jedes Mal die entgegengesetzte Elektricität, wenn sie mittelst eines feuchten Holzstabes mit dem Condensator in Verbindung gesetzt wurde. Tauchten zwei Metallstreifen von gleicher Natur in die Flamme, so wurde der rothglühende negativ, und der minder stark erhitzte positiv elektrisch; bestanden die beiden Streifen aus verschiedenen Stoffen, so wurden ähnliche Resultate erhalten, nur schien unter gewissen nicht näher bezeichneten Umständen ihre Intensität noch ausgezeichneter zu sein. Die nämlichen Erscheinungen bot auch eine durchs Löthrohr angeblasene Kerzenflamme dar. In einer kupfernen Schale brennender Alkohol machte die Schale positiv.

Becquerel glaubte den Grund dieser Erscheinungen in einer elektromotorischen Action zwischen den Metallen und der Flamme suchen zu müssen; die Temperaturdifferenz zwischen den verschiedenen Theilen desselben Metalles könne sie nicht erzeugen, weil beim Gluhen des einen Endes eines Platinstreifens im Brennpunkte einer starken Fresnel'schen Linse keine Elektricitätsentwicklung auftrete.

Bald darauf, im Jahre 1827, stellte Pouillet ***) specielle Versuche über die Elektricität der gasförmigen Verbindungen an, und fand bei einer Wasserstoffflamme von 3 Zoll Höhe und 4 bis 5 Linien Breite mittelst einer derselben von aussen her genäherten und mit einem Condensator in Verbindung stehenden Platinspirale, dass die sichtbare Flamme mit einer positiven Atmosphäre von 10^{mm} Dicke umgeben war; er setzt

*) S. 88 der deutschen Uebersetzung.

**) Ann. de chim. et de phys. 27, 44; Pogg. Ann. 2, 202.

***) Ann. de chim. et de phys. 35, 408; Pogg. Ann. 11, 425.

hinzu, es sei nicht möglich, diese Elektricität mit derjenigen zu verwechseln, welche sich aus dem Contacte der verschiedenen Theile des Apparates entwickeln könne, weil sie eine weit grössere Intensität besitze. Die negative Elektricität beobachtete dagegen Pouillet beim Eintauchen einer engen Spirale in das Innere der Flamme, und zog daraus die Folgerung, dass bei der Verbrennung die sich verbindenden Sauerstofftheilchen positive Elektricität entwickeln und den benachbarten noch nicht verbundenen Theilen mittheilen, während der brennbare Körper negative Elektricität erzeuge, die gleichfalls an alle brennbaren Theilchen der Umgebung übergehe. Brannte das Wasserstoffgas aus einem Metallrohre anstatt wie zuvor aus einem Glasrohre, so lud das nur mit dem Wasserstoff und nicht mit der Flamme in Berührung stehende Rohr den Condensator negativ. Wurde es mit dem Erdboden in Verbindung gesetzt, so verlor es die Elektricität, welche es zuvor dem Condensator mittheilte und das Product der Verbrennung behielt dann einen Ueberschuss von positiver Elektricität.

Aehnlich wie die Flamme des Wasserstoffgases verhielten sich auch die Flammen von Alkohol, Aether, Wachs, sowie von Fetten, Oelen und anderen Pflanzenstoffen.

Becquerel*) wandte später gegen die von Pouillet aus seinen Versuchen gezogenen Schlüsse nur ein, dass letzterer hiebei die Einwirkung der Erhitzung auf das Platin unberücksichtigt gelassen habe; übrigens sei er nicht minder als Pouillet der Ansicht, dass zufolge eines allgemeinen von ihm aufgestellten Princips während der Verbrennung des Alkohols oder Wasserstoffs jeder Theil der Flamme, der mit Sauerstoff in Berührung stehe, negative Elektricität annehmen müsse, während der Sauerstoff oder die Kohlensäure die positive erhalte; beim Eintauchen der Spiralen in die Flamme entstünden zusammengesetzte Effecte.

Gegen Ende des Jahres 1849 begann ich zunächst unter Anwendung des Condensators mich mit Untersuchungen über die elektrischen Eigenschaften der Flamme zu beschäftigen, und beobachtete namentlich einen starken elektrischen Gegensatz in der Richtung von oben nach unten, zwischen einem in die Flamme getauchten Metalle und der Lampe: ersteres zeigte sich negativ, letztere positiv. Indem ich, im Anschluss an die Ansicht Pouillet's, diesen Gegensatz in die Flammen selbst

*) Traité de l'électr. et du magn. 2, 86.

verlegte, glaubte ich durch ihn, falls die Bedingung eines geschlossenen Kreises erfüllt würde, einen elektrischen Strom erzeugen zu können; und in der That gelang es mir, einen solchen mittelst eines empfindlichen Galvanometers wahrzunehmen. Ich machte darauf aufmerksam, dass stets die Lampe oder ein Theil der Flamme abgeleitet sein müsse, wenn die übrigen Theile Elektricität zeigen sollen *).

Der zwischen Metallen, welche in die Flamme einer Weingeistlampe eingetaucht sind, entstehende elektrische Strom war um jene Zeit ebenfalls von Henrici **) beobachtet worden; derselbe glaubte als Ursache dieser Erregung nur die zwischen der Flamme und den Metallen stattfindende Reibung ansehen zu dürfen; eine Vermuthung, die Becquerel schon früher ausgesprochen, aber als unwahrscheinlich bezeichnet hatte.

Als Buff ***) zwei den Neigungen des Flammenkegels einer Berzelius'schen Lampe, deren Zugloch verstopft war, parallel gebogene Platindrähte dergestalt dieser Flamme näherte oder in dieselbe eintauchte, dass zwar beide Drähte sich ganz ausserhalb derselben oder beide im blauen Saume oder endlich beide in dem innern dunkeln Kerne befanden, jedoch infolge seiner Stellung der eine Draht stärker erhitzt werden musste als der andere, so beobachtete er stets einen Strom vom wärmern zum weniger warmen. Er „betrachtet hiernach als erwiesen, dass Luft und andere Gase, wenn sie erwärmt und dadurch leitend geworden sind, die in sie eingetauchten Körper elektrisch erregen". Werden also „zwei Metalldrähte oder andere Leiter, die nach der einen Seite leitend verbunden sind, mit den andern Endpunkten in ein hinlänglich erhitztes Gas getaucht, so entsteht dadurch ein geschlossener Kreis von Leitern. Wird nun die eine Berührungsstelle des Gases stärker erhitzt als die andere, so muss sich ein thermoelektrischer Strom entwickeln".

Indess findet sich nach Buff in der Flamme noch eine andere Quelle der Elektricitätserregung. Als er den einen der beiden oben erwähnten Drähte gegen den äussern Umfang rückte, den zweiten aber

*) Die Veranlassung zur Veröffentlichung dieser ersten Versuche gab die Feier des fünfzigjährigen Doctorjubiläums des im vorvorigen Jahre verstorbenen J. S. C. Schweigger; der physikalische Inhalt der damals geschriebenen Gratulationsschrift ist später in Pogg. Ann. 81, 213 aufgenommen worden.

**) Pogg. Annal. 79, 476.

***) Annal. der Chem. u. Pharm. 1851. Bd. 80, 1.

entweder in den dunklen Kern schob, so dass er von diesem überall umschlossen wurde mit Ausnahme einer einzigen dem Dochte nahe liegenden Stelle, wo nur geringe Hitze herrschte, oder durch einen geraden Draht ersetzte, welcher durch den das Zugloch verschliessenden Stöpsel in den dunkeln Raum eingeführt wurde: so entstand sogleich ein Strom von Innen nach Aussen, dessen Richtung sich nicht änderte, als der äussere Draht bis an die Gränze des blauen Saumes gelangte und dadurch hell rothglühend wurde, während der innere Draht nur schwach glühte; drang der äussere Draht noch tiefer ein, bis er bei fortdauernder heller Gluth den leuchtenden Theil der Flamme ganz oder auch nur theilweise erreichte, so sprang die Richtung des Stromes um. „Es ist," fährt Buff fort, „augenscheinlich, dass beim ersten Theile dieses Versuchs die thermoelektrische Wirksamkeit zwischen Metall und Gas durch eine andere elektrische Erregung aufgehoben war, welche an der Grenze zwischen Flamme und Luft ihren Sitz hat, und wodurch der äussere Umfang der erstern positiv, das Innere hingegen negativ elektrisch wird".

Im Januar 1854 veröffentlichte Grove *) eine kurze Notiz über Beobachtuugen, die er an der Flamme einer mit Naphtha oder Alkohol gefüllten Glasbläserlampe angestellt hatte. Als er eine kleine Platinspirale in die gelbe Flamme nahe an die Spitze des blauen Kegels, und eine zweite gleiche nahe an die Basis der Flamme, also in die Nähe der Oeffnung des Löthrohres hielt, so entstand während die erstere weissglühte und die zweite nur kirschroth erschien, ein Strom, welcher von der zweiten Spirale durch die Flamme zur ersten ging; seine Richtung war also, wie Grove selbst hervorhebt, der von mir an der Spiritusflamme beobachteten, gerade entgegengesetzt. Dass dieser Strom keinen thermoelektrischen Ursprung habe, folgert er daraus, dass seine Richtung ungeändert dieselbe blieb, wenn er die erste Spirale weiter von der heissesten Stelle der Flamme entfernte, so dass sie selbst schwächer glühte als die erste. Die Richtung dieses Stromes änderte sich ferner ebenfalls nicht, als er die zweite Spirale der ersten vor der Spitze der blauen Flamme stehenden näherte, ward aber immer schwächer. Waren beide Spiralen nahe gleichweit von der Oeffnung des Löthrohrs entfernt, so hing die Richtung des Stromes allein von der relativen Temperatur

*) The Lond., Edinb. and Dublin Philosoph. Magaz. etc. 4. Reihe. 7. Bd. S. 47; auch sehr ausführlich in de la Rive, Traité de l'électr. II, 690.

beider Spiralen ab; sein Ursprung war dann also nach der von Buff gebrauchten Bezeichnung ein thermoelektrischer. Grove schliesst aus seinen Versuchen, dass es einen Volta'schen Strom gebe, welcher der Flamme selbst seinen Ursprung verdanke und nicht von der Thermoelektricität abhänge; er kennt keine Theorie, die besser diese Resultate erkläre, als die von Pouillet aus seinen Versuchen am Condensator hergeleitete: das am Anfange der chemischen Wirkung, oder wo die Elemente in Verbindung zu treten beginnen, stehende Platin spiele die Rolle des Zinks, und das am Ende der Verbrennung oder an den Punkten, wo die chemische Wirkung vollendet ist, befindliche die Rolle des Platins eines galvanischen Elementes.

In demselben Jahre behandelte Becquerel *) ebenfalls die bei der Verbrennung auftretende Elektricität in seiner Abhandlung über die Principien, von welchen die Elektricitätsentwickelung bei chemischen Verbindungen abhängt, und gelangte in Bezug auf die Flamme im Allgemeinen wieder zu den bereits oben S. 5 und 6 angegebenen Resultaten. Aus den einzelnen Versuchen hebe ich hervor, dass er keinen elektrischen Strom erhielt, als er einen Platindraht in den Alkohol der Lampe tauchte, und ein cylindrisches Gefäss aus Platin in die Flamme hing, sobald der Alkohol der Lampe durch umgelegtes und das cylindrische Gefäss durch eingelegtes Eis auf niedriger Temperatur erhalten wurde; ein solcher trat aber sofort in der Richtung durch die Flamme zur Lampe ein, als das Eis in dem Platingefässe geschmolzen war. Als Becquerel kleine Platinspiralen in symmetrischer Weise in einen und denselben Querschnitt der Alkoholflamme stellte, so dass sie roth glühten, erhielt er keinen Strom; sobald er aber eine der Spiralen mittelst einer zweiten Flamme und eines Löthrohres bis zum Weissglühen erhitzte, entstand ein Strom in der Richtung von der rothglühenden Spirale durch die Flamme zur weissglühenden, d. h. in einer entgegengesetzten Richtung als bei den frühern Versuchen, wo die eine Spirale sich in der gewöhnlichen Temperatur befand. Becquerel schliesst hieraus, dass die thermoelektrischen Eigenschaften des Platins sich in hohen Temperaturen ändern. De la Rive **) bemerkt bei diesem letzten Versuche, dass die zweite Flamme noch eine andere Rolle spielen könne als blos die eine Spirale zu erhitzen.

*) Annal. de chim. et de phys. 3 Sér. 42, 496.

**) De la Rive, Traité de l'électr. II, 694.

Matteucci *) bringt in einem Briefe an Grove keine neuen Thatsachen bei; er vergleicht die Flamme mit einer Grove'schen Gassäule: die eine Platinplatte sei mit dem Sauerstoff der atmosphärischen Luft, die andere mit Wasserstoff oder einem ihm entsprechenden Gase in Berührung, und zwischen beiden liege eine durch die Verbrennung gebildete Schicht Wasserdampf; letzterer ersetze den Elektrolyten der genannten Säule. Zur Erklärung der Elektricitätsentwickelung in der Flamme soll der Versuch dienen, dass wenn zwei Platindrähte eine Zeitlang, der eine in dem untern, der andere in dem obern Theile einer Flamme verweilt und einen Strom in der Richtung von der Basis nach der Spitze der Flamme gegeben haben, nach dem Auslöschen der Flamme beim Eintauchen der beiden erkalteten Drähte in Wasser zwischen beiden ein ebenso gerichteter Strom, wie zuvor in der Flamme erhalten wird.

In dem Zusendungsschreiben des eben erwähnten Briefes an die Herausgeber des Philosophical Magazine erklärt sich Grove **) gegen Matteucci's Annahme, dass der Wasserdampf die Stelle des Elektrolyten vertrete; die Leitung und Erregung der Elektricität in der Flamme sucht er, an seine früher ausgesprochene Ansicht anschliessend, durch den in derselben vor sich gehenden chemischen Process zu erklären. Jedes Wasserstoff- oder Kohlentheilchen verbinde sich mit dem benachbarten Sauerstofftheilchen, und da an einem Ende mehr Sauerstoff, am andern mehr Wasserstoff vorhanden, so werde in einer gewissen Anzahl von Theilchen der chemische Process eine bestimmte Richtung annehmen, wodurch seiner Ansicht nach ein elektrischer Strom entstehe, dessen Intensität innerhalb gewisser Grenzen mit der Länge der eingeschalteten Flamme zunehmen müsse.

2. *Erläuterung meines Verfahrens zur Beobachtung der in und oberhalb der Flamme auftretenden Elektricität.*

Die Lampe, deren Flamme der Untersuchung unterworfen wurde, war eine gewöhnliche gläserne Spirituslampe, deren möglichst weiter Hals jedoch keine metallische Hülse, sondern nur eine kurze, dünne an beiden Enden verblasene Glasröhre zur Aufnahme des Dochtes enthielt.

*) The Lond., Ed. and Dubl. Phil. Mag. 4. Reihe 8, 399; auch ziemlich ausführlich in de la Rive, Traité de l'électr. 2, 694.

**) Ebendaselbst S. 403.

Durch eine zweite neben diesem Halse befindliche Oeffnung konnte ein beliebiger Metalldraht zur Ableitung in den Alkohol der Lampe gebracht werden. Eine solche Einrichtung ist, wie man später erkennen wird, zur Erzielung brauchbarer Resultate durchaus nöthig, indem selbstverständlich nur dann eine richtige Deutung der erhaltenen Resultate möglich wird, wenn alle zufällig mit zur Wirkung gelangenden Kräfte ihrer Beschaffenheit und Grösse nach vollkommen bekannt sind. Die Lampe ward wo möglich nach jeder Versuchsreihe oder unter Umständen selbst nach jedem einzelnen Versuche mit Alkohol möglichst angefüllt, um die Flamme, so viel es sich thun liess, gleichartig zu erhalten. Bei den in diesem ersten Theile der Abhandlung mitgetheilten Versuchen ragte der ziemlich dicke Docht gewöhnlich 15^{mm} über die kleine Glasröhre hervor, und die von ihm aufsteigende Flamme hatte eine solche Grösse, dass die obersten Spitzen ihres äussern Theiles bis zu einer Höhe von 150^{mm} emporschlugen, während die Spitzen des innern Kegels ungefähr die Höhe von 75^{mm} erreichten. Es bedarf wohl keiner weitern Erwähnung, dass die äussersten Grenzen, bis zu welchen die Flamme sich erhob, je nach den gerade obwaltenden Umständen, namentlich infolge von Luftströmungen und des dadurch bewirkten Flackerns in gewisser Weise veränderlich sein mussten. Die Lampe stand, durch Siegellack isolirt, und von einem hohen Stative getragen auf dem Tische. In Betreff der Lampe sei noch bemerkt, dass es zur Erzielung möglichst vergleichbarer Resultate zweckmässig ist, den Alkohol und den Docht in der Lampe öfter gänzlich zu erneuern.

Mittelst eines durch Glas und Schellack isolirten messingenen Armes konnten in und oberhalb der Flamme verschiedene Substanzen in beliebigem Abstande von der Spitze des Dochtes aufgestellt werden; der Arm wurde nämlich von einem Stative getragen, und liess sich an demselben mittelst Zahnstange und Trieb in verticaler Richtung auf- und niederschieben, ohne dass dabei die an seinem vordern Ende befestigten Metallbleche oder Drähte aus der durch die Mitte des Dochtes gehenden Verticale abwichen.

Zur Messung der vorhandenen elektrischen Spannungen habe ich mein in der ersten Abhandlung über die Messung der atmosphärischen Elektricität, Bd V. S. 396, mit *A* bezeichnetes Elektrometer benutzt.

Die Leitungen für die Elektricität bestanden aus Kupferdrähten, die, wo es erfordert wurde, durch Siegellack oder Schellack hinreichend

isolirt waren. Umwechselungen in den Verbindungen und Ableitungen geschahen durch Commutatoren oder diesen ähnliche Vorrichtungen, deren Quecksilbernäpfchen von Schellackstäben getragen wurden.

Bei der Empfindlichkeit meines Elektrometers machte die Beobachtung und Messung der in der Flamme vorhandenen elektrischen Spannungen keine Schwierigkeiten; dagegen ward viel Aufmerksamkeit und Sorgfalt erfordert, um unter gewissen Umständen jede äussere Störung fern zu halten. Wenn einerseits die Flamme selbst oder das unmittelbar in dieselbe eingetauchte Metallblech mit dem Blitzableiter des Universitätsgebäudes in gutleitender Verbindung steht, während andrerseits respective das Metallblech oder die Flamme mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbunden ist: so vermögen, eben der guten Ableitung zur Erde wegen, in der Luft des Zimmers befindliche elektrische Ladungen keine dauernden Aenderungen in dem Ausschlage des Goldblättchens hervorzubringen. Ganz anders gestaltet sich dies aber, wenn eine solche Ableitung fehlt oder nur sehr unvollkommen vorhanden ist, indem die Flamme die geringste in der Luft befindliche freie Elektricität einsaugt *).

Um in solchen Fällen, wo keine guten Ableitungen zur Erde vorhanden waren, alle Störungen durch äussere Reibungselektricität fern zu halten, umgab ich den Ort, wo ich sass, seitlich mit einem passend gebogenen Zinkbleche, in welchem kleine Oeffnungen angebracht waren, um mittelst hindurch geführter Drähte das Umlegen der Commutatoren ausführen zu können, und bedeckte ihn ausserdem in einiger Höhe oberhalb mit einem feinen messingenen Drahtnetze von 3 Ellen Länge und $^5/_4$ Ellen Breite. Beide, Zinkblech und Drahtnetz erhielten eine gute Ableitung zur Erde; die blosse Berührung des Zinkbleches mit dem hölzernen Tische, auf welchen es aufgeschraubt war, genügte durchaus nicht. Ausserdem wurde, sobald es nöthig war, 620^{mm} oberhalb der Lampe noch ein zweites eben so grosses messingenes Drahtnetz ausgespannt, und mit der Erde leitend verbunden, um die Wirkung der

*) Dreht man in einem Zimmer eine Elektrisirmaschine und lässt deren Elektricität durch eine Spitze in die Luft ausströmen, so kann man nach Entfernung jener Maschine in dem Zimmer vor einem Zuhörerkreise ähnliche Versuche, wie mit der Luftelektricität im Freien anstellen. Die Ladung der Luft hält sich sehr lange, wenn auch selbstverständlich in abnehmender Stärke. Ich bediene mich dieses Verfahrens schon seit vielen Jahren in meinen Vorlesungen zu dem angedeuteten Zwecke.

in den obern Luftschichten des Zimmers möglicherweise vorhandenen Elektricität auf die Lampe zu verhindern; denn es war durchaus nicht etwa absolutes Erforderniss, dass irgendwo im Zimmer speciell durch Reibung Elektricität erregt werden musste, um Störungen in die Angaben des Elektrometers zu bringen; es genügte schon die unter Umständen von der Flamme selbst in die Luft zerstreute Elektricität, um bei fehlender oder mangelhafter Ableitung zur Erde nach und nach bedeutende Abänderungen in den Ausschlägen des Goldblättchens zu erzeugen. Ich erwähne ausdrücklich, dass ich mich durch specielle Versuche überzeugt habe, dass dieses Drahtnetz in den betreffenden Fällen die elektrischen Vorgänge nicht wesentlich abänderte.

Die Messung der zu dem Goldblättchen des Elektrometers geführten Elektricität geschah, wie ich dies früher in meiner ersten Abhandlung, Bd. V, S. 417, erläutert habe, durch die Umlegung eines unterhalb dieses Instrumentes befindlichen Commutators; in dem Folgenden sind stets die auf diese Weise gemessenen Unterschiede in den Stellungen des Goldblättchens bei den zwei verschiedenen Lagen des Commutators angegeben, und als Ausschläge bezeichnet worden; genau genommen entsprechen diese Angaben den doppelten Ausschlägen. Da es bei den nachfolgenden Versuchen nur auf die Vergleichung der zu einer Versuchsreihe gehörigen Werthe ankam, so sind die Zahlen zur Reduction der zu verschiedenen Zeiten angestellten Messungen auf eine und dieselbe Empfindlichkeit des Instrumentes (vgl. Bd. V, S. 427) hier nicht angeführt; ich bemerke indess, dass diese Empfindlichkeit sich im Ganzen nur sehr wenig geändert hat.

Infolge von Berührungs- und Vertheilungswirkungen besitzt das Goldblättchen vom Anfang an eine geringe elektrische Spannung, die bei den folgenden Versuchen höchstens bis 0.2 Skalentheile stieg, in den meisten Fällen aber nicht 0,1 Skth. überschritt. Dieselbe ändert sich im Laufe einer Versuchsreihe sehr wenig oder gewöhnlich gar nicht; sie wurde indess stets vor und nach jeder Versuchsreihe genau gemessen, um an den gemachten Messungen die desshalb nöthigen Correctionen anbringen zu können. Alle im Nachfolgenden gemachten Angaben sind von dieser ursprünglich vorhandenen elektrischen Spannung bereits befreit.

3. *Elektrische Spannungen auf einem in oder oberhalb der Flamme befindlichen dünnen Platinbleche.*

Zur leichtern Uebersicht der elektrischen Erscheinungen, welche sich zeigen, wenn ein Metall in oder oberhalb der Flamme aufgestellt und ein anderes, in seiner chemischen Beschaffenheit gleiches oder verschiedenes in den Alkohol der Lampe getaucht ist, will ich mehrere solcher Versuchsreihen unmittelbar auf einander folgen lassen, und zwar wähle ich diejenigen, bei denen ein dünnes Platinblech von 45^{mm} Länge und 26^{mm} Breite mittelst eines 160^{mm} langen Platindrahtes an dem Messingarme befestigt war. Dieser Zwischendraht aus Platin war dick genug, um das dünne Blech in horizontaler Lage zu tragen, und hatte den Zweck, jedes andere Metall aus der Nähe der Flamme entfernt zu halten.

Vor und meistens auch nach jeder Versuchsreihe wurde das Platinblech so weit nieder gelassen, dass es den Docht der Lampe berührte, und die elektrische Spannung gemessen, welche das Elektrometer zeigte, wenn das Blech oder der in den Alkohol der Lampe eintauchende Metalldraht mit ihm verbunden wurde, während respective der Metalldraht oder das Blech zur Erde abgeleitet war. Bei Ableitung des Metalldrahtes war die Reihenfolge der Leiter vom Goldblättchen des Elektrometers anfangend bis zur Erde: Gold (Goldblättchen), Kupfer und Messing (zur Leitung), Platin, Alkohol, Metalldraht in demselben, Kupfer und Eisen (Blitzableiter, zur Leitung und beide theilweise mit Wänden in Berührung) und Erde. Durch Umlegen eines Commutators kam der Metalldraht in der Lampe mit dem Elektrometer in Verbindung und die Reihenfolge der Leiter war: Gold (Goldblättchen), Kupfer (zur Leitung), Metalldraht (in Alkohol), Alkohol, Platin, Messing, Kupfer und Eisen, und Erde. Man findet leicht, dass die durch Umlegen des Commutators bewirkte Verbindung einerseits des Platinbleches und andrerseits des in den Alkohol tauchenden Metalldrahtes mit dem Elektrometer in Bezug auf den Ausschlag des Goldblättchens genau der Umkehrung eines Elementes aus Platin, Alkohol und dem gewählten Metalldrahte entspricht.

Um kurz und unzweideutig die Richtung der Elektricitätserregung anzuzeigen, werde ich in dem Folgenden dieselbe stets in Bezug auf die nicht metallischen Leiter angeben, dergestalt, dass ZAP bedeuten soll,

von dem Alkohol *A* aus liege die negative Spannung nach dem Zink und die positive nach dem Platin hin. Da ferner ausser Metallen von gewöhnlicher Temperatur auch in der Flamme stark erhitzte Metalle vorkommen, so werde ich die ersteren mit dem grossen, die letzteren mit dem kleinen Anfangsbuchstaben ihres Namens, und die Flamme mit *f* bezeichnen, wofern nicht ausdrücklich andere Bezeichnungen gewählt sind. *pfAG* zeigt also an, dass wenn glühendes Platin sich in der Flamme und Gold in dem Alkohol der Lampe befindet, durch Verbindung des Platins mit dem Elektrometer negative und durch Verbindung des Goldes mit demselben positive Ausschläge beobachtet werden.

In den nächstfolgenden Versuchsreihen gibt die erste verticale Spalte die Abstände des dünnen Platinbleches von der Spitze des Dochtes an; die zweite Spalte enthält die Elektricität, welche bei dieser Stellung des Bleches in dem mit dem Elektrometer verbundenen Dochte der Lampe beobachtet wurde, während die dritte mit *B* überschriebene diejenige elektrische Spannung namhaft macht, welche das Platinblech *B* (oder *b*) dem Goldblättchen mittheilte.

a. Platindraht in der Lampe.

Elektromotorische Kraft beim Auflegen des Platinbleches auf den Docht $PAB = 0{,}07$

mm	*P*	*B*	Bemerkungen
400	+0,1	0	
300	0	0	
200	0	0	Goldblättchen infolge des Flackerns der Flamme durch heftigen Wind, der auf die Fenster trifft, unruhig, so dass keine genaue Messung möglich.
150	—	0 oder +	
125	0 oder —	0 oder +	ebenso
100	bis + 0,5	bis —0,4	ebenso
75	+ 1,4	—1,2	
50	+ 1,4	—1,25	Mittel $bfAP = 1{,}33$
25	+ 1,4	—1,35	

b. Golddraht in der Lampe.

Elektromotorische Kraft beim Auflegen des Platinbleches auf den Docht $GAB=0{,}37$

mm	*G*	*B*	Bemerkungen
400	0	0	
300	−0,15	+0,25	
200	?	+0,22	
150	?	?	Goldblättchen infolge des Flackerns der Flamme unruhig
125	+	−	
100	+0,5 bis 0,9	bis −1,1	noch unruhig
75	+1,35	−1,5	Goldblättchen ruhig; Spitzen der innern Flamme erreichen schon das Blech
50	+1,2	−1,4	Goldblättchen ruhig; Mittel $bfAG=1{,}41$
25	+1,35	−1,55	Goldblättchen ruhig

c. Silberdraht in der Lampe.

Elektromotorische Kraft beim Auflegen des Platinbleches auf den Docht $SAB=0{,}32$.

mm	*S*	*B*	Bemerkungen
400	0	+0,2	
300	0	+0,1	
200	?	0	beginnt unruhig zu werden.
150	0?	?	unruhig
125	0 bis −0,3	0 bis +0,2	ebenso
100	+1,0	−1,0	+ anfangs schwächer.
75	+1,32	−1,30	Mittel $bfAS=1{,}47$.
50	+1,6	−1,5	
25	+1,6	−1,55	

d. Kupferdraht in der Lampe.

Elektromotorische Kraft beim Auflegen des Platinbleches auf den Docht $KAB=0{,}45$.

mm	*K*	*B*	Bemerkungen
400	?	0	*K* anfangs −0,5 zuletzt 0
300	−0,35	+0,25	
200	−0,45	+0,3	
150	−0,6	+0,3	unruhig
125	−0,2 bis −0,5	0	ebenso
100	0 bis +0,3	−0,2 bis −0,4	ebenso
75	+1,1	−1,2	Mittel $bfAK=1{,}24$
50	+1,15	−1,4	
25	+1,2	−1,4	

e. Eisendraht in der Lampe.

Elektromotorische Kraft beim Auflegen des Platinbleches auf den Docht $EAB = 0{,}60$.

mm	*E*	*B*	Bemerkungen.
400	−1,65*)	+0,77	*E* anfangs −1,65, nahm während 5 Beobachtungen ab bis −1,4
300	−0.93	+0,72	
200	−0,6	+0,5	
150	−0,5	+0,35	unruhig
125	0 bis −0,3	0	unruhig
100	+0,2	−0,6	unruhig
75	+0,95	−1,05	Mittel $bfAE = 1{,}02$
50	+1,0	−1,05	
25	+1,05	−1,05	

f. Aluminiumdraht (Al) in der Lampe.

Elektromotorische Kraft beim Auflegen des Platinbleches auf den Docht $AlAB = 1{,}25$.

mm	*Al*	*B*	Bemerkungen.
400	−1,3 bis −0,5	+1,0	*Al* anfangs −1,3, nahm dann ab bis −0,5.
300	−0,95	+1,05	
200	−1,0	+1,05	
150	−1,0	+0,70	unruhig
125	−1,1	+0,90	ebenso
100	−0,6 bis −1,0	0 bis +0,35	ebenso
75	+0,52	−0,65	Mittel $bfAAl = 0{,}48$
50	+0,4	−0,4	
25	+0,50	−0,45	

g. Zinkdraht in der Lampe.

Elektromotorische Kraft beim Auflegen des Platinbleches auf den Docht $ZAB = 1{,}4$.

mm	*Z*	*B*	Bemerkungen.
400	−1,75 bis −1,4	+1,50	*Z* anfangs −1,75, zuletzt −1,4.
300	−1,57	+1,65	Der Ausschlag erreicht langsam sein Maximum.
200	−1,45	+1,4	Der Ausschlag erreicht schnell das Maximum.
150	−1,52	+1,35	unruhig
125	−1,17	+1,2	ebenso
100	−0,2 bis −0,8	+0,3 bis +0,6	ebenso
75	−0,15	+0,05	Mittel $ZAfb = 0{,}09$.
50	−0,15	+0,15	
25	−0,05	0	

*) Dieser Werth ist durch eine zufällige Störung zu gross.

Es wird nicht unzweckmässig sein, zunächst einige allgemeine Bemerkungen an die vorstehenden Beobachtungsreihen anzuschliessen.

Wenn das Platinblech 300 oder 400^{mm} über der Flamme stand, so erreichte das Goldblättchen des Elektrometers nicht sogleich im Augenblicke seiner Verbindung mit dem Platinbleche oder der Lampe seine grösste Ablenkung, die es unter den obwaltenden Umständen annehmen konnte; es rückte vielmehr langsam und ruhig ohne plötzlich eintretendes Zucken und Hin- und Herschwanken gegen dieses Maximum vor, und langte an demselben erst nach einiger Zeit an. Da dieser Vorgang stets eintrat, wo überhaupt in den genannten Abständen ein Ausschlag sichtbar war, so habe ich ihn in den obigen Tabellen, mit Ausnahme der letzten, nicht weiter speciell bemerkt. Offenbar weist er auf eine äusserst mangelhafte Leitung für die Elektricität hin.

Verringert man die Entfernung des Platinbleches von der Lampe bis auf 200^{mm}, so erreicht der Ausschlag des Goldblättchens, wenn unter den gegebenen Bedingungen überhaupt ein solcher eintritt, schneller sein Maximum; zugleich beginnt aber auch das Goldblättchen unruhig zu werden.

Diese Unruhe nimmt zu in den Beobachtungen bei 150 bis 100^{mm} Abstand; und wenn jetzt auch die Ausschläge sogleich ihr Maximum zu erreichen scheinen, so ist doch das mehr oder weniger starke Hin- und Herschwanken oder plötzliche Zucken des Goldblättchens um eine gewisse Mittellage, die sich aber auch öfter etwas ändert, für eine völlig genaue Messung der Ausschläge ein fast unübersteigliches Hinderniss. Der Grund dieses Verhaltens des Goldblättchens liegt in dem unruhigen Flackern der Flamme, deren oberste Spitzen, wie schon S. 11 erwähnt, von Zeit zu Zeit bis zu einer Höhe von 150^{mm} emporschlugen. Die Spitze des innern Kegels der Flamme lag für gewöhnlich bei 75^{mm}, so dass also die Gegend von 150 bis 100^{mm} den obern nicht stark leuchtenden heftig hin und her schwankenden Theil der Flamme enthielt. Selbstverständlich ändern sich diese Höhen mit einer Aenderung der Grösse der Flammen.

Von 75^{mm} an abwärts erfolgen die Ausschläge augenblicklich in ihrer ganzen Grösse; und da die Flamme besonders infolge des durch das erhitzte Blech erzeugten starken aufsteigenden Luftstromes ruhig brennt, so zeigt auch das Goldblättchen kein Schwanken mehr.

Gehen wir nun zu einer genauern Betrachtung der vorstehenden

Versuchsreihen über, und vergleichen sie zuerst im Allgemeinen unter einander, so zeigt sich zwischen den ersten und den letzten Reihen eine Art Umkehrung: während in der ersten bis dritten Reihe bei grossen Abständen des Platinbleches von der Lampe keine oder nur schwache, bei geringen dagegen starke Elektricität beobachtet wurde, finden sich umgekehrt in der siebenten Reihe bei grossen Abständen starke, bei geringen dagegen fast keine elektrischen Ausschläge. Die vierte, fünfte und sechste Reihe bilden in gewisser Weise den Uebergang.

Wo bei grössern Abständen überhaupt elektrische Spannungen beobachtet sind, erscheint das in die Lampe getauchte Metall —, das Platinblech +; bei geringern Abständen tritt eine entgegengesetzte Vertheilung der beiden Elektricitäten (Metall in der Lampe +, Platinblech —) ein, jedoch mit Ausschluss der siebenten Versuchsreihe, wo es blos zu einer Schwächung, aber noch nicht zu einer Umkehrung der in grössern Höhen gemessenen starken elektrischen Spannungen kommt; vgl. indess die Versuche im vierten Abschnitte (unter A).

Der Uebergang aus der ersten Vertheilungsweise der beiden Elektricitäten zwischen dem Metalle in der Lampe und dem Platinbleche, in die zweite erfolgt in den ersten fünf Versuchsreihen in dem obern nicht stark leuchtenden Theile der Flamme, noch oberhalb der Spitze des innern leuchtenden Kegels; bei der gewählten Grösse der Flammen im Allgemeinen zwischen 125 und 100^{mm} Abstand. Da derselbe in der sechsten Reihe erst zwischen 100 und 75^{mm} Abstand und in der siebenten gar nicht eintritt, während er in der zweiten umgekehrt in etwas grösserer Höhe als 125^{mm} gefunden wurde, so hat man daraus zu schliessen, dass er im Allgemeinen um so früher eintritt, je mehr das in die Lampe eingetauchte Metall in seinen elektrischen Eigenschaften dem Platin gleicht, und um so später, je mehr es sich dem Zinke nähert; ein Schluss, der durch spätere Versuchsreihen noch mehr unterstützt wird.

Es wird die weitern Mittheilungen wesentlich abkürzen, wenn wir uns gleich jetzt, so viel es möglich ist, über die ausserordentlichen Unterschiede zwischen den verschiedenen Versuchsreihen Aufklärung zu verschaffen suchen. Wir wollen uns zunächst mit den bei Entfernungen von 25 bis 75^{mm} beobachteten Erscheinungen beschäftigen, weil bei der in diesen Fällen vorhandenen guten Leitung die Resultate viel constanter und regelmässiger ausfallen.

Die Mittelwerthe aus den bei den Abständen 25, 50 und 75^{mm} gemessenen elektrischen Spannungen waren folgende:

$$bfAP = 1{,}33$$
$$bfAG = 1{,}41$$
$$bfAS = 1{,}47$$
$$bfAK = 1{,}24$$
$$bfAE = 1{,}02$$
$$bfAAl = 0{,}48$$
$$bfAZ = -0{,}09 \text{ (oder } ZAfb = 0{,}09).$$

Je mehr das in den Alkohol der Lampe getauchte Metall sich dem Zinke nähert, um so geringer werden die beobachteten Elektricitäten; die Stellung dieser Metalle in der Spannungsreihe oder ihre elektromotorischen Kräfte sind also ersichtlich von grossem Einflusse; man darf selbst fragen, ob sie schliesslich nicht die ganze Veränderung in den Zahlenwerthen der vorstehenden Tabelle veranlassen.

Um diese Frage zu entscheiden, habe ich die elektrischen Spannungen gemessen, welche entstanden, wenn eines der Metalle *P, G, S, K, E, Al, Z* in den Alkohol der Lampe getaucht, und ein zweites auf den Docht derselben gedrückt wurde. Ich bemerke ausdrücklich, dass die Messungen nur einmal ausgeführt, und dabei nicht weiter auf eine zeitweilige Schliessung durch gleichzeitige Berührung beider Metalle mit den Händen oder durch zufälliges Zusammentreffen der Leitungsdrähte bei dem Anordnen der Versuche geachtet wurde, weil dieselben auch trotz kleiner hiedurch entstehender Fehler zur Beantwortung der obigen Frage ausreichten. Ich werde gleich die beobachteten elektromotorischen Kräfte in eine Tabelle anordnen; für jedes Metall der ersten Spalte findet man in seiner Horizontalreihe den Ausschlag, welchen es mit einem Metalle der obern horizontalen Reihe gegeben hat, in der zu letzterem gehörigen verticalen Spalte. So ist z. B. wenn *A* wieder den Alkohol bezeichnet, $SAE = 0{,}32$.

	Z	*Al*	*E*	*K*	*S*	*P*
Al	0,12					
E	0,62	0,62				
K	0,82	0,72	0,15			
S	1,05	0,87	0,32	0,15		
P	1,07	1,07	0,55	0,27	0,17	
G	1,17	1,07	0,50	0,30	0,15	0.02

Es möge nicht auffallen, dass G und P in dieser Tabelle die umgekehrte Stellung zeigen als früher G und B; P war ein dünner Platindraht, B ein Platinblech; ausserdem erlitten die Metalle in der Flamme auch kleine Aenderungen, und hatte der Alkohol in dem Dochte wohl nicht immer denselben Wassergehalt. Nach dem Volta'schen Spannungsgesetze muss die Summe der Spannungen $GAP+PAS+SAK+KAE+EAAl+AlAZ=GAZ$ sein. Aus obigen Werthen ergibt sich die Summe $=1{,}23$, während $GAZ=1{,}17$ ist; die Differenz beider Zahlen ist hinreichend klein.

Wenn nun in der That die Abweichungen in den Resultaten der obigen Versuchsreihen ihren Grund allein in der elektromotorischen Kraft der verschiedenen in die Lampe getauchten Metalle haben sollen, so müssen ihre Werthe sich aus einem derselben mittelst der in der letzten Tabelle zusammengestellten elektromotorischen Kräfte berechnen lassen.

Wir wollen den Werth $bfAG=1{,}41$ zu Grunde legen, weil G unter den in die Lampe getauchten Metallen am meisten negativ ist. Dann ergibt die Rechnung für die übrigen

	berechnet	beobachtet	Differenz
$bfAP = 1{,}41 - 0{,}02$	$= 1{,}39$	1,33	+0,06
$bfAG = 1{,}41 - 0{,}00$	$= 1{,}41$	1,41	0,00
$bfAS = 1{,}41 - 0{,}15$	$= 1{,}26$	1,47	—0,21
$bfAK = 1{,}41 - 0{,}30$	$= 1{,}11$	1,24	—0,13
$bfAE = 1{,}41 - 0{,}50$	$= 0{,}91$	1,02	—0,11
$bfAAl = 1{,}41 - 1{,}07$	$= 0{,}34$	0,48	—0,14
$bfAZ = 1{,}41 - 1{,}17$	$= 0{,}24$	—0,09	+0,33

Bedenkt man, welchen Zufälligkeiten in der Grösse der Flamme, dem Glühen des Bleches, dem Beschlagen desselben mit Kohle u. s. w. diese Versuche unterworfen sind, so wird man die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen für genügend erachten dürfen. Der grösste Unterschied findet bei $bfAZ$ statt; indess ist grade hier die Beobachtung weniger sicher, und ein späterer Versuch (im vierten Abschnitte unter A) weist auch darauf hin, dass durch zufälliges Zusammentreffen von Umständen der obige Werth etwas zu niedrig ist, was die Abweichung des berechneten vermindern würde. Wahrscheinlich gilt diess auch von dem beobachteten Werthe $bfAP$.

Ich glaube daher den Satz aufstellen zu können, dass durch Eintauchen des Platinbleches in die Flamme eine elektrische Erregung von constanter Kraft (deren Natur für den Augenblick noch unbestimmt bleiben mag) hervorgerufen wird, und dass, weil die Flamme leitet, diese constante Kraft durch die elektromotorischen Kräfte der in die Lampe getauchten Metalle eine Aenderung erleidet, dergestalt dass die in jedem einzelnen Falle beobachteten Ausschläge im Elektrometer die Resultirende aus jener constanten Kraft und den vorhandenen elektromotorischen Kräften darstellen.

Wir sind aber auch im Stande, die Grösse jener constanten Kraft, welche durch das Eintauchen des Platinbleches in die Flamme erzeugt wird, anzugeben.

Als der Golddraht sich in der Lampe befand und das Platinblech auf dem Dochte lag, wurde beobachtet $GAB = 0{,}37$. Als das Blech in geringer Höhe glühte, ergab sich $bfAG = 1{,}41$. Es war also erstens die anfängliche Elektricität vernichtet, und dann sogar in entgegengesetztem Sinne eine Spannung 1,41 erzeugt worden; die Flamme hatte also während des Glühens des Platins eine elektrische Erregung von der Stärke $0{,}37 + 1{,}41 = 1{,}78$ hervorgerufen, die bezüglich ihrer Richtung durch $bfAG$ bezeichnet werden muss. Verfährt man auf gleiche Weise mit den übrigen Versuchsreihen, so erhält man für die Wirkung der Flamme

in *a*,	$0{,}07 + 1{,}33 = 1{,}40$	
b,	$0{,}37 + 1{,}41 = 1{,}78$	
c,	$0{,}32 + 1{,}47 = 1{,}79$	
d,	$0{,}45 + 1{,}24 = 1{,}69$	Mittel 1,72
e,	$0{,}60 + 1{,}02 = 1{,}62$	
f,	$1{,}25 + 0{,}48 = 1{,}73$	
g,	$1{,}40 - 0{,}09 = 1{,}31$.	

Mit Ausschluss der ersten und letzten Reihe sind die übrigen Zahlen nahe gleich; die beiden genannten Reihen waren es übrigens auch, welche vorhin allein positive Differenzen gaben.

Nachdem wir die Erscheinungen in geringen Abständen des Platinbleches von der Lampe untersucht haben, wenden wir uns jetzt zur Erörterung der in grössern Höhen über der Flamme beobachteten Phänomene.

Leider lassen sich, wie schon oben hervorgehoben, die Messungen

bei grössern Abständen als 200^{mm} nicht mit der gewünschten Genauigkeit ausführen, weil die leitende Verbindung eine zu mangelhafte und die Zahl der storenden Umstände gar zu gross ist. Indess macht doch die Gesammtheit der Beobachtungen, namentlich aber der in den Versuchsreihen *d*, *e**, *f* und *g* enthaltenen den Eindruck, als ob die in den genannten Höhen auftretende Elektricität Nichts anderes wäre als die Spannung der vorhandenen Berührungselektricitäten, wie sie beim Auflegen des Platinbleches auf den Docht beobachtet wurden. Sollte dieser Satz in aller Schärfe gelten, so würden wir freilich der Voraussetzung bedürfen, dass die Berührungen der Metalle mit Alkohol und mit der oberhalb der Flamme befindlichen leitenden Gassäule gleiche elektromotorische Kräfte erzeugten. Ist Letzteres nicht der Fall und treten zwischen den Berührungen der Metalle mit Alkohol und mit der leitenden Säule aus erhitzten Gasen kleine Unterschiede ein, so werden diese die anfänglich beim Auflegen des Bleches auf den Docht beobachtete Spannung etwas ändern. Trotz der mangelhaften Leitung stellt sich doch mittelst dieser Gassäule ein eigentliches Volta'sches Element her, an dessen einem Pole wir die elektrische Spannung messen, während der andere zur Erde abgeleitet ist.

Zunächst stimmt nämlich das Zeichen der in dem Platinbleche und der Lampe beobachteten elektrischen Spannungen, wo solche überhaupt mit Bestimmtheit beobachtet worden sind, mit dem beim Auflegen des Dochtes auf die Lampe erzeugten überein; und zweitens fallen auch die Grössen der beobachteten Ausschläge in vielen Fällen nahe zusammen.

KAB war = 0,45, das Mittel aus den Beobachtungen bei 200 und 150^{mm} ist 0,41.

EAB war = 0,60, das Mittel aus den Beobachtungen bei 200^{mm} ist 0,55.

AlAB war = 1,25, das Mittel aus den Beobachtungen bei 200^{mm} ist 1,02.

ZAB war = 1,4, das Mittel aus den Beobachtungen bei 200^{mm} ist 1, 42.

Wenn in grössern Entfernungen etwas andere Werthe beobachtet

*) Die anfänglich stärkere Elektricität in der Reihe *e* ist schon oben als durch zufällige Umstände hervorgerufen bezeichnet worden.

werden, so hat dies seinen Grund in der sehr mangelhaften Leitung zwischen dem Bleche und der Lampe, und in den dadurch möglich gewordenen Störungen durch elektrische Ladungen der Luft über der Flamme. Dass noch bei einem Abstande von 200^{mm} ein Volta'sches Element sich bildet, ergibt sich in bestimmtester Weise aus den nahe gleichgrossen elektrischen Spannungen des Bleches und der Lampe.

Jetzt lassen sich nun auch die Vorgänge von 150 bis 100^{mm} ohne Schwierigkeit erklären. Durch die Flammenwirkung entsteht bei niedriger Stellung des Platinblechs, wie früher gezeigt, eine elektromotorische Erregung, welche unter den obwaltenden Umständen im Mittel als Maximum den Werth 1,72 erreicht und der beim Auflegen des Platinbleches auf den Docht oder bei der Stellung desselben in grössern Abständen oberhalb der Flamme vorhandenen entgegengesetzt gerichtet ist. Je mehr also das Platinblech sich der Flamme nähert und glühend wird, um so stärker wird jene neue elektromotorische Erregung auftreten, und die ursprünglich vorhandene Spannung schwächen. Bei dem unruhigen Hin- und Herflackern der Flamme ist aber eine stets gleichmässige Umspülung des Platinblechs von der Flamme nicht möglich, was sich durch das unruhige Verhalten des Goldblättchens im Elektrometer kund gibt. Je mehr die Flamme übrigens das Blech umspült und erhitzt, um so geringer wird die anfängliche Spannung und geht endlich gewöhnlich in die entgegengesetzte über.

4. *Welchen Einfluss hat die Form und Masse des über oder in der Flamme befindlichen Platins?*

Während die im vorhergehenden Abschnitte mitgetheilten Versuche die Nachweisung des Einflusses bezweckten, welchen die verschiedene Stellung der in den Alkohol der Lampe getauchten Metalle in der Spannungsreihe auf die Art und die Stärke der unter gegebenen Bedingungen eintretenden elektrischen Spannungen ausübt, bleibt jetzt noch zu untersuchen, in wie weit Abänderungen des in die Flamme getauchten Metalles auf die elektrischen Erregungen einwirken, und dies zunächst in der Weise, dass wir zwar noch dasselbe Metall, aber in anderen Formen und Massen anwenden.

A. Platindraht in und über der Flamme.

Ein 0,6^{mm} dicker ziemlich langer Platindraht wurde mit seinem einen Ende in den S. 11 beschriebenen messingenen Arm eingeschraubt, und

so gestellt, dass die Verticale durch die Axe der ruhig brennenden Flamme den Platindraht in ungefähr 30^{mm} Abstand von seinem freien Ende traf.

Die unter Anwendung dieses Drahtes beobachteten Erscheinungen entsprachen den früher beim Bleche beobachteten; nur erfuhren die Ausschläge sämmtlich dadurch eine constante Aenderung, dass der Draht in der Spannungsreihe eine etwas andere Stellung einnahm, als das Blech; wenn z. B. die Spannung des Bleches gegen Kupfer, falls beide in Alkohol getaucht waren, 0,45 Skth. betrug, so erreichte sie unter gleichen Umständen zwischen dem Drahte und dem Kupfer nur 0,27 Skth. Gleiches Glühen des Drahtes und Bleches vorausgesetzt, musste also z. B. bei den Stellungen von 25 bis 50^{mm} oberhalb des Dochtes die negative am Drahte erscheinende Spannung stets um 0,18 grösser sein als bei dem obigen Bleche, was mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Da in der S. 17 befindlichen Versuchsreihe *g* bei Anwendung eines Zinkdrahtes in der Lampe die Umkehrung der elektrischen Spannungen beim Eintauchen des Bleches in die Flamme nicht erfolgt war, so lasse ich hier die entsprechende Beobachtungsreihe mit dem Platindrahte folgen; die Umkehrung wurde übrigens im vorliegenden Falle durch den geringern Abstand des kalten Platindrahtes von dem Zinkdrahte in der Spannungsreihe begünstigt.

Zinkdraht in der Lampe.

Elektromotorische Kraft beim Auflegen des Platindrahtes auf den Docht $ZAP = 1{,}27$.

mm	*Z*	*P*	Bemerkungen.
200	− 0,95	+ 1,1	
150	− 0,9	+ 0,9	unruhig
125	− 1,0	+ 0,9	desgl.
100	0 bis + 0,5	− 0,4	desgl.
75	?	− 0,3	desgl.
50	0	− 0,2	
25	+ 0,22	− 0,3	Mittel $pfAZ = 0{,}26$.

B. Grosser leerer Platintiegel über der Flamme.

Um den Einfluss der Masse und namentlich der Temperaturerhöhung noch weiter zu verfolgen, wurde ein 5,7^{mm} hoher, am Boden 2,3^{mm} und an seiner Oeffnung 4,7^{mm} weiter, 81,5 gr. schwerer Platintiegel mittelst eines aus dünnem Platindraht gebildeten Gehänges über der Lampe aufgehangen, und zwar an dem einen Ende eines

124^{mm} langen sehr starken Platinspatels, dessen anderes Ende in den messingenen Arm eingeklemmt war. Der Tiegel war auf diese Weise mit Leichtigkeit in jede beliebige Höhe stellbar, und seine sämmtlichen nächsten Umgebungen bestanden aus Platin.

Diese Versuche wurden besonders dann lehrreich, wenn man sofort nach dem Anzünden der Lampe die Beobachtungen begann, weil die durch das Steigen der Temperatur hervorgebrachten Aenderungen in den elektrischen Spannungen sich unmittelbar wahrnehmen liessen. Stand z. B. der Tiegel 75^{mm} hoch über der Flamme, so zeigte beim Eintauchen eines Kupferdrahtes in den Alkohol die Lampe sehr bald nach dem Anzünden, wo die Temperatur des Tiegels sich erst wenig erhöht hatte, $-0{,}5$, welcher Ausschlag sich aber mit dem Steigen der Temperatur bis auf $+0{,}7$ änderte. Selbstverständlich besass der Tiegel jedes Mal die entgegengesetzten Spannungen.

Ziehen wir indess jetzt nur diejenigen Spannungen in Betracht, welche bei dem in jeder Stellung des Tiegels eintretenden Maximum der Temperatur beobachtet wurden, so stimmen die mit dem Tiegel erhaltenen Resultate im Wesentlichen mit den beim Bleche und Drahte beobachteten überein, weshalb eine detaillirte Mittheilung überflüssig sein würde.

Sämmtliche mit dem Platindrahte und Tiegel angestellte Versuche lehren, dass, gleiches Glühen vorausgesetzt, die Form und Masse des in die Flamme getauchten Metalles an sich keinen Einfluss auf die elektrischen Spannungen hat.

Kleinere Abweichungen können übrigens bei Aenderung der Form dadurch entstehen, dass der elektrische Mittelwerth (wenn ich so sagen darf) aus allen mit der Flamme in leitender Beziehung stehenden Punkten infolge einer Aenderung des Verhältnisses der Grössen der in verschiedenem Glühzustande befindlichen Stellen ebenfalls eine Aenderung erleidet.

5. *Welchen Einfluss hat die Temperatur des in die Flamme getauchten Körpers?*

Die im zweiten Paragraphen des vorhergehenden Abschnittes erwähnten Vorgänge lehren bereits, dass auf die beim Eintauchen eines Platinbleches in die Flamme entstehende elektromotorische Kraft, oder auf die Aenderung in den bereits vorhandenen elektromotorischen Kräf-

ten die Temperaturerhöhung des Platins einen sehr wesentlichen Einfluss ausübt. Die nächstfolgenden Versuche werden zeigen, dass jene Aenderung in den ursprünglich vorhandenen elektromotorischen Kräften, mit Ausnahme geringer durch Aenderung in den Berührungen der flüssigen und festen Leiter hervortretenden Spannungen, allein eine Folge der Temperaturerhöhung ist.

A. Grosser mit Wasser gefüllter Platintiegel über der Flamme.

Um beträchtliche Temperaturerhöhungen zu vermeiden, füllte ich den S. 23 beschriebenen grossen Platintiegel mit Wasser und hing ihn in oder über der Flamme der Weingeistlampe auf.

Als nun z. B. ein Zinkdraht sich in dem Alkohol der Lampe befand wurden folgende Spannungen beobachtet.

Zinkdraht in der Lampe.

Elektromotorische Kraft beim Aufsetzen des Bodens des Tiegels auf den Docht $ZAT = 1{,}32$.

mm	*Z*	*T*	Bemerkungen
175	— 1,27	+ 1,35	
125	— 1,35	+ 1,40	unruhig
100	— 1,35 bis — 1,1	+ 1,1	*Z* anfangs 1,35, beim Sieden 1,1.
75	— 1,2	+ 1,2	
50	— 1,3 bis — 1,0	+ 1,2	*Z* anfangs — 1,30, beim Sieden — 1,0.
25	— 1,2	+ 1,2	

Offenbar zeigt diese letzte Versuchsreihe einen ganz anderen Character als die früheren S. 15 ff. u. 25; die Spannungen bleiben in allen Abständen des Tiegels nahe dieselben: eine Folge davon, dass die Temperatur des letzteren nicht beträchtlich steigen konnte.

B. Wasserstrahlen als Leiter in der Flamme.

Zur Entscheidung der Frage, ob in der Flamme vorhandene Spannungen dem Acte der Verbrennung selbst oder bloss den gewöhnlichen durch die Zusammensetzung des leitenden Bogens hervorgerufenen elektromotorischen Kräften ihre Entstehung verdanken, bedarf es nicht durchaus eines metallischen in die Flamme getauchten Leiters; letzterer kann auch sehr zweckmässig durch einen Wasserstrahl ersetzt werden.

Um für den nachfolgenden Versuch zwei constante Wasserstrahlen

zu erhalten, richtete ich zwei sogenannte Mariotte'sche Flaschen her, führte neben dem die untere Oeffnung schliessenden Korke einen dünnen Platindraht in das Wasser jeder Flasche, und liess die beiden Strahlen von ungefähr anderthalb Millimeter Durchmesser in sehr verschiedenen Höhen durch die Flamme einer isolirten Lampe gehen, wobei dieselbe ungestört fortbrannte. Die zum Auffangen des ausfliessenden Wassers dienenden gläsernen Schalen waren natürlich isolirt, ebenso wie die Mariotte'schen Flaschen selbst. Damit das Wasser jeder der Schalen mit dem in der zugehörigen Flasche befindlichen stets auf gleicher Spannung bliebe, wurde, falls etwa die an ihren untern Enden in Tropfen getrennten Strahlen diese Gleichheit nicht herzustellen vermöchten, das Wasser derselben mit den in die Flasche geführten Platindrähten verbunden.

Bestimmt man nun zunächst die bei Abwesenheit der Flamme, blos infolge der verschiedenen Berührungen zwischen den Wassermassen der beiden Flaschen vorhandenen Spannungen, und lässt dann z. B. den einen Strahl durch die Basis und den zweiten durch die Spitze einer isolirten Flamme gehen, so wird man nach Ableitung der einen Flasche zur Erde die ursprünglich vorhanden gewesene Spannung gar nicht oder kaum merklich geändert finden; dieselbe behält auch, wenn die beiden Strahlen ihren Ort vertauschen, ihre Beziehung zu den beiden Flaschen unverändert bei, so dass also die ursprünglich positiv erscheinende Flasche stets positiv bleibt, ihr Strahl mag durch die Spitze oder durch die Basis der Flamme gehen. Sonach vermögen die Wasserstrahlen selbst in derjenigen Richtung der Flamme, nach welcher sonst die stärkste elektrische Erregung beobachtet wird, in keiner Weise Spannungsunterschiede nachzuweisen.

6. *Ueber den Ursprung der in und oberhalb der Flamme beobachteten elektrischen Spannungen.*

Aus dem ganzen Verlaufe der bisherigen Untersuchungen ergibt sich die strenge Folgerung, dass der Act der Verbrennung als solcher in keiner Weise elektrische Spannungen erzeugt, dass die Flamme also blos durch die Erhöhung der Temperatur eigenthümliche elektrische Erscheinungen hervorruft.

Ich übersehe hierbei keineswegs, dass die Berührung der Flamme mit dem kalten Tiegel eine andere ist, als mit dem glühenden. Wenn aber der Verbrennungsprocess selbst die an dem glühenden Metalle

beobachtete elektrische Spannung hervorriefe, wenn die Flamme ein System unzählig vieler kleiner Volta'scher Elemente darstellte: so könnte nicht die blosse Aenderung des Berührungszustandes an dem einen Ende, z. B. das Verwandeln eines glühenden Tiegels in einen kalten, die bei ersterem wahrgenommene elektrische Spannung gänzlich vernichten; wenn die in die Flamme getauchten Metalle nur die Leiter wären, welche die Intensität eines gewissen Punktes der infolge der Verbrennung in der Flamme vorhandenen Spannungscurven zum Elektrometer führten, so würde die Temperatur dieser Metalle bis auf eine geringe Grösse gleichgültig sein, und es hätten die beiden Wasserstrahlen (S. 28) die ihrem Durchgangspunkte durch die Flamme entsprechenden Spannungen ebenfalls zum Elektrometer übertragen müssen. Da dies nun aber nicht der Fall ist, so bleibt uns nur der einzige Weg übrig, den Ursprung der bei der Temperaturerhöhung der Metalle erzeugten elektrischen Spannungen in diesem Umstande selbst zu suchen.

Wir können daher von jetzt an von dem Verbrennungsprocesse als solchem ganz absehen, und die Flamme einfach als einen gewöhnlichen Leiter von einem sehr grossen Widerstande betrachten. Dann lassen sich die im Vorhergehenden gewonnenen Resultate kurz in folgender Weise zusammenfassen:

1) Wird in den Alkohol einer gewöhnlichen gläsernen Lampe ein Draht eingetaucht, und ein zweiter aus demselben oder einem andern Metalle bestehender Draht in, über oder auch neben der Flamme aufgestellt, so zeigt, wenn einer jener Drähte zur Erde geleitet wird, der andere nach seiner Isolirung im Allgemeinen eine elektrische Spannung; beide Drähte verhalten sich wie die Pole eines nicht geschlossenen galvanischen Elementes.

2) Wird das in den Alkohol der Lampe eingetauchte Metall gegen ein anderes, in der Volta'schen Spannungsreihe mehr oder weniger von ihm entfernt stehendes vertauscht, während die Flamme und das in oder über ihr befindliche Metall in Grösse und Stellung unverändert bleiben, so ändern sich die an dem Drahte in der Flamme und dem Drahte in der Lampe wahrnehmbaren elektrischen Spannungen genau um die Grösse der elektromotorischen Kraft, welche die beiden nach einander in den Alkohol getauchten Metalldrähte erzeugen, wenn sie mit Alkohol zu einem galvanischen Elemente vereinigt werden.

3) Wird das in den Alkohol der Lampe getauchte Metall ungeändert gelassen, dagegen der Abstand des in oder über der Flamme aufgestellten Drahtes von dem Dochte der Lampe abgeändert, so ändern sich die beobachteten Spannungen sehr bedeutend.

4) Die bei grossen Abständen des Drahtes von der Flamme gemessenen Spannungen sind sowohl ihrer Grösse als auch ihrem Zeichen nach nahe gleich der elektromotorischen Kraft eines aus den beiden Metalldrähten und Alkohol gebildeten galvanischen Elementes.

5) Rückt der oberhalb der Flamme befindliche Draht dem Dochte der Lampe näher, so werden die so eben bezeichneten elektrischen Spannungen geringer, verschwinden je nach Umständen in einer gewissen Höhe ganz, kehren bei noch tieferer Stellung ihr Zeichen um, und beginnen, wenn ohne die Lebhaftigkeit der Verbrennung oder die gehörige Umspülung des Drahtes von der Flamme zu stören, ein noch weiteres Herabrücken möglich ist, in dem neuen Sinne zu wachsen.

6) Die Grösse der Aenderungen, welche die anfänglich bei grössern Höhen beobachteten Spannungen beim Herabrücken des Drahtes in der Flamme erleiden, erfolgen stets in dem Sinne, dass die Spannung an dem in die Flamme getauchten Metalle aus dem Positiven ins Negative übergeht, oder letzterem sich nähert.

7) Die Grösse dieser Aenderungen entspricht im Allgemeinen der Grösse der Temperaturerhöhungen in dem oberhalb der Flamme befindlichen Metalle; ist eine solche Temperaturerhöhung wie bei Anwendung eines mit Eis gefüllten Tiegels oder eines Wasserstrahles nicht möglich, so wird auch keine Aenderung der elektrischen Spannungen wahrgenommen.

Zum vollständigen Verständnisse aller dieser Vorgänge bedarf es nur noch der Erläuterung eines einzigen Punktes, nämlich der Aenderungen, welche in den bei niedriger Temperatur des über der Flamme befindlichen Platins vorhandenen elektrischen Spannungen durch Erhöhung der Temperatur eintreten; denn bereits (S. 23) habe ich gezeigt, dass diese letztern selbst einfach sich aus den bekannten bei gewöhnlicher Temperatur gemessenen Contactwirkungen herleiten lassen. Aber auch die Erklärung der so eben bezeichneten Aenderungen beim Erhitzen wird keine weiteren Schwierigkeiten darbieten: der ganze in den obigen Versuchen hervortretende Einfluss, den die Temperaturerhöhung auf Platin ausübt, besteht nur in einer Aenderung der Stellung dieses Me-

talles in der Spannungsreihe, und zwar nähert die Erhitzung dasselbe dem kalten Zinke, ja es rückt unter geeigneten Umständen selbst noch über letzteres hinaus; die Natur des Platins wird also mit Erhöhung der Temperatur so zu sagen elektropositiver, wobei im Allgemeinen diese Aenderung mit der Zunahme der Temperatur proportional geht.

Durch diese Einwirkung der Flamme auf das Platin finden sämmtliche in den vorhergehenden Abschnitten mitgetheilte Versuche eine so leichte Erklärung, dass es überflüssig sein würde, auch nur mit einem einzigen Worte auf eine specielle Ausführung derselben einzugehen.

7. *Ueber die Aenderung, welche die verschiedenen Metalle durch Erhitzen in ihrer Stellung in der elektrischen Spannungsreihe erleiden.*

Nachdem ich in dem Vorstehenden genügend gezeigt habe, dass die in der Flamme wahrnehmbaren elektrischen Spannungen nur den in ihrem Kreise gelegenen gewöhnlichen elektromotorischen Kräften ihren Ursprung verdanken, und dass die beim allmähligen Herabrücken des Platinbleches eintretenden Aenderungen einer Aenderung der elektromotorischen Kraft des erhitzten Platins zugeschrieben werden müssen: wird es nöthig, die Untersuchung darauf zu richten, ob alle Metalle durch Erhitzung eine ähnliche Aenderung in dieser Beziehung erleiden. Die Flamme bietet, falls es sich nur um angenäherte Werthe handelt, ein sehr bequemes Mittel zur Lösung dieser Frage dar.

Im ersten Theile meiner elektrischen Untersuchungen (Bd. V der Abhandl. S. 437) ist von mir ein Versuch mit einer aus 12 neuen Elementen (Zink, Kupfer, Wasser) gebildeten Säule erwähnt, in welchem keine merkliche Abnahme der elektrischen Spannung mit der Erhöhung der Temperatur von 29° bis auf 44° sichtbar ist. Derselbe berechtigt aber nicht zu dem Schlusse, dass bei dem Erhitzen die elektromotorischen Eigenschaften sich überhaupt nicht ändern; alles, was man daraus schliessen kann, läuft nur darauf hinaus, dass diese Eigenschaften von Zink, Kupfer und Wasser in ihrem Verhältnisse zu einander innerhalb der daselbst bezeichneten Temperaturgränzen keine merkliche Aenderung erlitten haben; dass sich also z. B., wenn überhaupt Aenderungen eingetreten sind, sowohl Kupfer als Zink gegen Wasser nach einer und derselben Seite der Spannungsreihe, und zwar nach der positiven hin, um fast genau gleiche Grössen verschoben haben. Jener Versuch steht also mit einer Aenderung des absoluten Ortes in der Span-

nungsreihe durch die Erhöhung der Temperatur nicht im Geringsten in Widerspruch.

Die Untersuchung des Einflusses der Temperatur auf die übrigen Metalle rücksichtlich ihrer Stellung in der Spannungsreihe wurde grade auf dieselbe Weise wie zuvor beim Platin ausgeführt, indem dieselben in Drahtform in die Flamme einer Weingeistlampe, die nahe gleichförmig brannte, in 50^{mm} Höhe über dem Dochte, geführt wurden. Da manche Metalle eine Aenderung in der Flamme erlitten, so wurde die elektromotorische Kraft beim Auflegen der angewandten Drähte auf den Docht vor und nach dem Glühen gemessen.

a. Golddraht in der Flamme.

Der Draht G' in der Flamme hatte 1^{mm} im Durchmesser; in die Lampe tauchte ein zweiter eben so dicker Golddraht G.

Elektromotorische Kraft beim Aufdrücken des Drahtes G' auf den Docht vor dem Glühen $G'AG = 0{,}2$, nach dem Glühen umgekehrt $GAG' = 0{,}2$.

Elektrische Spannung während des Glühens $g'AG = 0{,}47$, wo g' den in der Flamme erhitzten Golddraht bezeichnet.

Nachdem der in der Flamme gewesene Golddraht mit Glaspapier abgerieben war, wurden die Messungen wiederholt, und gaben nahe dieselben Resultate, auch in Bezug auf die Umkehrung der Richtung der elektrischen Erregung beim Auflegen des Drahtes auf den Docht vor und nach dem Glühen.

b. Platindraht in der Flamme.

Der Draht P war $0{,}7^{mm}$ dick; in die Lampe tauchte ein Golddraht G.

Elektromotorische Kraft beim Aufdrücken des Drahtes P auf den Docht vor dem Glühen $GAP = 0{,}15$; nach dem Glühen hatte sie sich nur wenig bis auf 0,2 geändert.

Elektrische Spannung während des Glühens $pAG = 0{,}86$.

c. Palladiumdraht in der Flamme.

Der Draht P' war $1{,}4^{mm}$ dick; in die Lampe tauchte ein Golddraht G.

Elektromotorische Kraft beim Aufdrücken des Drahtes P' auf den Docht vor dem Glühen $GAP' = 0{,}22$, nach dem Glühen $P'AG = 0{,}05$.

Elektrische Spannung während des Glühens $p'AG = 0{,}87$.

d. Silberdraht in der Flamme.

Der Draht S' war 1^{mm} dick; in die Lampe tauchte ein anderer dünner Silberdraht S.

Elektromotorische Kraft beim Aufdrücken des Drahtes S' auf den Docht vor dem Glühen $SAS' = 0$, nach dem Glühen $SAS' = 0{,}1$. Der Silberdraht S' sah nach dem Glühen an den in der Flamme befindlich gewesenen Theilchen matt und weisslich aus.

Elektrische Spannung während des Glühens $s'AS = 0{,}80$.

e. Kupferdraht in der Flamme.

Der Draht K' war $1{,}1^{mm}$ dick; ein zweiter dünner Kupferdraht K wurde in die Lampe getaucht.

Elektromotorische Kraft beim Aufdrücken des Drahts K' auf den Docht vor dem Glühen $K'AK = 0{,}05$. Der Draht hatte sich beim Glühen oxydirt, und wurde mit dieser Oxydschicht nach dem Erkalten auf den Docht gedrückt, wobei die elektromotorische Kraft $KAK' = 0{,}13$ gefunden wurde.

Beim Erhitzen und Glühen betrug anfangs die elektrische Spannung $k'AK = 0{,}5$, und stieg zuletzt auf 0,85.

f. Eisendraht in der Flamme.

Der Draht E' war $1{,}5^{mm}$ dick; ein zweiter Eisendraht E war in die Lampe getaucht.

Elektromotorische Kraft beim Aufdrücken des Drahts E auf den Docht vor dem Glühen $EAE' = 0{,}05$. Während des Glühens hatte sich der Draht stark oxydirt, und mit dieser oxydirten Stelle auf den Docht gedrückt, zeigte sich eine elektromotorische Kraft $EAE' = 0{,}52$.

Beim Glühen betrug die elektrische Spannung zuletzt $e'AE = 0{,}45$.

g. Aluminiumdraht in der Flamme.

Der Draht Al' war $1{,}6^{mm}$ dick; ein zweiter dünnerer Al tauchte in die Lampe.

Elektromotorische Kraft beim Aufdrücken des Drahtes Al' auf den Docht vor dem Erhitzen $AlAAl' = 0{,}52$; beim Erhitzen bog sich der Draht; nach demselben mit dem in der Flamme gewesenen Theile auf den Docht gedrückt, war die elektromotorische Kraft $AlAAl' = 0{,}2$.

Während des Erhitzens betrug die elektrische Spannung $al'AAl$ 1,57; indess musste der Versuch sogleich bei Eintritt des Glühens unterbrochen werden, weil der Draht erweichte und sich bog.

Wir wollen jetzt die in den vorstehenden Versuchen beobachteten Aenderungen, welche in den elektromotorischen Kräften infolge einer Erhitzung bis zum Glühen eintreten, zusammenstellen. Es wird dabei nöthig sein, als Ausgangspunkt die nach dem Glühen durch Aufdrücken des Drahtes auf den Docht der Lampe beobachtete elektromotorische Kraft zu nehmen, wenn wir die beim Glühen zu Ende des Versuchs beobachteten elektrischen Spannungen in Rechnung ziehen. Dann ergibt sich die Aenderung für

a. Gold = 0,2 + 0,47 = 0,67
b. Platin = 0,2 + 0,86 = 1,06
c. Palladium = − 0,05 + 0,87 = 0,82
d. Silber = 0,1 + 0,8 = 0,90
e. für den oxydirten Kupferdraht = 0,13 + 0,85 = 0,98
f. für den oxydirten Eisendraht = 0,52 + 0,45 = 0,97.

Das Aluminium muss aus dieser Reihe ausgeschlossen werden, weil es schmolz; wollte man übrigens die obigen Versuche zur Berechnung benutzen, so würde sich eine Aenderung 0,2 + 1,57 = 1,77 ergeben.

Bei den unter *a* bis *f* genannten Metallen zeigt sich mit Ausnahme des Goldes eine nahe gleich grosse Aenderung; und es wäre nicht unmöglich, dass der niedrige Werth des Goldes, so wie der etwas höhere des Platins zum Theil in respective niedrigeren und höheren Temperaturen oder auch in einer etwas anderen Stellung der Drähte gegen die Flamme ihren Grund hätten. Andererseits berechtigt aber Nichts, diese Aenderungen für gleiche Temperaturgrade als absolut gleich anzunehmen; was sogar mit andern Erscheinungen, auf die ich für den Augenblick nicht näher eingehen will, im Widerspruch stehen würde. So viel aber darf man wohl aus den obigen Versuchen, trotzdem dass die Temperaturen nicht gemessen, sondern nur annähernd gleich gemacht wurden, schliessen, dass sehr beträchtliche Unterschiede in den Aenderungen der elektromotorischen Kräfte bei den von *a* oder wenigstens *b* bis *f* angeführten Substanzen nicht vorkommen. Diess lässt sich auch mit den oben erwähnten in dem ersten Theile meiner elektrischen Untersuchungen mitgetheilten Messungen der elektromotorischen Kräfte einer, steigenden oder sinkenden Temperaturen ausgesetzten, Volta'schen Säule aus Zink, Kupfer und Wasser vereinigen. In einer spätern Abhandlung werde ich diese Aenderungen genauer zu bestimmen suchen.

In allen geprüften Fällen erfolgte übrigens die Aenderung in der Weise, dass die Metalle infolge der Erhöhung der Temperatur in der Spannungsreihe nach dem positiven Ende hin rückten. Es ist dies in vollem Einklange mit den von mir bei den Untersuchungen über die Ströme zwischen Salzen und ungleich erhitzten Metallen (Bd. VI, S. 263 ff.) gemachten Beobachtungen; beim Erhitzen, wo der Tiegel heisser als der innere Draht war, ging, sofern nicht die Verschiedenheit des Aggregationszustandes eine andere Richtung forderte, ein Strom vom Tiegel durch die Salzmasse zum innern Drahte, und ebenso wieder bei der Abkühlung vom heissen Drahte zu dem kältern Tiegel, sofern nicht die eben erwähnte Verschiedenheit einen entgegengesetzten Strom bedingte.

h. Coke in der Flamme.

Da die Kohle gleich den Metallen sich als Leiter der ersten Volta'schen Klasse verhält, so lag es nahe, auch diese dem Versuche zu unterwerfen; es wurde desshalb ein ziemlich grosses Stück von gewöhnlichem porösen Coke mit seinem obern Ende an einem dünnen Platindrahte befestigt, und mittelst desselben so über der Lampe aufgehangen, dass sich seine untere eben gefeilte fast kreisförmige Fläche von nahe 30^{mm} Durchmesser ungefähr 25^{mm} oberhalb des Dochtes befand.

Anfangs zeigte die Lampe einen Ausschlag $-0{,}2$, der allmählig, so wie die Kohle an den Rändern glühend geworden war, bis gegen $+0{,}7$ stieg. Das Cokestück selbst bot natürlich grade die entgegengesetzten Aenderungen dar. Die Temperaturerhöhung wirkt also bei der Kohle in derselben Weise, wie bei den Metallen, verändernd auf ihre elektrische Natur ein. Da die untere Fläche des Kohlenstücks nicht überall glühte, so lässt sich das erhaltene Resultat für die Grösse dieser Aenderung $0{,}2 + 0{,}7 = 0{,}9$ mit den obigen Werthen nicht genau vergleichen. Es scheint indess die Aenderung des Ortes der Kohle in der Spannungsreihe nicht minder gross zu sein, als bei den Metallen.

Aehnlich wie der gewöhnliche Coke verhielt sich auch ein Stück sehr dichten Cokes aus einer Gasretorte.

Da bei vielen Versuchen, namentlich mit dem Wasser enthaltenden Tiegel, sich Kohle an der Oberfläche des Platins absetzte, so habe ich schliesslich noch den Einfluss dieses Beschlages auf die elektromo-

torischen Kräfte einer genaueren Messung unterworfen. Wenn der mit kaltem Wasser gefüllte Platintiegel 50^{mm} hoch über der Flamme der Weingeistlampe aufgestellt, und dann während der Erhitzung unausgesetzt die elektromotorische Kraft gemessen wird, so machen sich zwei entgegengesetzte Einflüsse geltend. Durch den Beschlag mit Kohle nämlich wächst die negative Elektricität des Platintiegels, während sie gleichzeitig infolge der erlangten höhern Temperatur ein wenig abnimmt. Beide Einflüsse compensiren sich bei einem gewissen Temperaturgrade, so dass in den Beobachtungen sich anfangs ein Wachsen der negativen Spannung des Tiegels zeigt, das aber bald ein Maximum (ungefähr 0,2 Skth.) erreicht, und dann infolge der steigenden Temperatur einer Abnahme Platz macht.

8. *Ueber die durch die Flamme erzeugten elektrischen Ströme.*

Wie schon oben S. 6 erwähnt, habe ich im Jahre 1849 gezeigt, dass elektrische Ströme entstehen, wenn das eine Ende eines Multiplicatordrahtes mit dem Dochte oder der metallischen Umgebung des Dochtes einer brennenden Lampe, und das andere mit einem in die Flamme derselben eingetauchten Platindrahte verbunden ist. Diese Ströme sind, wie unmittelbar darauf angegeben, dann auch von Buff, Grove, Becquerel und Matteucci bei verschiedenen Anordnungen untersucht worden.

Die Erklärung der Entstehung dieser Ströme bietet nach den in den vorhergehenden Abschnitten mitgetheilten Versuchen über die elektrischen Spannungen in der Weingeistflamme keine Schwierigkeiten mehr dar; die aus den Contactwirkungen der verschiedenen festen und flüssigen, heissen und kalten Leiter, welche die Kette bilden, hervorgehenden Spannungen sind die alleinige Quelle, woraus die beobachteten Ströme ihren Ursprung nehmen. Sobald die Grösse und Richtung dieser Spannung gegeben ist, können wir mit Berücksichtigung des Leitungswiderstandes der Kette auf die Richtung und Stärke des daraus hervorgehenden Stromes einen sichern Schluss machen.

Zum Beweise des Gesagten will ich einige wenige Beispiele anführen, und bemerke nur, dass zur Beobachtung und Messung der durch die Flamme in der angegebenen Weise erregten Ströme das in dem dritten Theile meiner elektrischen Untersuchungen (Abhandl. Bd. VI, S. 261) beschriebene Galvanometer diente, dessen drei Drahtspiralen

so verbunden waren, dass ihre 9960 Windungen nach einander vom Strome durchlaufen werden mussten. Das in demselben aufgehangene System zweier Magnetstäbe war, um die Schwingungsdauer nicht zu beträchtlich anwachsen zu lassen, nicht sehr astatisch; seine Schwingungsdauer betrug ungefähr 41″. Um den Commutator bequem umlegen zu können, stand die Skale nur etwa 1 Meter von dem Spiegel ab.

Als in die Lampe ein Golddraht tauchte, und in ungefähr 25^{mm} Höhe darüber das S. 14 beschriebene dünne glühende Platinblech b stand, beobachtete ich am Elektrometer die Spannung $b\,f\,A\,G = 1{,}03$, d. h. das Platinblech zeigte negative Elektricität; beim Schliessen der Kette musste also ein in der Flamme absteigender Strom entstehen. Dies geschah in der That; durch Umlegen des Commutators änderte sich die Lage der Magnetstäbe um 18,7 Skth. in dem angedeuteten Sinne.

Als sich in der Lampe ein Zinkdraht befand, und das Platinblech so ziemlich dieselbe Stellung in der Flamme einnahm, wie zuvor, beobachtete ich am Elektrometer die Spannung $b\,f\,A\,Z = 0{,}32$, d. h. das glühende Platinblech b zeigte wieder negative Elektricität; beim Schliessen der Kette musste also ebenfalls wieder ein absteigender Strom entstehen. Der Versuch ergab beim Umlegen des Commutators eine Aenderung in der Lage der Magnetstäbe von 8,0 Skth. in dem angedeuteten Sinne. Das Verhältniss der Spannungen stimmt in dem vorliegenden Falle, wo die Stellung des Bleches nicht ganz unverändert geblieben war und auch die Flamme möglicherweise eine etwas andere Grösse besass, was andere Leitungswiderstände bedingt, hinreichend nahe mit dem Verhältnisse der Stromstärken überein.

Wurde nun, während der Zinkdraht in der Lampe blieb, das Platinblech 110^{mm} über der Lampe aufgestellt, so gab das Elektrometer die umgekehrte Spannung als zuvor, $Z\,A\,f\,B = 0{,}9$, d. h. das jetzt nicht glühende Platinblech B zeigte positive Elektricität. Ich hatte also beim Schliessen der Kette einen aufsteigenden Strom zu erwarten, und in der That ersehien ein solcher. Durch Umlegen des Commutators änderte sich die Lage der Magnetstäbe um 4,6 Skth. im Sinne eines aufsteigenden Stromes. Trotz der hohen Spannung hatte doch der Ausschlag am Galvanometer nur eine so geringe Grösse, weil der Widerstand jetzt ein viel beträchtlicherer war, als zuvor.

Seitdem ich gezeigt habe, dass die in der Flamme vorhandenen elektrischen Spannungen sich auch mittelst des Galvanometers messen lassen, hat man dies letztere Instrument ausschliesslich zur Untersuchung angewandt. Meines Erachtens nach ist aber bei diesen Untersuchungen mein Elektrometer dem Galvanometer unbedingt vorzuziehen: durch mein Elektrometer erhalte ich alle Angaben fast augenblicklich, kann also den Aenderungen der elektromotorischen Kräfte während der steigenden und sinkenden Temperatur immerfort ohne Schwierigkeit folgen; es liefert mir ferner unmittelbar die Grösse der elektrischen Spannungen, während beim Galvanometer sich der Widerstand der Kette einmischt, und zur Ermittelung der Spannungen zwei Messungen erfordert werden, die, falls Polarisationen der Polflächen eintreten, selbst abgesehen von Aenderungen in dem Brennen der Flamme während der Dauer dieser zwei Messungen, schliesslich nicht einmal den wahren Werth der gesuchten Spannung liefern. Man darf endlich nicht glauben, dass wenn man z. B. bei gleichen Abständen eines Metalles von dem Dochte und bei gleichgestalteter Flamme zwei Ströme misst, deren einer in der Flamme aufsteigt, der andere aber in ihr abwärts geht, auch abgesehen von jeder Polarisation, die gemessenen Stromstärken den elektrischen Spannungen selbst proportional seien; dies kann bekanntlich nur statt finden, wenn in beiden Fällen die Widerstände gleich sind, was aber trotz völlig gleicher äusserer Bedingungen in Entfernungen und Gestalten bei entgegengesetzten Stromrichtungen, wie ich am Schlusse des zweiten Theiles zeigen werde, nicht der Fall ist.

Daher habe ich die Untersuchung der sogenannten Flammenelektricität vorzugsweise mit meinem Elektrometer ausgeführt, und die vorstehenden wenigen Messungen mit dem Galvanometer hier nur mitgetheilt, um zu zeigen, dass die Resultate der Beobachtungen am Galvanometer mit den am Elektrometer gemachten im vollen Einklange sind. Absichtlich habe ich darunter ein Beispiel aufgenommen, wo durch blosse Aenderung der Stellung die Stromrichtung in Uebereinstimmung mit der am Elektrometer gemessenen Spannung sich umkehrte.

II. Ueber die sogenannte unipolare Leitung der Weingeistflamme.

1. *Zusammenstellung der bisherigen Erfahrungen darüber.*

Im Jahre 1802 veröffentlichte P. Erman im 11. Bande von Gilbert's Annalen eine in der philomathischen Gesellschaft in Berlin gehaltene Vorlesung; er gedenkt in derselben des eigenthümlichen Verhaltens der Flamme zu den beiden Polen einer Volta'schen Säule, das er später*) einer weitern Prüfung unterwarf, und mit dem Namen einer unipolaren Leitung belegte.

Mit jedem Pole einer sorgfältig isolirten Volta'schen Säule stehe ein Elektrometer in Verbindung; wird bald der eine, bald der andere Poldraht mit der Flamme einer gut isolirten Weingeistlampe berührt, so findet am Elektrometer des entgegengesetzten Poles keine wahrnehmbare Veränderung der Divergenz statt**). Wird dagegen die Flamme auf irgend eine Weise mit der Erde in leitende Verbindung gebracht, so fällt das Elektrometer des mit der Flamme berührten Poles zusammen, während die Goldblättchen am entgegengesetzten Pole das Maximum ihrer Divergenz zeigen; und zwar ist die Wirkung an beiden Polen genau dieselbe. Wird jeder Poldraht in eine besondere isolirte Flamme getaucht, so nehmen beide Elektrometer ihre natürliche Divergenz an.

Anders verhält es sich aber, wenn beide Poldrähte gleichzeitig in dieselbe Flamme getaucht werden. Ist die Flamme isolirt, so „zeigen die Elektrometer durch ihre Divergenz, die nach wie vor fortdauert, dass der Kreis durchaus nicht geschlossen ist, und dass also die leitende Eigenschaft der Flamme im Conflicte beider Pole durchaus verloren gegangen ist.“ Berührt man einen der Poldrähte ableitend, so erhält das Elektrometer am andern das Maximum seiner Divergenz; berührt man aber die Flamme selbst ableitend oder nähert ihr nur einen Ableiter, so sinkt das Elektrometer am positiven Pole zusammen, während die Goldblättchen am negativen das Maximum ihrer Divergenz erhalten.

---

*) Gilb. Ann. Bd. 22, S. 19.

**) ibid. Dagegen heisst es Bd. 11. S. 150, dass, wenn eine isolirte Kerzenflamme den einen Poldraht berührt, das dazu gehörige Elektrometer einen Theil seiner Divergenz verliert.

Sind beide Poldrähte in eine und dieselbe Flamme eingetaucht, und führt man in dieselbe Flamme den Zuleitungsdraht eines empfindlichen Elektrometers, so erhält dies keine Divergenz; auch tritt dieselbe nicht ein, wenn man den positiven Pol berührt; dagegen erscheint sogleich bei Ableitung des negativen das volle positive Maximum*).

Aehnlich wie die Weingeistflamme verhalten sich nach Erman auch die Flammen von Aether, fetten und ätherischen Oelen, von Bernstein, Kampher, Harzen, Wachs, Talg und Wasserstoff, und er bezeichnet sie als positiv-unipolare Leiter, weil sie nach seiner Ansicht im Conflicte beider Pole den positiven Effect vollkommen leiten, für den negativen aber eben so vortreffliche Isolatoren geworden sein sollen. Die Flamme des Schwefels isolirte die Wirkung beider Pole; verwandelte, sich aber durch geringe Beimengungen, wie sie z. B. beim Verbrennen der Schwefelfäden sich bilden, sofort in einen positiv-unipolaren Leiter. Versuche mit der Flamme des Phosphors boten Erman grosse Schwierigkeiten dar, weshalb er nicht mit aller Bestimmtheit sich über ihre Natur auszusprechen wagt; er glaubt aber, dass sie von der Flamme der kohlen- und wasserstoffhaltigen Substanzen abweiche, und durchaus nicht positiv-unipolar leite; er neigt sich eher dahin, sie als negativ unipolaren Leiter zu betrachten.

Die Erscheinungen der sogenannten unipolaren Leiter sind zwar später mannichfach Gegenstand der Besprechung und experimentellen Untersuchung gewesen**), allein fast immer sind die Flammen davon ausgeschlossen worden, so dass mir keine weitern den Erman'schen Angaben hinzugefügten Thatsachen über die Flammen bekannt sind; wovon der Grund einfach in der Schwierigkeit, welche die Erforschung der Eigenthümlichkeiten derselben darbietet, zu liegen scheint. Was die Erklärung der Erscheinungen der unipolaren Leitung überhaupt anlangt, so will ich nur hervorheben, dass nach Fechner***) dieselben nicht sowohl in einem ungleichen Widerstande der

*) Gilb. Ann. XI, 154.

**) Die Literatur ist von Fechner in seiner Bearbeitung des III. Bandes des Biot'schen Lehrbuchs der Experimentalphysik zusammengestellt; als später erschienen ist noch beizufügen G. S. Ohm's Versuche zu einer nähern Bestimmung der Natur unipolarer Leiter, Jahrb. der Chem. u. Phys. 1830. Bd. 59, S. 385 und Bd. 60. S. 32.

***) Biot, Lehrbuch der Exper.-Phys. Bd. III. S. 88.

Elektricität beim Durchgange durch die Flamme, als vielmehr beim Uebergange der Elektricität zu ihr von den metallischen Polen beruhen; eine Ansicht, die sich nach Ohm's Untersuchungen z. B. für die Vorgänge bei der trocknen Seife als die richtige erwiesen hat. Ohm*) fügt dann noch den Ausspruch hinzu, dass nach der Theorie eben so gut wie ein sich bildender Leitungsübergang, auch eine Gegenspannung die Veranlassung des in Rede stehenden Phänomens abgeben könne.

Ich gehe jetzt zu meinen eigenen Untersuchungen über die Leitungsverhältnisse der Flamme über.

2. *Ueber die elektrischen Spannungen der in gleicher Weise mit der Flamme verbundenen Pole.*

Zwei gleiche Platindrähte *A* und *B* von $0{,}5^{mm}$ Durchmesser wurden 26^{mm} oberhalb des Dochtes, und 4 bis 5^{mm} von einander entfernt, parallel in horizontaler Lage dergestalt durch die Flamme gesteckt, dass sie gegen letztere eine möglichst symmetrische Lage einnahmen, und also sehr nahe gleiche Temperaturen erhielten. Infolge dieser Anordnung musste das Verhalten beider Drähte fast genau dasselbe sein; und in der That betrugen die beobachteten Unterschiede zwischen den verschiedenen Ausschlägen bei Verwechselung der Drähte gegen einander (was leicht durch einen Commutator erreicht wurde), höchstens 0,05 bis 0,1 Skth. Um indess auch diese kleinen Unterschiede nicht zu vernachlässigen, habe ich bei allen Versuchsreihen die Verwechselung der Drähte vorgenommen, gebe aber der Kürze wegen im Folgenden nur die Mittelwerthe aus den einander fast gleichen Ausschlägen an.

a. Die Flamme ist durch einen Platindraht abgeleitet.

Das Verhalten der beiden in die Flamme getauchten Pole wird am klarsten hervortreten, wenn wir die Einrichtung so wählen, dass andere elektrische Vorgänge möglichst wenig abändernd einwirken. Dies lässt sich erreichen, wenn die Flamme nicht mittelst eines in den Alkohol der Lampe getauchten Drahtes, sondern mittelst eines durch die Flamme selbst geführten und mit den beiden Poldrähten *A* und *B* gleich stark glühenden Platindrahtes abgeleitet wird. Ein ebenfalls $0{,}5^{mm}$ dicker Pla-

*) Jahrb. der Chem. u. Phys. Bd. 60, S. 33.

tindraht C wurde desshalb 2 bis 3^{mm} unterhalb der beiden andern in einer auf die Länge derselben senkrechten Richtung horizontal durch die Flamme gesteckt, und zur Erde abgeleitet. Da dieser dritte Draht C fast ebenso stark als die beiden andern glühte und auch sonst von gleicher Beschaffenheit mit ihnen war, so zeigten die beiden obern Drähte gegen ihn fast keine Spannung (der eine +0,05, der andere +0,1).

Als nun die Pole eines Zinkkohlenelementes, dessen elektromotorische Kraft 2,40 betrug, mit den beiden Drähten A und B verbunden wurden, so erschien am negativen Pole die elektrische Spannung —2,04 und am positiven die Spannung + 0,35.

Aus diesen Messungen ergibt sich, dass die beiden Elektricitäten durch die Drähte und die Flamme in ungleicher Weise abgeleitet werden: die positive Elektricität wird unter gleichen Umständen viel besser als die negative abgeleitet; indess verliert bei gleichen Berührungsflächen zwischen der Flamme und den Poldrähten der positive Pol seine Spannung nicht ganz, sondern bewahrt noch einen kleinen Rest (im vorliegenden Falle + 0,35 oder nach Abzug der in den Drähten ursprünglich vorhandenen Spannung + 0.25 bis + 0,3). Hätte er seine Spannung ganz und gar verloren, so würde der negative Pol das Maximum — 2,40 haben erreichen müssen; da er aber noch + 0,35 zurückhält, und der negative von ihm nur um die Grösse der elektromotorischen Kraft des angewandten Elementes verschieden sein kann, so darf letzterer nur die Spannung — 2,40 + 0,35 = — 2,05 zeigen, was mit der Beobachtung übereinstimmt.

Ich mache gleich jetzt darauf aufmerksam, dass unter den gewählten Umständen, dem S. 39 angeführten Ausspruche Erman's entgegen, das Element durch die Flamme allerdings geschlossen ist, und in einem in die Leitung eingeschalteten Galvanometer eine Ablenkung der Magnetnadel bewirkt; indess ist, wie die vorstehenden Versuche darthun, die Leitung durch die Flamme so gering, dass das Element an seinen metallischen Polen denselben Spannungsunterschied zeigt, mag die Flamme zur Schliessung zwischen die beiden Poldrähte eingeschaltet sein oder nicht.

b. Die Flamme ist mittelst eines in den Alkohol der Lampe eingetauchten Drahtes zur Erde geleitet.

Es entstand nun die Frage, wie die elektrischen Zustände der mit

den beiden Platindrähten verbundenen Pole sich verhalten würden, wenn diese Drähte *A* und *B* gegen den Ableitungsdraht zur Erde eine elektrische Spannung erhielten; in welcher Absicht verschiedene Metalldrähte zur Ableitung in den Alkohol der Lampe eingetaucht wurden.

1) Bei der Ableitung der Lampe zur Erde mittelst eines Golddrahts erhielten die beiden glühenden Platindrähte eine Spannung — 0,62. Als nun die Pole eines Elementes von der elektromotorischen Kraft 2,37 mit den Drähten *A* und *B* verbunden wurden, so zeigte der negative Pol die Spannung — 2,62 und der positive — 0,27. Man sieht leicht, dass beide beobachtete Spannungen von den im vorhergehenden Paragraphen enthaltenen Werthen um die constante Spannung der Platindrähte gegen den Golddraht verschieden sind; wird von beiden — 0,62 abgezogen, so erhält man — 2,00 und + 0,35, also sehr nahe die obigen Werthe.

Analoge Resultate wurden bei Anwendung von zwei Elementen beobachtet. Die elektromotorische Kraft beider Elemente war 4,85; bei Verbindung ihrer Pole mit den beiden Platindrähten erschien am negativen Pole — 5,04 und am positiven — 0,32. Nach Abzug von — 0,62 bleiben — 4,42 und + 0,30.

2) Bei Ableitung der Lampe durch einen Eisendraht, gegen welchen die beiden Platindrähte die Spannung — 0,25 zeigten, erschien nach Verbindung der Pole eines Elementes mit den beiden Platindrähten *A* und *B* am negativen Pole — 2,55 und am positiven — 0,03. Nach Abzug von — 0,25 erhalten wir also — 2,30 und + 0,22.

Da die Differenz der am negativen und positiven Pole beobachteten Spannungen der elektromotorischen Kraft der angewandten Elemente stets gleich ist, so werde ich die letztere für gewöhnlich nicht ausdrücklich anführen. Ich bemerke nur noch, dass die einzelnen Versuche zu sehr verschiedenen Zeiten und mit verschiedenen nicht völlig gleichen Elementen angestellt sind, weshalb es nicht auffallen darf, wenn in den elektromotorischen Kräften Schwankungen von 2,2 bis 2,5 vorkommen.

Da ferner mehrere Elemente uns im Allgemeinen nicht mehr lehren als ein einziges, so werde ich mich der Kürze wegen in allen solchen Fällen, wo es auf die Zahl der Elemente nicht ankommt, auf die Anführung der mit einem Elemente gewonnenen Resultate beschränken; doch habe ich fast sämmtliche Versuche auch mit mehr als einem Elemente wiederholt.

3) Bei Ableitung der Lampe durch einen Zinkdraht, gegen welchen die beiden glühenden Platindrähte eine Spannung + 0,55 zeigten, beobachtete ich nach Verbindung der Pole eines Elementes mit den beiden Platindrähten, am negativen Pole — 1,61 und am positiven + 0,79. Nach Abzug von + 0,55 erhalten wir — 2,16 und + 0,24.

Aus allen mitgetheilten Versuchen ergibt sich, dass unter den gewählten Umständen stets ein kleiner Rest an dem positiven Pole zurückbleibt. Es schien nun vorhin, als ob bei Vermehrung der Elemente von einem auf zwei dieser Rest nicht wachse. Ich habe daher noch besondere Versuche mit einem und mit fünf Elementen angestellt, und in der That war die Zunahme jenes Restes bei Vermehrung der Elemente ausserordentlich klein.

c. In die Ableitung der Flamme zur Erde sind noch Elemente eingeschaltet.

Wenn auch bereits in dem vorhergehenden Paragraphen die Platindrähte *A* und *B* durch die Ableitung der Lampe mittelst eines Gold- und Zinkdrahtes eine schwache negative oder positive Spannung angenommen hatten, so war es mit Rücksicht auf den Nachweis des Grundes für jenen eigenthümlichen Unterschied in der Leitung beider Elektricitäten doch nothwendig, diesen Drähten und der Flamme noch stärkere Elektricitäten zuzuführen. Es wurde desshalb der in den Alkohol der Lampe getauchte Golddraht nicht unmittelbar zur Erde abgeleitet, sondern ein oder mehrere Zinkkohlenelemente in diese Ableitung dergestalt eingeschaltet, dass der eine Pol derselben mit der Erde, der andere aber mit dem Golddrahte in der Lampe in Verbindung stand. Letztere empfing auf diese Weise die ganze Spannung des einen Poles der eingeschalteten Elemente und übertrug sie zu den beiden Platindrähten.

Als die Lampe unmittelbar durch den Golddraht abgeleitet war, zeigten die Platindrähte anfangs eine Spannung — 0,45; später bei lebhafterem Brennen — 0,55. Von den beiden mit den Drähten verbundenen Polen eines Elementes besass der positive die Spannung — 0,07 und der negative — 2,15. Wurde nun in die Ableitung der Lampe zur Erde ein Element von der Stärke 2,25 eingeschaltet, so dass sein positiver Pol zur Lampe gewendet war, so zeigten die Drähte ohne Verbindung mit den Polen eines Elements die Spannung + 1,75; als sie dann mit den Polen eines Elements verbunden wurden, erhielt der positive

die Spannung + 2,05 und der negative — 0,02. Nach Verwechselung der Pole des in die Ableitung eingeschalteten Elementes, so dass sein negativer Pol der Lampe zugekehrt war, zeigten die Platindrähte allein die Spannung — 2,90, und von den darauf mit ihnen verbundenen Polen eines Elementes der positive —2,43 und der negative —4,44. Man findet leicht, dass die Zahlenwerthe des zweiten Versuchs sehr nahe aus dem des ersten durch Addition von +2,25 und die des dritten aus eben jenem ersten durch Addition von — 2,25 erhalten werden; das in die Ableitung eingeschaltete Element ändert also an dem Gange der Erscheinung Nichts, es fügt nur die Spannung seines nicht abgeleiteten Poles den bereits vorhandenen Spannungen hinzu. Die geringen Abweichungen der berechneten Werthe von den beobachteten sind durch das nicht gleichförmige Brennen der Lampe veranlasst.

Genau zu denselben Resultaten gelangte ich, als ich einerseits mehr als ein Element in die Ableitung einschaltete und andererseits ebenfalls mehrere Elemente mit den Polen verband.

Die vorstehenden Versuche lehren mit aller Bestimmtheit, dass der elektrische Zustand der Flamme überhaupt von keinem Einflusse auf das Hervortreten der bessern Leitung der positiven Elektricität ist; eine Ladung der Flamme, wenn ich es so nennen darf, wirkt in keinem Falle verändernd ein.

3. *Ueber die elektrischen Spannungen der in verschiedener Weise mit der Flamme verbundenen Pole.*

Um eine bestimmte Vorstellung von der Beschaffenheit des Widerstandes der negativen Elektricität beim Uebergange von dem metallischen Pole in die Flamme zu gewinnen, wurden Versuche nöthig, bei denen die Pole in ungleicher Weise mit der Flamme in Berührung standen.

Der eine der beiden als Pole dienenden Platindrähte *B* wurde deshalb durch das dünne S. 14 erwähnte Platinblech *B* ersetzt. Dasselbe lag horizontal 34^{mm} über dem Dochte, und 6^{mm} unterhalb lief parallel mit ihm der Platindraht *A* hin. Der eine Pol eines Elementes oder einer aus mehreren Elementen gebildeten Säule wurde mit dem Platindrahte *A*, und der andere mit dem Platinbleche *B* verbunden. Die elektrische Span-

nung zwischen dem Bleche und Drahte war, weil beide nahe gleich stark glühten, unbedeutend.

Die Flamme war entweder unmittelbar durch einen senkrecht auf den Draht *A* ungefähr 2^{mm} unterhalb desselben angebrachten Platindraht *C*, oder durch einen in der Lampe befindlichen Gold- oder Zinkdraht abgeleitet, oder es waren in die Ableitung der Lampe zur Erde noch ein oder zwei Elemente eingeschaltet.

	Flamme durch Platindraht abgeleitet.	Lampe abgeleitet durch	
		Golddraht	Zinkdraht.
A u. $-P$ mit Elektrometer verbunden	−2,37	−2,95	−1,67
A u. $+P$	+0,87	+0,40	+1,55
B u. $+P$	0,0	−0,57	+0,75
B u. $-P$	−1,45	−1,95	−0,65

Wird bei der zweiten Versuchsreihe die durch die Ableitung mittelst des Golddrahtes in dem Platindrahte *A* und dem Bleche *B* erzeugte Spannung — 0,57 und ebenso bei der dritten die durch die Ableitung mittelst des Zinkdrahtes in denselben Platinmassen erregte Spannung +0,75 abgezogen, so erhalten wir Werthe, welche sehr nahe mit den in der ersten verticalen Spalte befindlichen übereinstimmen.

Grade wie früher wird also der Gang der Erscheinung nicht geändert, wenn die Pole selbst infolge der gewählten Ableitung der Flamme eine elektrische Spannung besitzen; diese letztere fügt sich jedes Mal zu den ohne ihr Vorhandensein auftretenden Spannungen hinzu. Die Richtigkeit dieses Satzes wurde auch durch Einschaltung eines oder zweier Zinkkohlenelemente in die Ableitung zur Erde noch weiter dargethan. Zum Verständniss der obigen Versuchsreihen genügt folglich die Erörterung der ersten.

Denken wir uns gleichzeitig mit beiden Polen der Säule Elektrometer von gleicher Empfindlichkeit verbunden, so enthalten die Zahlen der ersten und dritten, und ebenso der zweiten und vierten horizontalen Reihe die gleichzeitig an beiden Polen auftretenden Spannungen; es müssen daher auch die Differenzen aus den Zahlen der ersten und dritten und ebenso wieder der zweiten und vierten horizontalen Reihe gleich der elektromotorischen Kraft des angewandten Elementes sein. Ist also der positive Pol mit dem Bleche verbunden, so wird an ihm

0, an dem mit dem Drahte verbundenen negativen dagegen die volle Spannung des Elementes 2,37 beobachtet. Diese Zahlen ändern sich, wenn umgekehrt der positive Pol zu dem Drahte, und der negative zu dem Bleche geführt wird; ersterer zeigt dann + 0,87, letzterer — 1,45 Skth.

Aehnliche Resultate erhielt ich, als das Platinblech durch eine ungefähr 6^{mm} weite Spirale, deren unteres Ende 26^{mm} oberhalb des Dochtes stand, ersetzt wurde.

Da sich bei der vorhergehenden Anordnung das Verhältniss der von der Flamme berührten Flächen nicht gut ermitteln liess, so habe ich, um ein noch bestimmteres Urtheil über den Einfluss dieses Verhältnisses zu gewinnen, folgende Einrichtung gewählt. Es wurden wieder die beiden im vorhergehenden Paragraphen benutzten Platindrähte *A* und *B* als Pole angewandt, der eine *A* gradlinig wie früher, der andere *B* aber Uförmig gebogen; der Draht *A* befand sich mitten zwischen den beiden Schenkeln des Drahtes *B*. Die beiden Drähte wurden in einer horizontalen Ebene, 26^{mm} oberhalb des Dochtes, so in die Flamme gestellt, dass sie sehr nahe gleich stark glühten, und die Berührungsfläche des Drahtes *B* mit der Flamme doppelt so gross war, als die des Drahtes *A*. Die Lampe war durch einen Golddraht zur Erde geleitet. Die Beobachtungen gaben die in der ersten verticalen Zahlenreihe verzeichneten Ausschläge; die zweite Spalte enthält die Werthe, wie sie gefunden sein würden, wenn die Platindrähte infolge der Ableitung zur Erde keine Spannung besessen hätten, indem jene Ableitung die Spannung — 0,85 bewirkte.

	Lampe durch Golddraht abgeleitet.	Reducirt.
A u. — *P* mit Elektrometer verbunden	—3,02	—2,17
A u. + *P*	—0,25	+0,60
B u. + *P*	—0,72	+0,13
B u. — *P*	—2,48	—1,63

Auch in dieser Versuchsreihe macht sich bereits der Einfluss der verschiedenen Berührungsflächen sehr bemerkbar; er ist jedoch geringer als bei den vorhergehenden Versuchen mit dem Platinbleche.

Nach dem Vorstehenden ist es leicht die Erscheinungen anzugeben,

welche eintreten, wenn zwei anfangs gleiche Berührungsflächen nach und nach an Grösse sehr ungleich werden, oder was auf dasselbe hinausläuft, wenn die eine immer mehr und mehr aus der Flamme gerückt wird. Gesetzt, die Flamme sei durch den Platindraht *C* abgeleitet, und enthalte ausserdem die beiden Platindrähte *A* und *B* als Pole eines Elementes und zwar beide in genau gleicher Weise von ihr bespült: so werden wir, wie auch die Drähte mit den Polen verbunden sein mögen am positiven Pole stets + 0,3, und am negativen die um den eben bezeichneten Rest des positiven Poles verminderte Spannung des Elementes finden. Wird nun aber die von der Flamme bespülte Fläche des einen Drahtes relativ grösser, indem man entweder ihn selbst in ein Blech verwandelt, oder den andern etwas aus der Flamme heraus rückt, so ist es nicht mehr gleichgültig, in welcher Weise die beiden Pole mit dem Drahte verbunden sind. Hängt der positive Pol mit der grössern Berührungsfläche zusammen, so kommt er (falls wie vorausgesetzt die Ableitung der Flamme keine Spannung erzeugt) nach und nach auf 0, während der negative Pol die volle Kraft des Elementes annimmt. Bei umgekehrter Verbindung der Pole mit den Drähten behält aber der negative nicht die ganze Spannung des Elementes, sondern erfährt eine theilweise Schwächung, während der Rest am positiven Pole steigt. Denken wir uns nun die Ungleichheit in den Grössen der Berührungsflächen immer mehr zunehmend, so werden die Spannungen der Pole im ersten Falle (wo der positive Pol mit der grössern Fläche zusammenhängt) ungeändert bleiben (d. h. der positive Pol keine Spannung zeigen); im zweiten (wo der negative Pol zur grössern Fläche geführt ist) muss dagegen die Spannung am negativen Pole immer mehr ab-, am positiven Pole aber immer mehr zunehmen, bis zuletzt bei hinreichender Ungleichheit der Berührungsflächen am negativen Pole 0, und am positiven die volle Spannung des Elementes erscheint.

Schon oben bei gleich grossen Berührungsflächen trat uns die Frage entgegen, wie der kleine Rest von positiver Elektricität am positiven Pole sich mit der Verstärkung der elektrischen Spannung an den Polen ändere; wir fanden, dass er bei der Vermehrung der Anzahl der Elemente nur sehr wenig zunahm. Dieselbe Frage ist nun auch für den Fall etwas ungleicher Berührungsflächen zu beantworten.

Specielle zunächst mit dem graden und dem Uförmig gebogenen Platindrahte als Polen ausgeführte Versuche zeigten, dass durch die Ver-

mehrung der Zahl der Elemente von 1 auf 4 die positive Spannung sowohl an dem Uförmigen Drahte als auch an dem graden Drahte nur sehr wenig zunahm; doch war die Zunahme an dem graden Drahte etwas grösser als an dem andern, überstieg aber auch an diesem nicht 0,3 Skth., während am negativen die Spannung von ungefähr 2 bis auf 9 Skth. gewachsen war.

Als der grade Platindraht und das dünne Platinblech die Pole bildeten, brachte eine Vermehrung der Zahl der Elemente von 1 auf 2 keine merkliche Aenderung in dem elektrischen Zustande des Bleches hervor, sobald es sich am positiven Pole befand; es zeigte jedes Mal 0, wie sich bei seiner vielfach grösseren Oberfläche erwarten liess. Die Spannung an dem Drahte dagegen stieg, falls er mit dem positiven Pole verbunden war, um 0,1 bis 0,2 Skth.; wobei es keinen Unterschied machte, ob die Lampe unmittelbar zur Erde geleitet, oder in ihre Ableitung ein oder zwei Elemente eingeschaltet wurden.

4. *Welchen Einfluss hat die Grösse der Berührungsflächen der Pole mit der Flamme?*

Da eine einseitige Vergrösserung der Berührungsfläche zwischen dem als Pol des Elementes dienenden Metalle und der Flamme den Austritt der Elektricitäten wesentlich erleichtert, so musste untersucht werden, wie sich bei Vergrösserung beider Polflächen in gleichem Grade die S. 41 ff. beschriebenen Erscheinungen gestalten; namentlich war zu prüfen, ob die positive Elektricität etwa ganz ausströmen oder ob sie auch unter diesen veränderten Zuständen mit dem kleinen Reste erscheinen würde.

Zur Entscheidung dieser Frage stellte ich zwei gleichgrosse dünne Platinplatten, deren eine oben S. 14 schon beschrieben ist, in einem Abstande von wenigen Millimetern einander parallel und vertical in der Flamme so auf, dass beide Bleche nahe gleich stark glühten, und folglich auch dem zur Ableitung dienenden Golddrahte in der Lampe gegenüber fast genau gleiche Spannung erhielten. Als nun die Pole eines Elementes mit ihnen verbunden wurden, zeigte sich (ich gebe gleich die mit Rücksicht auf die Spannung gegen den Golddraht reducirten Werthe) am negativen Pole im Mittel die Spannung $= 2{,}15$ und am positiven $+ 0{,}27$.

Die gleichzeitige Zunahme in der Grösse beider Berührungsflächen

der Pole mit der Flamme hat also keinen wesentlichen Einfluss auf die oben S. 41 berichteten Erscheinungen.

5. *Welchen Einfluss hat die Verschiedenheit des Metalles der Pole?*

Die bisherigen Versuche waren sämmtlich mit Platinmassen ausgeführt worden, und es wäre bei der eigenthümlichen Wirkung, welche Platinoberflächen unter manchen Umständen zeigen, nicht unmöglich gewesen, dass das Platin sich anders verhielte, als andere Metalle. Ich brachte daher 1) zwei 1^{mm} dicke Golddrähte, 2) zwei $1{,}5^{mm}$ dicke Eisendrähte und 3) zwei 9^{mm} dicke zugespitzte Stücke sehr dichten Cokes aus einer Gasretorte, entweder parallel neben einander oder wie bei den Cokestücken mit der Spitze einander gegenüber, in horizontaler Lage, 25^{mm} oberhalb der Lampe an. Die Eisendrähte waren durch einen vorläufigen Versuch bereits hinreichend an der Oberfläche oxydirt, so dass bei den nachfolgenden Versuchen keine weitere Aenderung derselben zu erwarten stand.

Als nun mit den beiden Golddrähten oder mit den beiden oxydirten Eisendrähten oder mit den beiden Cokestücken die Pole eines Elementes verbunden wurden, während die Lampe durch einen Platindraht zur Erde geleitet war, traten die Erscheinungen ganz so ein, wie bei zwei Platindrähten. Nach Reduction wegen der Spannung gegen die Ableitung erhielt ich am positiven Pole einen Rest von $+ 0{,}2$ bis $+ 0{,}38$, so dass also die chemische Beschaffenheit der Pole keine merklichen Aenderungen hervorbringt.

6. *Welchen Einfluss hat das Glühen der Polflächen?*

Um zu prüfen, ob die eigenthümliche Erscheinung, dass die positive Elektricität leichter in die Flamme eintritt als die negative, von dem Glühen der beiden in die Flamme getauchten Pole abhänge, wurden zwei grosse dicke Eisenstäbe mit den Polen eines Elementes verbunden, und ihre Enden in die Flamme einer Weingeistlampe gebracht. Aber auch bei dieser Anordnung ward, grade wie früher, die positive Elektricität besser abgeleitet als die negative; eine völlig genaue Bestimmung des an dem positiven Pole bleibenden Restes war zwar bei den vorliegenden Versuchen nicht möglich, weil die Eisenstäbe ihre Temperatur und ausserdem auch ihre Oberflächenbeschaffenheit durch Oxy-

dation änderten, was nothwendig eine Aenderung ihrer Spannung gegen den goldenen Ableitungsdraht zur Folge hatte. Wurde indess von den am positiven Pole beobachteten Ausschlägen der Mittelwerth jener Spannung aus den zu Anfang und zu Ende einer jeden Versuchsreihe gemessenen Werthen abgezogen, so ergab sich stets ein Rest, der nur wenig grösser war als bei den glühenden Drähten. Während derselbe bei glühenden Drähten bei allen Beobachtungen bei einem Elemente unter + 0,38 Skth. lag, stieg er bei den Eisenstäben stets über + 0,4; das Mittel von fünf Messungen betrug + 0,54 Skth.

Wenn aus dem Vorhergehenden sich ergibt, dass die elektrischen Spannungen an den Polen eines Elementes, wenn solche aus kalten oder nur wenig warmen Metallmassen bestehen, sich im Allgemeinen auf dieselbe Weise verhalten, wie früher, wo sie durch glühende Metalldrähte gebildet wurden, so soll damit in keiner Weise gesagt sein, dass der Widerstand beim Uebergange aus einem kalten und aus einem glühenden Metalle in die Flamme gleich gross sei; aus den vorstehenden Angaben folgt nur, dass zwischen den Widerständen, welche die beiden Elektricitäten an der Grenze der Metalle antreffen, ein ähnliches Verhältniss bei kalten wie bei erhitzten Metallen vorhanden ist. In wieweit die Uebergangswiderstände durch das Glühen sich ändern, muss auf andere Weise ermittelt werden.

7. *Sind zum Auftreten einer Verschiedenheit in der Ableitung der beiden Elektricitäten metallische Polflächen nothwendig?*

Um einerseits den im vorhergehenden Abschnitte über den Einfluss der Temperatur mitgetheilten Versuch völlig einwurfsfrei anzustellen, und andererseits in ganz bestimmter Weise die Frage zu beantworten, ob überhaupt metallische Polflächen mit der Flamme in Berührung stehen müssen, wenn in den Ableitungsverhältnissen der beiden an den Enden eines Elementes vorhandenen Elektricitäten eine Verschiedenheit sich zeigen soll, liess ich die Wasserstrahlen der beiden bereits S. 28 beschriebenen Mariotte'schen Flaschen durch die Flamme einer Weingeistlampe gehen, so dass sie gegen dieselbe eine möglichst symmetrische Stellung einnahmen. Durch die zum Lufteintritt in die Flaschen bestimmten Röhren war in jede Flasche ein mit dem einen Pole eines Elementes zusammenhängender Kupferdraht eingeführt, so dass die elektrischen Spannungen an beiden Polen des Elementes mittelst der Wasserstrahlen

in die Flamme gelangten, welche ihrerseits durch einen in den Alkohol der Lampe getauchten Golddraht zur Erde abgeleitet war.

Die beiden Strahlen ertheilten, bevor sie mit den Polen des Elementes in Verbindung gesetzt wurden, infolge der in der Leitung befindlichen Kupfer- und Golddrähte dem Elektrometer die Spannung — 0,4. Nachdem sie aber mit je einem Pole verbunden waren, erschien am positiven Pole ein Ausschlag — 0,15 und am negativen —2,6. Werden nun beide wegen der durch die Leitung hervorgerufenen Spannung durch Subtraction von — 0,4 reducirt, so erhalten wir am positiven Pole + 0,25 und am negativen — 2,2, also dieselben Werthe wie im dritten Abschnitte bei Anwendung zweier gleicher Platindrähte.

Der vorstehende Versuch zeigt uns also in aller Strenge, dass für eine verschiedene Ableitung der beiden Elektricitäten aus den Polen eines Elementes durch eine mit der Erde zusammenhängende Flamme weder metallische Polflächen noch auch eine höhere Temperatur derselben erfordert wird.

8. *Ueber die elektrischen Spannungen an den in die Flamme getauchten Polen einer Säule, wenn die Metalle der Pole selbst verschiedene Stellungen in der Spannungsreihe einnehmen.*

Wenn der eine der beiden S. 41 in die Flamme getauchten Platindrähte z. B. *B* oder das S. 45 an seine Stelle getretene Platinblech durch einen grossen mit Eis oder Schnee gefüllten kalten Tiegel *T* ersetzt wird, so entsteht zwischen den beiden Polen aus Platin infolge der verschiedenen Temperatur eine elektrische Spannung, und es fragt sich nun, ob durch diesen Umstand die früher gefundenen Gesetze geändert werden. Die getroffene Anordnung erzeugt jetzt die besondere Schwierigkeit, zu entscheiden, in welcher Weise die Beobachtungen wegen der durch die Ableitung hervorgerufenen Spannungen zu reduciren sind.

Gesetzt es sei, um von einem bestimmten Falle auszugehen, die Flamme entweder durch einen in ungefähr 17^{mm} Höhe über dem Dochte der Lampe horizontal aufgestellten Platindraht *C*, oder durch einen in den Alkohol der Lampe eingetauchten Golddraht abgeleitet; es sei ferner ein anderer Platindraht *A* 22^{mm} über dem Dochte ebenfalls horizontal befestigt, und in 26^{mm} Abstand vom Dochte befinde sich der Boden des

mit Eis gefüllten Platintiegels *T*. Ist die Flamme durch den Platindraht *C* abgeleitet, so zeigt diesem gegenüber der Draht *A* so gut wie keine Spannung, während der Tiegel eine beträchtliche positive Spannung erhält. Wird andererseits der Golddraht in der Lampe zur Ableitung benutzt, so zeigt der Tiegel fast keine Spannung, während jetzt der Draht eine beträchtliche negative Spannung kund gibt. Wenn nun die beobachteten Ausschläge, welche die Spannungen an den Polen eines Elementes nebst den durch die Ableitung erzeugten Veränderungen messen, von dem Einflusse dieser letztern befreit werden sollen, so wird man zweifelhaft sein, in welcher Weise eine solche Reduction auszuführen ist. Hat man die Spannung im Drahte *A* oder im Tiegel *T* von den gemessenen Ausschlägen abzuziehen?

Im Allgemeinen dient auf diese Frage als Antwort, dass man weder die eine noch die andere Spannung, sondern eine Art Mittelwerth, der freilich auch mit der einen oder andern Spannung zusammenfallen kann, zu dieser Reduction zu benutzen hat. Man muss nämlich bedenken, dass bei der Verbindung des Drahtes *A* mit dem Tiegel *T* durch das Zinkkohlenelement, abgesehen von der elektromotorischen Kraft des letztern, beide Platinmassen überhaupt durch einen Leiter zusammenhängen, und dass infolge dieses Zusammenhanges beide Pole, *A* und *T*, gewissermassen nur einen einzigen in die Flamme getauchten und mit dem Elektrometer verbundenen Leiter darstellen, dessen elektrische Spannung gegen die Ableitung zur Erde wegen des verschiedenen Glühens seiner Theile mit der Spannung, wie jeder einzelne sie zeigen würde, nicht zusammenfällt. Diese Spannung, welche der zusammengesetzte Leiter in der Flamme erhält, lässt sich empirisch mit meinem Elektrometer natürlich ebenso leicht messen, als die, welche jeder seiner Theile empfängt. Ich werde aber in dem Folgenden aus der Grösse jenes Mittelwerthes einige andere Folgerungen herleiten, weshalb es nöthig ist, hier wenigstens einige Andeutungen über seinen Betrag zu geben, da so viel mir bekannt, die vorliegende Frage noch nirgends gestellt und noch weniger untersucht worden ist. Ich begnüge mich hier aber, um nicht zu weit von dem eigentlichen Ziele abzukommen, mit wenigen allgemeinen Angaben; was um so eher angeht, als in der vorliegenden Untersuchung in dieser Beziehung genaue Zahlenwerthe nicht erfordert werden.

A. Ueber die Spannungen an den Polen eines nicht geschlossenen Elementes, worin in einer Flüssigkeit ein Metall zweien anderen elektrisch verschiedenen, aber mit einander verbundenen gegenübersteht.

Während sonst bei nicht geschlossenen Ketten der Leitungswiderstand auf die Spannung an den Polen eines gewöhnlichen galvanischen Elementes keinen Einfluss hat, sobald die Isolation hinreichend und die Zeit nicht beschränkt ist, verhält es sich bei dem in der Ueberschrift bezeichneten Elemente anders. Wenn zwei elektrisch verschiedene Metalle durch einen Leiter verbunden sind, so existirt zwischen beiden ein Strom, der sich in der Flüssigkeit verbreitet; von dem Werthe auf der Spannungscurve, welche das dritte einzeln stehende Metall an der Eintauchungsstelle trifft, hängt die Grösse der Spannung zwischen diesem dritten Metalle und den vereinigten beiden andern ab. Die Spannungscurven des Stromes zwischen den beiden letzteren Metallen ändern aber mit der Verschiebung der beiden Metalle gegen das dritte ihre Lage; die Spannung in dem von dem dritten Metalle berührten Punkte der leitenden Flüssigkeit ist desshalb eine Function der Abstände dieses Punktes von den beiden ersten Metallen, so dass einleuchtet, wie die Leitungswiderstände auf die Spannung des dritten Metalles den beiden ersten gegenüber einen Einfluss ausüben müssen.

Zum Nachweise dieses Einflusses mögen folgende Versuche dienen.

In eine fast 1 Fuss lange und ½ Fuss breite gläserne Schale mit ebenem Boden wurde eine ¼ Zoll hohe Schicht destillirten Wassers gegossen; am Rande derselben tauchte in der Mitte der einen kurzen Seite ein Eisendraht, und ziemlich in einem der Winkelpunkte der gegenüberliegenden kurzen Seite stand ein Golddraht. Ausserdem konnte noch ein Aluminiumdraht an verschiedenen Stellen in das Wasser getaucht, und wenn nöthig mit dem Golddrahte mittelst eines Kupferdrahtes verbunden werden. Als der Aluminiumdraht nahe bei dem Golddrahte in gleichem Abstande wie dieser von dem Eisendrahte sich befand, zeigte, während der Eisendraht zur Erde abgeleitet war

der Aluminiumdraht für sich — 0,33
der Golddraht für sich + 0,43 } Mittel + 0,05

dagegen zeigten beide Drähte vereinigt + 0,05.

Es stimmte also, wie nach den vorhergehenden Erläuterungen bei Gleichheit der Abstände nicht anders zu erwarten war, die an beiden vereinigten Metallen beobachtete Spannung genau mit dem Mittel der Spannungen, welche beide Metalle einzeln annehmen, überein. Dasselbe Resultat erhielt ich, als ich den Aluminiumdraht in den zweiten Winkelpunkt an der zweiten kurzen Seite des Gefässes stellte, so dass die drei Drähte wieder ein gleichschenkliges Dreieck bildeten.

Diese Uebereinstimmung hörte aber auf, als die Entfernungen des Eisendrahtes von den beiden andern Drähten nicht mehr gleich waren. Während der Eisendraht seinen Ort in der Mitte der ersten kurzen Seite behielt, ward der Golddraht in die Mitte der gegenüberliegenden gestellt, und der Aluminiumdraht in die Verbindungslinie beider 1 ½ bis 2 Zoll weit von dem Eisendrahte entfernt eingetaucht. Das Mittel aus den Spannungen des Gold- und Aluminiumdrahtes, jeden für sich genommen, war — 0,06, während beide vereinigt die Spannung — 0,25 gaben. Der beobachtete Werth wich also von dem Mittel um — 0,19 ab. Als der Aluminiumdraht in ungefähr ¼ Zoll Abstand vom Eisendrahte, seitwärts von diesem gestellt wurde, stieg jener Unterschied auf — 0,22, und als der Aluminiumdraht in der Verbindungslinie des Eisendrahtes mit dem Goldrahte dem Eisendrahte bis auf ungefähr 1 Linie nahe stand, erreichte jener Unterschied — 0,27, so dass der bei Vereinigung des Gold- und Aluminiumdrahtes beobachtete Werth (— 0,20) dem am Aluminiumdrahte für sich allein beobachteten Werthe (— 0,33) schon ziemlich nahe kam.

Werden die Widerstände zwischen dem Aluminium- und Golddrahte noch grösser, so kann man die bei beiden vereinigten Metallen hervortretende Spannung mit der durch eines der Metalle hervorgerufenen ganz zusammenfallen lassen. An eine enge Uförmig gebogene gläserne Röhre waren oben beiderseits zwei etwas weitere Gefässe angeschmolzen, und die Röhre sammt den Gefässen mit Alkohol gefüllt. In das eine Gefäss ward ein zur Erde geleiteter Eisen- und ein isolirter Aluminiumdraht, und in das zweite Gefäss ein isolirter Golddraht getaucht. Der Aluminiumdraht allein zeigte die Spannung — 0,65, der Golddraht + 0,25, und beide vereinigt — 0,65, d. h. genau den Werth wie der Aluminiumdraht für sich.

B. Ueber die Spannungen an den aus einem Platindrahte und Platintiegel bestehenden Polen.

Da die beobachteten Werthe sehr verschieden ausfallen, je nachdem die Flamme durch einen Platindraht oder durch einen in den Alkohol der Lampe getauchten Golddraht abgeleitet ist, so will ich gleich hervorheben, dass auch jetzt, ebenso wie früher, die in diesen beiden Fällen beobachteten Werthe jedes Mal nur um eine constante Grösse, nämlich den elektrischen Unterschied zwischen den beiden genannten Ableitungen, von einander unterschieden sind. Ich werde daher zum Beweise des Gesagten nur die erste Versuchsreihe mit der Ableitung durch den Platindraht anführen, und dann mich auf die Mittheilung der Beobachtungen bei Ableitung durch den Golddraht beschränken, obwohl ich die Messungen auch mit der andern Anordnung durchgeführt habe.

	Tiegel 26^{mm} hoch.		51^{mm} hoch.
	Ableitung durch		Ableitung durch
	Golddraht.	Platindraht.	Golddraht.
A u. — *P* mit Elektrometer verbunden	—2,64	—1,55	—2,47
A u. + *P*	—0,44	+0,65	—0,70
T u. + *P*	—0,34	+0,72	—0,05
T u. — *P*	—2,74	—1,70	—3,05

Die Zahlen der zweiten verticalen Spalte sind von denen der ersten sämmtlich im Mittel um 1,07 verschieden; während von den Zahlen der dritten verticalen Spalte jedes Mal nur die erste und dritte Zahl um eine bestimmte, und ebenso die zweite und vierte um eine andere Grösse von den entsprechenden Zahlen der ersten Spalte verschieden sind.

Als die Lampe durch den Golddraht abgeleitet war, zeigte während der kalte Tiegel 26^{mm} über der Lampe hing, der Draht *A* — 0,95, der Tiegel — 0,45 und beide vereinigt — 0,73; während der kalte Tiegel in 51^{mm} Höhe stand, wurde am Drahte *A* — 0,87, am Tiegel — 0,25 und an beiden zusammen — 0,67 beobachtet. Aus der Vergleichung der bei Vereinigung des Drahtes *A* mit dem Tiegel *T* beobachteten Ausschläge mit den Mittelwerthen aus den Spannungen des Drahtes und Tiegels ergibt sich, dass die Ableitung durch den Draht und den Tiegel bei 26^{mm} Abstand nahe gleich, bei 51^{mm} Abstand aber auf Seiten des Drahtes grösser ist.

Reduciren wir die erste und dritte verticale Spalte wegen der

Elektricitätserregung infolge der Ableitung, indem wir von den Zahlen der ersten — 0,73, und von den Zahlen der dritten — 0,67 abziehen, so erhalten wir:

	Tiegel 26^{mm} hoch.	Tiegel 51^{mm} hoch.
A und $-P$	— 1,91	— 1,80
A und $+P$	+ 0,29	— 0,03
T und $+P$	+ 0,39	+ 0,62
T und $-P$	— 2,01	— 2,38

Die gleichzeitig an beiden Polen vorhandenen Spannungen werden grade wie früher durch die Zahlen der ersten und dritten, und ebenso wieder durch die Zahlen der zweiten und vierten horizontalen Reihe angegeben. Bei 26^{mm} Abstand zeigen sich also, wie bei der zuvor schon nachgewiesenen Gleichheit der Leitungen zu erwarten stand, die Erscheinungen grade so, als ob zwei gleiche Platindrähte als Pole in die Flamme getaucht wären. Dagegen tritt bei 51^{mm} Abstand der Unterschied in der Ableitung bereits so stark hervor, dass der Draht als positiver Pol gar keine Spannung, dagegen der Tiegel unter gleichen Umständen noch die Spannung + 0,62 zeigt.

9. *Ueber die Spannungen an den Polen eines Elementes, wenn der eine mittelst eines Metalles in die abgeleitete Flamme und der andere zu dem Alkohol der Lampe geführt ist.*

Für das Verständniss späterer, im 14. Abschnitte dieses zweiten Theiles mitgetheilter Vorgänge war es nothwendig, das Verhältniss der Widerstände beim Uebergange der Elektricität von einem in oder über der Flamme befindlichen Metalle und von dem mit Alkohol befeuchteten Dochte der Lampe zur Flamme wenigstens im Allgemeinen kennen zu lernen. Es wurde deshalb der eine Pol eines galvanischen Elementes mit dem in den Alkohol der Lampe eingetauchten Golddrahte, und der andere mit einem in der Flamme befindlichen Platindrahte, Bleche oder Tiegel verbunden, und ausserdem die Flamme durch einen Platindraht zur Erde abgeleitet. Da die aus zahlreichen Versuchen gewonnenen Resultate ohne Weiteres verständlich sind, werde ich keine Zahlenwerthe mittheilen, sondern sogleich die Vorgänge im Allgemeinen beschreiben

Als der zur Erde geleitete Platindraht 22^{mm} hoch, und das dünne Platinblech 28^{mm} hoch über dem Dochte horizontal in der Flamme standen, und die infolge der Ableitung in der Lampe und im Bleche (einzeln und vereinigt genommen) erzeugten Spannungen gemessen wurden, so zeigte das Blech keine, die Lampe starke positive, beide vereinigt aber wieder keine oder äusserst geringe positive Elektricität: ein Beweis, dass der Uebergang von dem Bleche zur Flamme leichter ist, als vom Dochte der Lampe in die Flamme. Dies sprach sich auch deutlich aus, als die Pole eines Elementes mit dem Bleche und dem Golddrahte der Lampe verbunden wurden, indem das Blech, wenn es mit dem positiven Pole verbunden war, jede Spur von Elektricität verlor, und auch bei Verbindung mit dem negativen Pole nur eine äusserst geringe Spannung von — 0,1 Skth. zurückhielt. In allen Versuchen, und zwar nicht bloss mit dem Platinbleche, sondern auch mit dem kalten Platintiegel ergab sich ein solcher kleiner Rest am negativen Pole, so dass also auch hier der geringere Widerstand beim Uebergange der positiven Elektricität sich bemerklich machte. Der mit der Lampe verbundene Pol besass dann natürlich die volle oder fast die volle Spannung des Elementes.

Wurde das Blech 53^{mm} oberhalb des Dochtes aufgestellt, so blieben die Erscheinungen im Allgemeinen dieselben, nur zeigte sich jetzt auch an dem Bleche, wenn es mit dem positiven Pole verbunden war, ein kleiner Rest.

Bei einer Höhe von 128^{mm} über der Lampe wird das Platinblech wenig erhitzt, so dass Blech und Lampe einzeln und vereinigt, der Ableitung durch den Platindraht gegenüber, nahe gleich stark positiv elektrisch werden. Aus den an ihnen beobachteten Spannungen lässt sich daher kein Schluss auf die Leitung machen; dies wird jedoch möglich, wenn man den Golddraht in der Lampe durch einen Zinkdraht ersetzt. Während jetzt das Platinblech durch die Ableitung positiv wird, erscheint die Lampe sehr stark negativ; und Blech und Lampe vereinigt geben einen Ausschlag, der nahe den an der Lampe allein beobachteten erreicht; ein Beweis, dass jetzt die Lampe die bessere Ableitung gewährt. Damit stimmen nun auch die Vorgänge bei Verbindung der Lampe und des Bleches mit den Polen eines Elementes überein; stets bleibt in der Lampe, je nachdem sie mit dem negativen oder positiven Pole verbunden ist, nur der geringe Rest von respective — 0,52 oder + 0,25, wenn die nöthigen Reductionen wegen der infolge der Ableitung er-

zeugten Spannung angebracht werden; das Blech dagegen zeigt fast die volle Spannung des Elementes. Bei dem bedeutend geringern Widerstande beim Uebergange der Elektricität aus der Lampe in die Flamme war auch nicht zu erwarten, dass ein etwa vorhandener Unterschied in dem Uebergange der beiden Elektricitäten sich in stärkerer Weise bemerklich machen würde.

Vergeblich habe ich in den mittlern Entfernungen zwischen 53^{mm} und 128^{mm} genaue Messungen zu erhalten gesucht; das Flackern der Flamme verursachte zu bedeutende Schwankungen, und die Unsicherheit der Resultate in den bezeichneten Entfernungen wurde nicht geringer, als ich an die Stelle des Platinblechs den grossen leeren oder mit Eis gefüllten Tiegel setzte.

Als ich anstatt des Platinbleches einen Platindraht von $0{,}5^{mm}$ Durchmesser 28^{mm} hoch über dem Dochte in der Flamme aufstellte, wichen die Resultate von den zuvor in demselben Abstande mit dem Bleche erhaltenen in leicht begreiflicher Weise ab. Während infolge der Ableitung die Lampe + 0,55, und der Draht — 0,30 zeigten, wurde bei der Vereinigung beider eine Spannung — 0,05 beobachtet; der Draht besass hiernach allerdings noch eine bessere Leitung, als die Lampe, indess in einem weniger hohen Grade als das Blech. Infolge dieser geringern Verschiedenheit in der Leitung vermag nun auch hier der Unterschied in dem Verhalten der positiven und negativen Elektricität mehr hervorzutreten. Als der positive Pol mit dem Drahte verbunden war, blieb nur der geringe Rest + 0,1; als dagegen der negative Pol mit ihm zusammenhing, behielt er noch eine Spannung von — 0,65; die Spannung in der Lampe war jedes Mal gleich der des Elementes (2,42) vermindert um die Spannung am Drahte. Bei Vergrösserung des Abstandes des Drahtes von der Lampe nahmen die Rückstände auf ihm zu, während die Spannungen an der Lampe sanken, so dass bei 128^{mm} die Lampe beim Verbinden mit dem negativen oder positiven Pole respective — 0,2 oder + 0,1 zeigte, während an dem Drahte die um diese kleine Grösse verringerte Spannung des Elementes erschien.

Der Unterschied in der Ableitung der beiden verschiedenen Elektricitäten, den Erman entdeckt hat, wenn beide Pole durch Metalle zur Flamme geleitet werden, tritt nach dem eben mitgetheilten Versuche also auch ein, wenn nur die eine Elektricität von einem Metall, die andere aber von einer Flüssigkeit in die Flamme übergeht; wie nach den

im 7. Abschnitte dieses Theiles angeführten Resultaten nicht anders zu erwarten war.

10. *Welchen Einfluss hat eine Ortsveränderung des Ableitungsdrahtes in der Flamme?*

Die im vorigen Abschnitte gewählte Einrichtung vermag uns auch über das Verhältniss des Widerstandes der Masse der Flamme zu den bei den Uebergängen stattfindenden Widerständen einigen Aufschluss zu geben.

Das dünne 28^{mm} über dem Dochte stehende Platinblech wurde wie zuvor mit dem einen, die Lampe mit dem andern Pole eines Elementes verbunden, und in der Flamme in verschiedenen Höhen ein Platindraht als Ableitung zur Erde angebracht. Da je nach der Stellung die Temperatur des Drahtes eine andere wurde, so änderte sich auch seine elektrische Beschaffenheit und somit die Spannung, welche Blech und Lampe diesem Drahte gegenüber annahmen. Wurden nun die beobachteten Ausschläge mit Rücksicht auf die durch die Ableitung erzeugten Spannungen reducirt, so erhielt ich keine merklichen Unterschiede, wenn zuerst der Ableitungsdraht 24^{mm}, dann 16^{mm} und zuletzt nur 3^{mm} über dem Dochte sich befand.

Ein gleiches Resultat ergab sich, als ein Platindraht an die Stelle des Bleches gesetzt wurde. Zwischen den Spannungen an diesem Drahte und der Lampe als Polen eines Elementes zeigten sich keine merklichen Differenzen, als der Ableitungsdraht 3, 16, 24^{mm}, ja selbst 32^{mm} über dem Dochte (im letztern Falle also sogar 4^{mm} oberhalb des Poldrahtes) stand; stets wurde der positiven Elektricität derselbe leichtere Austritt aus dem Drahte gewährt.

Da so beträchtliche Aenderungen in der Stellung des Ableitungsdrahtes keinen Einfluss auf die Leitungsverhältnisse der beiden Pole ausüben, so darf aus den vorstehenden Versuchen wohl der Schluss gezogen werden, dass der Haupttheil des Widerstandes beim Durchgange der Elektricität durch die Flamme in dem Uebergange der Elektricität von den Polen zu derselben liegt. Böte der Flammenkegel selbst einen, im Verhältniss zu dem bezeichneten, beträchtlichen Widerstand dar, so würde eine Aenderung des Ortes des Ableitungsdrahtes auf die Grösse der Spannung an beiden Polen nicht ohne Einfluss bleiben können.

11. *Ueber die elektrische Spannung in der Flamme, wenn von den beiden in dieselbe geführten Polen eines Elementes der eine zur Erde abgeleitet ist.*

Leitet man den einen Pol eines galvanischen Elementes zur Erde, den zweiten aber mittelst eines Platindrahtes in die Flamme einer Weingeistlampe, und verbindet das Goldblättchen des Elektrometers durch einen Draht entweder mit der Flamme oder mit dem Alkohol der Lampe, so führt dieser Draht dem Elektrometer eine elektrische Spannung zu, wie sie der elektromotorischen Kraft des Elementes, vermehrt oder vermindert um die durch die Flammenwirkung hervorgerufene Elektricität, entspricht; und zwar verhalten sich nach Abzug jener Flammenwirkung beide Elektricitäten in genau gleicher Weise. Man könnte nun glauben, es müsse bei der getroffenen Anordnung gleichgültig sein, ob der erste Pol bei unausgesetzter Ableitung zur Erde mit der Flamme in Berührung gebracht würde oder nicht. Dem ist jedoch, wie schon Erman beobachtet hat, nicht so. Als Erman beide Pole des Elementes mittelst zweier Drähte in symmetrischer Weise in die Flamme leitete, fand er, dass ein in die Flamme tauchender Draht dem mit ihm verbundenen Elektrometer, bei Ableitung des positiven Poles zur Erde keine, dagegen bei Ableitung des negativen die volle Spannung des positiven Poles zuführte. Die von Erman gemachten Angaben entsprechen aber nicht in aller Strenge dem wahren Hergange, indem ich sogleich zeigen werde, dass unter den angegebenen Umständen bei Ableitung des negativen Poles nicht die volle positive Spannung der Kette, und bei Ableitung des positiven immer noch eine gewisse Menge Elektricität durch die Flamme zum Elektrometer geführt wird.

Zur genaueren Darlegung des Verhaltens der Pole will ich ein specielles Beispiel anführen, und bemerke nur, dass es gleichgültig ist, ob die beiden mit den Polen verbundenen Drähte parallel mit einander durch die Flamme gesteckt, oder so gebogen sind, dass bloss ihre sich innerhalb der Flamme befindenden Spitzen einander in einer Entfernung von 3 bis 4 Millimetern gegenüber stehen. Unerlässliche Bedingung ist aber, wenn keine fremdartigen Störungen, wie ich sie nachher erortern werde, eintreten sollen, dass beide Drähte sich in symmetrischer Lage zur Flamme befinden.

Es wurden die Pole eines Zinkkohlenelementes mittelst zweier parallelen Platindrähte *A* und *B* in die Flamme einer Weingeistlampe

geführt, und in dieselbe Flamme oberhalb ein dritter Platindraht *C* getaucht, der mit dem Goldblättchen des Elektrometers zusammenhing. Ohne Anwesenheit des Elementes zeigte das Elektrometer, wenn die beiden ersten Platindrähte zur Erde abgeleitet wurden, infolge der Verschiedenheit zwischen ihrer Temperatur und der des dritten Drahtes $+0,1$. Als darauf die Pole eines Elementes von der Stärke 2,22 mit den beiden Drähten *A* und *B* verbunden wurden, gab das Elektrometer bei Ableitung des positiven Poles zur Erde $-0,1$, dagegen bei Ableitung des negativen $+2,1$. Die Differenz beider Ausschläge ist selbstverständlich der elektromotorischen Kraft des Elementes gleich. Nach einer Reduction wegen der elektrischen Spannung im Drahte *C* finden wir also bei Ableitung des positiven Poles den Ausschlag $-0,2$, und nach Ableitung des negativen den Ausschlag $+2,0$.

Da nach den Versuchen des vorhergehenden Abschnittes die Stellung des Ableitungsdrahtes innerhalb des innern Theiles der Flamme keinen merklichen Einfluss hatte, werden wir auch bei den so eben behandelten Vorgängen keine wesentlichen Aenderungen erwarten dürfen, wenn wir in dem vorstehenden Versuche die Flamme nicht mittelst des Platindrahtes *C*, sondern mittelst eines in den Alkohol der Lampe getauchten Gold- oder Zinkdrahtes mit dem Elektrometer verbinden, wofern wir nur die beobachteten Ausschläge wegen der in dem Gold- oder Zinkdrahte vorhandenen Spannungen reduciren. Nach Ausführung dieser Reduction lieferten z. B. zwei mit einem Gold- und Zinkdrahte angestellte Versuche den obigen entsprechende Resultate.

Als S. 41 die Pole eines Elementes mittelst zweier Platindrähte in die abgeleitete Flamme geführt wurden, verlor der positive Pol nicht seine ganze Spannung, sondern behielt einen kleinen Rest von $+0,3$; während an dem negativen Pole $-0,3$ an der vollen Spannung des Elementes fehlte. Die oben mitgetheilten Zahlenwerthe lehren nun, dass bei Ableitung des positiven Poles der negative Pol die Elektricität bis zu ungefähr derselben Spannung, welche zuvor der positive zurückhielt, ausstrahlt, und dass ebenso umgekehrt bei Ableitung des negativen Poles der positive Pol der Flamme eine positive Spannung ertheilt, welche der bei Ableitung der Flamme am negativen Pole vorhandenen negativen Spannung an Grösse gleich ist.

Wenn die beiden in die Flamme getauchten und mit den Polen des Elementes verbundenen Metallflächen nicht gleich gross sind, so er-

fahren die bisher bei Anwendung zweier Platindrähte beschriebenen Erscheinungen infolge ungleicher Leitungswiderstände Aenderungen, welche den im dritten Abschnitte S. 46 beschriebenen Vorgängen entsprechen.

Als z. B. der eine Draht durch das dünne Platinblech *B* ersetzt wurde, und letzteres in 34^{mm} Höhe über der Lampe stand, während der Draht *A* 26^{mm} oberhalb derselben lag, so zeigte das mit einem in 20^{mm} Höhe durch die Flamme gesteckten Drahte verbundene Elektrometer folgende Ausschläge:

	Beobachtete Spannungen.
A und $+P$ isolirt, *B* und $-P$ zur Erde geleitet .	+ 1,35
A und $-P$ . . . , *B* und $+P$	0,00
B und $+P$ . . . , *A* und $-P$	+ 2,30
B und $+P$ . . . , *A* und $+P$	— 0,87.

Dieselben Werthe würden wir nach der erforderlichen Reduction ebenfalls erhalten haben, wenn das Elektrometer mit dem Gold- oder Zinkdrahte in der Lampe verbunden gewesen wäre. Aus ihnen folgt, dass wenn der positive Pol mit dem Bleche verbunden und zur Erde geleitet ist, das Elektrometer gar keinen Ausschlag zeigt, während bei Ableitung des mit dem Drahte verbundenen negativen Poles am Elektrometer die volle positive Spannung des Elementes beobachtet wird. Diese Erscheinungen ändern sich aber bei umgekehrter Stellung der Pole, d. h. wenn der negative Pol mit dem Bleche und der positive Pol mit dem Drahte verknüpft wird; dann zeigt bei Ableitung des positiven Poles das Elektrometer — 0,87, und bei Ableitung des negativen + 1,35.

Eine Vergleichung mit den oben S. 46 erhaltenen Resultaten lehrt, dass auch in diesem Falle die Erscheinungen ganz den in dem angeführten Abschnitte enthaltenen entsprechen; und diese Uebereinstimmung zeigt sich, um dies gleich hier kurz zu erwähnen, ferner noch darin, dass wenn man die Pole einer aus mehreren Elementen gebildeten Säule in die Flamme führt, der Ausschlag des Elektrometers, wenn der mit dem Bleche verbundene positive Pol abgeleitet wird, Null bleibt, und dass er andererseits nur sehr wenig grösser wird als zuvor, wenn die Ablei-

tung zur Erde an dem mit dem Drahte verbundenen positiven Pole erfolgt; während bei Ableitung des negativen Poles die positiven Ladungen des Elektrometers mit der Anzahl der Elemente steigen.

Da die in diesem Abschnitte behandelten Erscheinungen den im dritten Abschnitte S. 46 erörterten genau parallel gehen, so glaube ich eine weitere Mittheilung der Vorgänge, welche eintreten, wenn das Platinblech durch einen mit Eis gefüllten Platintiegel ersetzt wird, oder andere Metalle oder Wasserstrahlen an seine Stelle treten, hier übergehen zu dürfen, indem man leicht aus den S. 56 angegebenen Zahlenwerthen die im vorliegenden Falle auftretenden herleiten kann; denn in der That findet auch hier dieselbe Uebereinstimmung statt, wie in den beiden zuvor ausführlicher berichteten Fällen.

12. *Erklärung der bisher beschriebenen Erscheinungen.*

Wie ich schon in dem ersten Abschnitte S. 40 angedeutet habe, hat, obwohl die Entdeckung der sogenannten unipolaren Leitung durch Erman seit 1802 allgemein bekannt gewesen ist, doch Niemand ernstlich den Versuch wagen mögen, eine Erklärung für dieselbe aufzustellen. Auch G. S. Ohm, nachdem es ihm glücklich gelungen war, das Verhalten der Seife im Kreise der Volta'schen Säule auf seinen wahren Grund zurückzuführen, lässt sich nicht auf die Untersuchung der Flammen ein, sondern äussert sich nur in folgender Weise*): „Bei den Flammen wachsen die Hindernisse noch weit stärker an; hier ist in den bisherigen Versuchen noch so Vieles unbestimmt geblieben. Weiss man doch nicht einmal, welcher Theil der Flamme zu den unipolaren Erscheinungen wesentlich gehört und welcher nicht"; und bald darauf**) spricht er von „den noch ziemlich stark vom Nebel umhüllten unipolaren Flammen."

Das Haupthinderniss, welches einem wesentlichen Fortschritte in der Erklärung der sogenannten unipolaren Leitung der Flammen entgegenstand, hat sicherlich darin gelegen, dass man stets zu stärkern Säulen seine Zuflucht nahm und messende Versuche ganz ausser Acht liess. Beides musste aber nothwendig die schwächern Seiten der Erscheinung im Verborgenen lassen, und doch ist ohne eine genaue

*) Jahrb. der Chem. u. Phys. Bd. 59, S. 414.

**) Ebend. Bd. 60, S 32.

Kenntniss aller Theile eines Phänomens ein vollständiges Verständniss desselben nicht möglich. Die in den vorhergehenden Abschnitten mitgetheilten Versuche füllen nun die bezeichneten Lücken aus, und werden uns daher in den Stand setzen, eine ebenso einfache als vollständige Erklärung der sogenannten Unipolarität der Flamme zu geben; und zwar bedarf es dazu nur der Betrachtung der Spannungscurve in der gegebenen durch die Flamme geschlossenen Kette.

Zu diesem Zwecke denken wir uns die aus einem Zinkkohlenelemente mit seinen Leitungsdrähten, und der zwischen seine beiden Pole eingeschlossenen Flamme bestehende Kette in eine grade Linie AG (Fig. 1, 2, 3) ausgestreckt, und construiren über dieser Linie als Ab-

Fig. 1.

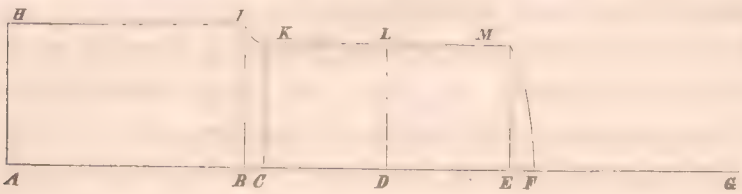


Fig. 2.

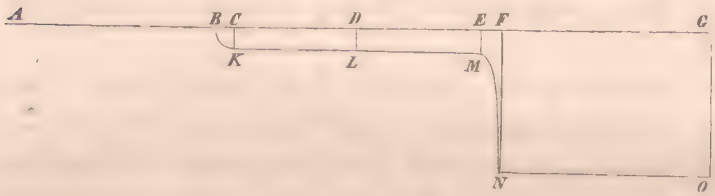
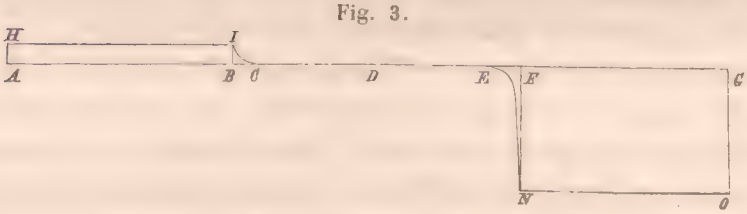


Fig. 3.



scisse, zunächst allerdings blos hypothetisch, die Curve, deren Ordinaten die bei einer gegebenen Ableitung an jedem Punkte vorhandenen elektrischen Spannungen darstellen; später werde ich zeigen, dass die gemachten Annahmen der Wirklichkeit entsprechen. Der Einfachheit wegen möge noch die Voraussetzung gemacht werden, dass in der ganzen Kette nur eine elektromotorische Kraft in A (Fig. 1) von der Grösse $AH = 2{,}3$, dem oben gefundenen Durchschnittswerthe der Spannung eines Zinkkohlenelementes entsprechend,

vorhanden sei, so dass also die Spannungscurve in A einen plötzlichen Sprung von der angegebenen Grösse bilde.

Um von einem bestimmten Falle auszugehen, sei die Kette zunächst an ihrem negativen Pole bei G abgeleitet, so dass sämmtliche Spannungen zwischen A und G positiv werden (Fig. 1). AB sei der vom positiven Pole zur Flamme geführte Draht, BF stelle den von der Flamme eingenommenen Raum, und FG den Verbindungsdraht mit dem negativen Pole dar.

Die Spannungscurve sinkt bekanntlich auf einem Theile einer Kette um so stärker, je grösser daselbst der Widerstand ist; da nun der Widerstand des Stückes AB verhältnissmässig äusserst klein ist, so wird die Spannung in B (Fig. 1) fast noch denselben Werth haben als in A, also IB sehr nahe gleich HA sein.

Beim Austritte aus dem positiven Drahte in B treffen wir aber auf einen starken Widerstand, der durch den kleinen Querschnitt der leitenden Flammenmasse in der nächsten Umgebung des Drahtes erzeugt wird; ihm entsprechend wird also in der Nähe des Austrittspunktes ein merkliches Sinken der Spannungscurve von I nach K um 0,3, ungefähr in der in der Figur angedeuteten Weise, eintreten, so dass CK noch $= +2{,}0$ ist.

Die Versuche im 10 Abschnitte S. 60 haben ferner gelehrt, dass auch der Leitungswiderstand in der Masse der Flamme selbst, also z. B. von C bis E, gegen die an den Uebergängen vorhandenen Widerstände nur gering ist, weshalb in der Strecke durch die Flamme, d. h. von C bis gegen E die Spannungscurve gleich KC bleibt.

Ein äusserst beträchtlicher Widerstand findet sich nun aber in der Nähe des negativen Poles, so dass, weil der Widerstand in dem Verbindungsdrahte FG wegen seiner Geringfügigkeit zu vernachlässigen, mithin die Spannung in F ebenso wie die Spannung in G gleich 0 ist, in der Nähe des negativen Poles die Spannungscurve innerhalb des Stückes EF um die Grösse $ME = 2{,}0$, ungefähr in der in der Figur angedeuteten Weise, herabsinken muss.

In Figur 1 ist, wie bemerkt, der negative Pol auf 0 gehalten; bringen wir jetzt durch eine Ableitung zur Erde den positiven Pol auf 0, so ändert sich dadurch in keiner Weise die Spannungscurve; wir haben nur die Abscissenaxe um HA höher zu legen, wie in Fig. 2; sämmtliche Spannungen sind dann negativ.

Halten wir endlich weder den einen noch den andern Pol, sondern den Punkt *D* in der Flamme durch eine Ableitung zur Erde auf 0, so muss einfach die Abscissenaxe gegen Fig. 1 um *LD* höher gelegt werden, wie dies in Fig. 3 geschehen ist. Nach dem positiven Pole zu sind dann von *D* aus die Spannungen positiv und nach dem negativen Pole negativ.

Ich werde jetzt zeigen, dass aus dieser angegebenen Form der Spannungscurve sich die Vorgänge der sogenannten unipolaren Leitung selbst bis auf die numerischen Werthe herleiten lassen, woraus also rückwärts die Richtigkeit der zuvor gemachten Annahmen folgt.

Zuerst will ich mich zu den im zweiten Abschnitte S. 41 angeführten Erscheinungen wenden, bei denen die Pole eines Zinkkohlenelementes durch zwei gleiche Platindrähte in die Flamme einer Weingeistlampe geleitet waren, während die Flamme selbst eine Ableitung zur Erde besass. Es zeigte sich am positiven Pole die Spannung von + 0,3 (um kleinere Bruchtheile bei Seite zu lassen), am negativen die Spannung — 2,0.

Dies ist genau der in Fig. 3 dargestellte Fall. Wird die Flamme z. B. in *D* abgeleitet, so muss der positive Pol eine Spannung $= AH = +0{,}3$, und der negative die Spannung $GO = -2{,}0$ zeigen.

Wurde ferner unter Anwendung derselben drei Drähte, wie in dem 11. Abschnitte S. 62, zuerst der negative Pol zur Erde geleitet, während die Flamme mit dem Elektrometer in Verbindung stand, so zeigte, um die vorhergehenden Zahlen beizubehalten, dies Instrument eine Spannung + 2,0.

Dieser Vorgang wird durch einen Blick auf Fig. 1 sogleich verständlich. Die Kette ist in *G* abgeleitet; im Punkte *D* befindet sich der zum Elektrometer geführte Draht; dieser misst also die im Punkte *D* vorhandene Spannung *LD*, welche genau + 2,0 beträgt.

Stand endlich unter denselben Verhältnissen der positive Pol mit der Erde in leitender Verbindung, während die Flamme mit dem Elektrometer zusammenhing, so zeigte (vergl. S. 62) dies Instrument eine Spannung —0,3.

Durch Fig. 2 lässt sich auch dieser Vorgang vollständig klar machen. Die Kette ist in *A* abgeleitet; im Punkte *D* befindet sich der zum Elektrometer geführte Draht, und es ist wieder die in diesem

Punkte vorhandene Spannung $LD = -0{,}3$, welche der Draht zum Elektrometer überträgt.

Nach Erläuterung dieser einfachsten Fälle würde es überflüssig sein, alle früheren Versuche im Einzelnen hier durchzugehen. Um zu zeigen, wie Aenderungen in der Form der Pole auf den Gang der Erscheinungen einwirken können, will ich nur den einen Fall hervorheben, wo der eine der beiden dünnen Poldrähte durch ein Platinblech ersetzt wurde. Durch die Verwandlung des einen Platindrahtes in ein Blech mit grösserer Oberfläche wird der Widerstand an ihm vermindert; an dem unverändert gebliebenen Poldrahte muss daher ein verhältnissmässig stärkerer Abfall der Spannungscurve, an dem Bleche dagegen ein geringerer als zuvor eintreten.

Gesetzt das Blech sei mit dem positiven Pole verbunden: so wird mit der Vergrösserung der Berührungsfläche zwischen Blech und Flamme der Abfall an diesem Pole immer geringer und zuletzt unmerklich, während derselbe am negativen nach und nach die ganze Spannung des Elementes erreicht. Ist also die Flamme abgeleitet, so zeigt bei hinreichender Grösse des Bleches der positive Pol 0, und der negative die Spannung $-2{,}3$. Ist umgekehrt das Blech mit dem negativen Pole in Verbindung, so wird der Abfall an ihm ebenfalls geringer, und infolge dessen an dem mit dem positiven Pole verbundenen Drahte grösser; wird also die Flamme abgeleitet, so muss am positiven Pole eine Spannung grösser als $+0{,}3$, und am negativen eine Spannung kleiner als $-2{,}0$ entstehen.

Ebenso erklären sich die am Elektrometer beobachteten Ausschläge, wenn dieses mit der Flamme verbunden, und einer der beiden zu ihr geführten Pole des Elementes abgeleitet ist. Ist bei hinreichender Grösse des Bleches der positive Pol mit ihm verbunden und wird derselbe zugleich abgeleitet, so kann die Flamme so gut wie keine Spannung, dagegen bei Ableitung des negativen Poles die volle positive Spannung des Elementes an das Elektrometer übertragen. Befindet sich das Blech endlich an dem negativen Pole, so erhält das Elektrometer aus der Flamme bei Ableitung des positiven Poles eine negative Spannung grösser als $-0{,}3$, und bei Ableitung des negativen eine Spannung kleiner als $+2{,}0$.

Wir hatten oben vorausgesetzt, dass in der ganzen Kette nur eine einzige in A gelegene elektromotorische Kraft $= AH$ vorhanden

sei; es könnte daher scheinen, als ob die zuvor gegebene Erklärung nicht mehr genüge, falls auch durch die Berührung der Flamme mit den Platindrähten elektromotorische Kräfte erregt werden. Dem ist jedoch, wie ich gleich zeigen werde, nicht so; die vorhergehende Erklärung der oben angegebenen Zahlenwerthe bleibt genau dieselbe, auch wenn an den Berührungspunkten der Platinpole mit der Flamme elektromotorische Kräfte liegen sollten. Dieselben heben sich nämlich, wie ich gleich zeigen werde, vollständig auf, wenn bei Anwendung zweier gleich stark glühender Platindrähte als Pole die Flamme durch einen dritten Platindraht von gleich hoher Temperatur abgeleitet wird, kommen in diesem Falle also gar nicht zur Beobachtung; andererseits aber werden sie, wenn die Flamme, anstatt durch einen glühenden Platindraht, durch einen in den Alkohol der Lampe eingetauchten Draht abgeleitet ist, durch die früher überall angebrachte Reduction auf den ersten Fall ausgeschieden.

Betrachten wir zuerst den S. 65 Fig. (3) dargestellten Fall, wo der ableitende Platindraht sich in *D* in der Flamme befindet, während die beiden Poldrähte in *B* und *F* in die Flamme tauchen. Wenn nun bei dieser Anordnung ein vierter mit dem Goldblättchen des Elektrometers in leitender Verbindung stehender Platindraht in die Flamme getaucht und eben so stark als die drei übrigen erhitzt wird, so kann, abgesehen von der ursprünglich vorhandenen Spannung, bei Ableitung des Goldblättchens durch einen ganz metallischen Leiter, dieser vierte Platindraht aus der Flamme keine elektrische Spannung zum Elektrometer führen, weil die an ihm erregte Spannung der an dem dritten zur Ableitung dienenden Drahte erregten genau gleich und entgegengesetzt ist. Ebensowenig können die an den Berührungsstellen der Flamme mit den Poldrähten möglicherweise vorhandenen elektrischen Erregungen einen Ausschlag im Elektrometer erzeugen, weil auch hier stets die an jedem Poldrahte und dem Ableitungsdrahte auftretenden Spannungen sich aufheben. Wird also der vierte mit dem Elektrometer zusammenhängende Draht aus der Flamme genommen und an die Poldrähte angelegt, so kann er nur eine Spannung zum Elektrometer führen, wie sie zu dem berührten Punkte der Spannungscurve der von *A* ausgehenden elektromotorischen Kraft gehört.

In ähnlicher Weise ergeben sich die Fälle, welche in Fig. 1 und 2 dargestellt sind, wo nicht die Flamme, sondern der positive oder negative Pol zur Erde geleitet ist. Wird z. B. bei Ableitung des negativen

Poles (Fig. 1) ein mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbundener Platindraht in die Flamme getaucht, so heben sich bei gleich starkem Glühen die Erregungen an ihm und an dem negativen Pole auf, während eine solche Aufhebung zwischen beiden Poldrähten eintritt, wenn der zum Elektrometer führende Draht mit dem positiven Poldrahte verbunden wird.

Man wird jetzt auch leicht erkennen, wie die frühern Reductionen der Beobachtungen bei Ableitung der Lampe durch den Golddraht jene Werthe von dem Einflusse der an den Berührungspunkten der Poldrähte mit der Flamme eintretenden Erregungen befreien, indem sie die beobachteten Zahlenwerthe in solche verwandeln, wie sie bei Ableitung der Flamme durch einen glühenden Platindraht, oder was dasselbe sagt, bei Abwesenheit jeder elektrischen Erregung an den genannten Berührungspunkten beobachtet sein würden. Nicht minder wird einleuchten, dass auch bei den S. 56 mit einem glühenden Drahte und kalten Tiegel als Polflächen angestellten Versuchen die infolge dieser Anordnung vorhandenen elektrischen Spannungen bereits durch die daselbst ausgeführten Reductionen ausgeschieden worden sind.

Die im 5., 6. und 7. Abschnitte mitgetheilten Versuche lehren uns nun, dass die ungleichen Widerstände an beiden Polen nicht von der besondern Beschaffenheit der als Pole in die Flamme getauchten Metalle, und ebensowenig von deren Temperatur abhängen, ja dass ohne wesentliche Aenderung ihres Grössenverhältnisses die Metalle durch Kohle und sogar durch flüssige Strahlen ersetzt werden können. Die Ungleichheiten jener Widerstände sind also einzig und allein durch den Uebergang der beiden Elektricitäten bedingt. Die Versuche mit den Wasserstrahlen dürften es wahrscheinlich machen, dass wir es hierbei mit reinen Uebergangswiderständen, und nicht etwa mit blossen durch den Strom am negativen Pole hervorgerufenen Polarisationserscheinungen zu thun haben. Ohne diese Versuche hätte man vielleicht der letztgenannten Ansicht nicht abgeneigt sein können, besonders infolge der in den frühern Abschnitten mitgetheilten Messungen bei mehreren Elementen, wo das Sinken der Spannungscurve am positiven Pole fast dasselbe bleibt, während diese Curve am negativen Pole um den ganzen übrigen Betrag der Spannung der angewandten Elemente fällt. Um Missverständnissen vorzubeugen, erkläre ich aber ausdrücklich, dass ich mit den vorstehenden Worten keineswegs ableugnen will, dass beim Durch-

gange eines elektrischen Stromes durch eine Flamme Polarisationserscheinungen in einem gewissen, wenn auch vielleicht nur sehr geringen Grade eintreten können und sogar müssen.

Ich habe bisher von Uebergangswiderständen an beiden Polen geredet, ohne mich über die Beschaffenheit derselben näher auszusprechen. Aus dem fast gleichen Sinken der Spannungscurve am positiven Pole bei einem und bei mehreren Elementen dürfte wohl der Schluss zu ziehen sein, dass wir den hier beobachteten Widerstand nur in dem geringen Querschnitte der Flamme in der Umgebung des Drahtes zu suchen haben. Daraus folgt dann, dass der Uebergangswiderstand am negativen Pole in zwei verschiedene Theile zu zerlegen ist, 1) in den ebenso wie am positiven Pole durch den geringen Querschnitt der Flamme in der Umgebung des Drahtes hervorgerufenen Widerstand, und 2) in ein dem negativen Pole eigenthümliches Hinderniss an der Oberfläche des metallischen Drahtes oder flüssigen Strahles. Während der erste Widerstand sich gleich bleibt, steigt der zweite mit der Grösse der Spannung der in die Flamme getauchten Pole.

Es existirt also ein beträchtlicher Widerstand beim Uebergange der negativen Elektricität aus festen und flüssigen Leitern in die Flamme, oder was dasselbe sagt, beim Uebergange der positiven Elektricität aus der Flamme in feste und flüssige Leiter.

Da es meine Absicht ist, zur nähern Bestimmung dieses eigenthümlichen Widerstandes am negativen Pole specielle Untersuchungen auszuführen, um seine eigentliche Natur und seine Verbreitung zu erfahren, so scheint es mir der Vorsicht gemäss, für jetzt noch jeden bestimmten Ausspruch über denselben zurückzuhalten; was im vorliegenden Falle um so weniger Uebelstände mit sich führt, als der experimentelle Nachweis seines Vorhandenseins zur Erklärung der obigen Erscheinungen völlig ausreicht.

13. *Ueber die Verschiedenheit in der Leitung elektrischer Ströme durch die Flamme bei ungleichen Polflächen.*

Wenn ein eigenthümlicher Widerstand, wie er zuvor beschrieben worden, am negativen Pole vorhanden ist, so muss sich derselbe auch mittelst des Galvanometers durch die Verschiedenheit in der Stärke der

unter gewissen Umständen in entgegengesetzten Richtungen durch die Flamme geleiteten Ströme kund geben.

Wenn zwei symmetrisch zur Flamme gestellte gleiche Platindrähte *A* und *B* als Polflächen dienen, so wird der mittelst derselben in die Flamme geleitete Strom gleiche Stärke besitzen, mag er von *A* zu *B*, oder in umgekehrter Richtung von *B* zu *A* durch die Flamme gehen, weil die Gleichheit und gleiche Stellung der Drähte an jedem zum negativen Pole gemachten Drahte denselben Widerstand bedingt.

Anders muss es sich dagegen verhalten, wenn z. B. anstatt des einen Drahtes *B* das dünne S. 14 beschriebene Platinblech als Polfläche benutzt wird. Als der Draht *A* 22^{mm} über dem Dochte stand, und das Platinblech 5^{mm} über dem Drahte *A* angebracht war, ging der Strom eines Elementes infolge des verringerten Widerstandes am negativen Pole in viel grösserer Stärke durch die Flamme, wenn das Platinblech den negativen Pol bildete, als wenn die Elektricität dieses Pols durch den Draht in die Flamme geführt wurde. Selbstverständlich muss aber auch in dem letzten Falle der Strom stärker sein, als bei zwei blossen Drähten als Polen. So wurde, um bestimmte Zahlenwerthe anzuführen, in einem speciellen Versuche bei zwei gleichen und symmetrisch gegen die Flamme gestellten Drähten ein nahe gleicher Ausschlag des Galvanometers in beiden Richtungen des Stromes von ungefähr 30 Skalentheilen beobachtet. Als der eine Draht durch das Platinblech ersetzt wurde, stieg der Ausschlag auf 34, wenn das Blech, und auf 294, wenn der Draht den positiven Pol bildete.

Die oben S. 43 u. 49 mitgetheilten Versuche lehren, dass der eigenthümliche Widerstand am negativen Pole sich mit der elektromotorischen Kraft der angewandten Elemente in einem gewissen Verhältnisse steigert. Dies muss nothwendig ein eigenthümliches Verhalten der Stärke des durch die Flamme gehenden Stromes bei Vermehrung der Elemente zur Folge haben.

Weil der in einem Zinkkohlenelemente vorhandene Widerstand gegen die Widerstände in dem langen dünnen Drahte des Multiplicators, sowie in der Flamme und in den Uebergängen vernachlässigt werden kann: so würde, falls jene Widerstände constant blieben, die Stromstärke proportional mit der Anzahl der angewandten Elemente wachsen. Da nun aber diese Bedingung nicht erfüllt ist, sondern der eigenthümliche Widerstand am negativen Pole mit der Grösse der elektromotorischen

Kraft zunimmt, so werden je nach der Grösse dieser Zunahme die Ausschläge weniger als nach dem Ohm'schen Gesetze wachsen.

Ich will mich jetzt nicht auf eine specielle Untersuchung dieses Vorganges einlassen, indem die Zunahme des Widerstandes am negativen Pole von der Grösse der Polflächen und ihrer mehr oder weniger gutleitenden Berührung mit der Flamme abzuhängen scheint, und begnüge mich daher zur Feststellung der Thatsache im Allgemeinen mit der Anführung der Resultate eines Versuchs.

In die Flamme einer Weingeistlampe tauchten ungefähr 24^{mm} oberhalb des Dochtes zwei dünne Platindrähte, mit welchen die Pole eines oder zweier Elemente verbunden waren; die Flüssigkeit im Innern der Lampe stand, um bei der längern Dauer des Versuchs das Niveau constant zu erhalten, durch eine Oeffnung im Boden mit einer Weingeist enthaltenden Mariotte'schen Flasche in Verbindung. Als ich nun abwechselnd 1 und 2 Elemente anwandte, beobachtete ich nach einander folgende Ausschläge, die, wie ich mich durch eine vorläufige Prüfung des Galvanometers mittelst thermoelektrischer Ströme überzeugt hatte, den Stromstärken proportional waren:

Zahl der Elemente.	Ausschläge.
2	135,8
1	107,0
2	111,1
1	79,4
2	85,1

Wird der zweite Ausschlag mit dem Mittel aus dem ersten und dritten verglichen, so erhält man 1 : 1,15 als Verhältniss der Stromstärken bei einem und bei zwei Elementen; aus der Vergleichung des Mittels der zweiten und vierten Beobachtung mit der dritten folgt jenes Verhältniss 1 : 1,19; und aus der Vergleichung der vierten mit dem Mittel aus der dritten und fünften ergibt sich das Verhältniss 1 : 1,23. Die Abnahme der Stromstärke während der Versuche rührt von einem Nachlassen der Flamme her, indem der vor dem Versuche neu eingezogene Docht trotz des gleichen Niveaus des Weingeistes doch nach und nach der Flamme etwas weniger Alkohol lieferte.

Andere in ähnlicher Weise ausgeführte Versuche gaben analoge Resultate.

Die Beschaffenheit der Flamme macht es wahrscheinlich, dass dieser eigenthümliche Widerstand am negativen Pole beim Durchgange des Stromes durch erhitzte Gase ebenfalls vorhanden ist; und in der That hat ein im Jahre 1853 von Ed. Becquerel*) mittelst einer glühenden an beiden Enden offenen Platinröhre, in deren Axe ein dünner Platindraht ausgespannt war, angestellter Versuch einen leichtern Durchgang des elektrischen Stromes durch die im Innern der Röhre erhitzte Luft gezeigt, wenn die Röhre den negativen, als wenn sie den positiven Pol der Kette bildete.

Aber nicht nur in erhitzten, sondern auch selbst in den blos durch die Luftpumpe bei gewöhnlicher Temperatur verdünnten Gasen lässt sich dieser eigenthümliche Widerstand am negativen Pole beobachten.

Vor Kurzem hat Gaugain**) die interessante Beobachtung gemacht, dass wenn man die Ströme eines Inductionsapparates in einem luftverdünnten Raume zwischen ungleich grossen Metallflächen übergehen lässt, die Wirkungen dieser Ströme auf die Nadel eines in ihren Kreis eingeschlossenen Galvanometers eine sehr verschiedene ist, je nachdem der eine oder der andere Pol mit der kleinen oder der grossen Metallfläche verbunden wird. Wenn diese Verbindungen in der Weise hergestellt werden, dass in Bezug auf die beim Unterbrechen des inducirenden Stromes entstehenden Inductionsströme die kleinere Fläche den positiven, und die grössere den negativen Pol bildet, so nimmt der Ausschlag des Galvanometers mit gesteigerter Luftverdünnung zu; wenn dagegen die Verbindungen umgekehrt werden, so dass der negative Pol mit der kleineren, und der positive Pol mit der grösseren Fläche in Verbindung steht, so wächst anfangs mit abnehmendem Luftdrucke der Ausschlag ebenfalls, beginnt aber, so wie dieser Druck unter eine gewisse Grenze gesunken

*) Annal. de chim. et de phys. 3 Sér.. Bd. 39, S. 371.

**) Compt. rend. B. 40, S. 640; Pogg. Ann. Bd. 95. S. 163. Principiell fällt, wie aus dem folgenden Abschnitte sich ergeben wird, dieser Versuch mit den bereits vor 23 Jahren von Andrews (Pogg. Ann. Bd. 43 S. 318) über den Durchgang der entgegengesetzten Ströme eines magnetoelektrischen Rotationsapparates durch die Flamme angestellten zusammen.

ist, sich zu verringern, wird bei noch weiter fortgesetzter Verdünnung Null, und kehrt sich endlich, wenn das Vacuum so vollkommen ist, als man es überhaupt mit einer guten Luftpumpe erhalten kann, um. Er setzt hinzu: „Diese Abnahme der Stromstärke bei einer gewissen Abnahme des Druckes und diese Umkehrung bei einer noch grössern Verringerung des Druckes sind recht merkwürdige Thatsachen, allein für jetzt habe ich nicht gesucht sie zu deuten."

Riess*) unterwarf bald darauf die Gaugain'sche Beobachtung einer gründlichen Untersuchung, und zieht aus seinen mit ebenso viel Sorgfalt als Scharfsinn angestellten Versuchen den Schluss: „Wenn man den Gesammtstrom des Magneto-Inductionsapparats durch sehr verdünnte Luft zwischen einer sehr kleinen und einer dagegen grossen Fläche übergehen lässt, so geht, wenn die kleine Fläche durch den Oeffnungsstrom positiv wird, nur der Oeffnungsstrom über. Wenn dagegen die kleine Fläche durch den Oeffnungsstrom negativ wird, so geht ausser diesem Strome auch der Schliessungsstrom über." Er fügt weiter hinzu, es sei lange bekannt, dass durch einen Luftraum nur der Oeffnungsstrom übergehe, und dass dies „eine Folge der geringern Dichtigkeit des Schliessungsstromes sei, welche wie Poggendorff gezeigt habe, davon herrühre, dass bei der Bildung des Schliessungsstromes ein geschlossener leitender Kreis sich in der Nähe der inducirten Rolle befinde."

Der von Riess aufgestellte Satz findet nun durch den von mir zuvor nachgewiesenen Widerstand beim Uebergange aus einem festen oder flüssigen Leiter in die verdünnten Gase und Dämpfe der Flamme seine vollständige Erklärung, sobald wir denselben auf verdünnte Luft überhaupt ausdehnen, und dabei die aus meinen und Becquerel's Versuchen hervorgehende Thatsache einer Verminderung dieses Widerstandes mit der Vergrösserung der negativen Polfläche in Erwägung ziehen, Damit lassen sich die von Gaugain beobachteten Erscheinungen so leicht herleiten, dass ich eine specielle Erklärung derselben für überflüssig halte.

Schliesslich will ich, Genaueres bis zu der beabsichtigten speciellen Untersuchung aufsparend, nur noch andeuten, dass unter den längst bekannten Thatsachen mehrere vorliegen, welche auf einen solchen

*) Monatsberichte der Berliner Akademie 1855. S. 393; Pogg. Annal. 96, 177.

Uebergangswiderstand am negativen Pole auch selbst in Luft von gewöhnlicher Dichte und Temperatur hinweisen. Ich erinnere daran, dass die Lichtbüschel sich leichter und grösser an der positiven Spitze als an der negativen bilden, dass ferner, wenn ein Blatt Papier zwischen zwei in einem gewissen Abstande von einander befindliche Spitzen in fast paralleler Lage mit ihrer Verbindungslinie gebracht wird, die Durchbohrung des Papiers vor der negativen Spitze stattfindet u. s. w.

14. *Ueber die von Andrews bezüglich der verschiedenen Leitung eines Stromes durch die Flamme gemachten Beobachtungen.*

Die nachfolgenden Beobachtungen stehen, wie man sogleich erkennen wird, mit den im vorhergehenden Abschnitte behandelten, in der engsten Beziehung.

Als im Jahr 1836 Andrews*) in Belfast den einen Pol einer Volta'schen Säule von 20 Plattenpaaren mit dem Messingrohre einer Argand'schen Gaslampe, den andern aber mit einer ungefähr 1 Zoll oberhalb der Flamme aufgehangenen und bis zur Rothgluth erhitzten Spirale aus Platindraht verband: so ging der Strom durch die Flamme hindurch, wie aus der Zersetzung des Jodkaliums folgte, so oft der positive Pol zu der Spirale geführt wurde, während dagegen keine Zersetzung des genannten Salzes zu bemerken war, wenn der negative Pol mit der Platinspirale zusammenhing. Wurde die Platinspirale in die Flamme selbst getaucht, so trat allerdings auch bei der zuletzt angegebenen Verbindung eine Zersetzung ein; indess genügte es, die Säule schwächer zu nehmen, um die Zersetzung verschwinden zu sehen, während sie bei umgekehrter Leitung des Stromes fortbestand.

Aus diesen Versuchen von Andrews folgt eine Verschiedenheit in der Leitung, je nachdem der Strom von der Brennvorrichtung durch die Flamme nach der in oder über ihr befindlichen Platinspirale oder in umgekehrter Richtung geleitet wird.

Viel besser als durch die Zersetzung des Jodkaliums, welche unter vorliegenden Umständen eine quantitative Bestimmung nicht gestattet, lässt sich natürlich die obige Verschiedenheit in der Stärke eines in der einen oder andern Richtung durch die Flamme geleiteten Stromes mit-

*) Phil. Mag. Sér. III. Vol. IX. 176; Pogg. Annal. Bd. 43, 345.

telst des oben S. 37 beschriebenen Galvanometers wahrnehmen. Bei einer auf diese Weise über die Verschiedenheit der Leitung eines Stromes durch eine Weingeistflamme angestellten Untersuchung fand ich nun einestheils die von Andrews an der Flamme einer Gaslampe gemachte Beobachtung an der Weingeistflamme bestätigt, andererseits aber zeigte sich auch, dass jene Verschiedenheit der Leitung grade in umgekehrter Weise auftreten, d. h. der Strom in aufsteigender Richtung den geringeren Widerstand finden kann.

Ich will zunächst die Vorgänge berichten, und dann die Erklärung derselben anschliessen; eine detaillirte Mittheilung wird bei der Einfachheit derselben nicht nöthig sein.

In verschiedenen Höhen in oder über der Flamme einer Weingeistlampe, in welche entweder ein Gold- oder ein Zinkdraht tauchte, wurde das dünne S. 14 beschriebene Platinblech aufgestellt, und mit dem einen Ende des Multiplicatordrahtes verbunden, während dessen anderes Ende mit dem in die Lampe getauchten Drahte leitend zusammenhing. Der nach dem Anzünden der Lampe entstehende Ausschlag der Magnetnadel mass den durch die Flamme erzeugten Strom.

Darauf wurden an einer Stelle jenes Kreises ein oder mehrere Zinkkohlenelemente eingeschaltet, und die Ausschläge des Galvanometers gemessen, 1) wenn der Strom des Elementes in der Flamme aufsteigend, und 2) wenn er absteigend war. Von diesen Ausschlägen wurde der durch die blosse Flamme zuvor gemessene Ausschlag respective abgezogen oder zu ihnen addirt, je nachdem er in seiner Richtung gleich oder entgegengesetzt gerichtet war. Die auf solche Weise corrigirten Ausschläge dienen also als ein Maass für die Durchleitung des von den Elementen erzeugten Stromes.

Aus den Versuchen ergab sich nun, dass wenn das Blech in 25^{mm} Höhe über dem Dochte stand, der Strom in der Richtung von unten nach oben leichter durch die Flamme ging als umgekehrt; also grade ein entgegengesetztes Resultat, als wie Andrews bei seinen Experimenten mit der Gasflamme erhalten hatte. Dabei stellte sich noch als besondere Eigenthümlichkeit heraus, dass das Verhältniss in der Stärke der durch die Flamme in entgegengesetzter Richtung geleiteten Ströme mit der Anzahl der Elemente sich immer mehr von der Einheit entfernte. Während z. B. bei einem Elemente die Stärke des aufsteigenden Stromes zu der des absteigenden ungefähr wie 1 : 0,9 war, änderte sich dies

Verhältniss bei drei Elementen bis 1 : 0,6, und sank bei sechs Elementen unter 1 : 0,5 hinab.

Als das Platinblech in 50^{mm} Höhe über der Lampe stand, wurden beide Ströme, der auf- und der absteigende, nahe gleich gut geleitet.

Bei noch grösserer Höhe, bei 75^{mm} und bei 100^{mm}, kehrte sich die zuvor beobachtete Ungleichheit um, d. h. der aufsteigende Strom wurde schlechter geleitet als der absteigende. Bei 75^{mm} Höhe betrug z. B. bei 3 bis 4 Zinkkohlenelementen das Verhältniss des aufsteigenden Stromes zum absteigenden 1 : 2 und darüber.

Aehnliche Vorgänge wurden beobachtet, als das Platinblech durch eine Spirale ersetzt wurde.

Es bleibt schliesslich nur noch übrig, die eben berichteten Erscheinungen zu erklären; was mit Zugrundelegung der in den letzten Abschnitten gewonnenen Resultate keine Schwierigkeiten mehr darbietet.

Wir haben gesehen, dass jeder Strom, gleiche Polflächen vorausgesetzt, beim Durchgange durch die Flamme am negativen Pole ein grösseres Hinderniss findet, als am positiven, wobei es gleichgültig ist, ob er aus einem Metalle oder aus einer Flüssigkeit in die Flamme übergeht. Dies Hinderniss am negativen Pole kann aber durch eine grössere Oberfläche, ich möchte sagen, dichtere Berührung mit der Flamme vermindert werden.

Wären die Ableitungen der Flamme durch das Platinblech und den Draht in der Lampe gleich, wie z. B. bei zwei gleich grossen Metallflächen, so würde der elektrische Strom beim Uebergange in der einen oder andern Richtung stets auf dasselbe Hinderniss am negativen Pole stossen, und folglich die Stromstärke in beiden Richtungen gleich gross sein; existirt aber zwischen diesen beiden Ableitungen ein Unterschied, wie z. B. zwischen einer kleinen und grossen Metallfläche, so muss der Strom in der Richtung die grösste Intensität besitzen, wo der negative Pol mit der bessern Leitung (grösseren Fläche) verbunden ist (vergl. S. 73).

Die S. 58 mitgetheilten Versuche haben nun gezeigt, dass bei geringem Abstande des Platinblechs von der Lampe die Ableitung der Flamme durch das Platinblech besser ist, als durch den Docht der Lampe; folglich muss der Strom die grössere Intensität besitzen, wenn der negative Pol mit dem Bleche verbunden, oder seine Richtung in der Flamme aufsteigend ist; was von den angeführten Versuchen bestätigt wird.

In grösseren Höhen des Blechs bietet dagegen umgekehrt der Draht in der Lampe eine bessere Ableitung dar, als das Blech; folglich muss unter diesen Verhältnissen der Strom die grössere Intensität besitzen, wenn der negative Pol mit dem Drahte verbunden, oder die Stromrichtung in der Flamme absteigend ist; was ebenfalls die obigen Versuche bestätigen.

Zwischen den beiden genannten Abständen muss es nothwendig eine mittlere Lage geben, wo die Leitungs- und Widerstandsverhältnisse am Bleche und am Drahte gleich sind; dann werden, womit auch die zuvor berichteten Versuche übereinstimmen, die Ströme in beider Richtung gleich stark sein.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Vorwort 3

I. Ueber den Ursprung der in und oberhalb der Flamme einer Weingeistlampe auftretenden Elektricität 4

1. Kurze Uebersicht der bisher über die elektrischen Eigenschaften der Weingeistflamme veröffentlichten Untersuchungen 4

2. Erläuterung meines Verfahrens zur Beobachtung der in und oberhalb der Flamme auftretenden Elektricität 10

3. Elektrische Spannungen auf einem in oder oberhalb der Flamme befindlichen dünnen Platinbleche 14

4. Welchen Einfluss hat die Form und Masse des über oder in der Flamme befindlichen Platins? 24

5. Welchen Einfluss hat die Temperatur des in die Flamme getauchten Körpers? 26

6. Ueber den Ursprung der in und oberhalb der Flamme beobachteten elektrischen Spannungen 28

7. Ueber die Aenderung, welche die verschiedenen Metalle durch Erhitzen in ihrer Stellung in der elektrischen Spannungsreihe erleiden 31

8. Ueber die durch die Flamme erzeugten elektrischen Ströme 36

II. Ueber die sogenannte unipolare Leitung der Weingeistflamme 39

1. Zusammenstellung der bisherigen Erfahrungen darüber 39

2. Ueber die elektrischen Spannungen der in gleicher Weise mit der Flamme verbundenen Pole 41

3. Ueber die elektrischen Spannungen der in verschiedener Weise mit der Flamme verbundenen Pole 45

4. Welchen Einfluss hat die Grösse der Berührungsflächen der Pole mit der Flamme? 49

5. Welchen Einfluss hat die Verschiedenheit des Metalles der Pole? 50

6. Welchen Einfluss hat das Glühen der Polflächen? 50

7. Sind zum Auftreten einer Verschiedenheit in der Ableitung der beiden Elektricitäten metallische Polflächen nothwendig? 51

8. Ueber die elektrischen Spannungen an den in die Flamme getauchten Polen einer Säule, wenn die Metalle der Pole selbst verschiedene Stellungen in der Spannungsreihe einnehmen 52

Ueber die Spannungen an den Polen eines nichtgeschlossenen Elementes, worin in einer Flüssigkeit ein Metall zweien anderen elektrisch verschiedenen, aber mit einander verbundenen gegenübersteht 54

9. Ueber die Spannungen an den Polen eines Elementes, wenn der eine mittelst eines Metalles in die abgeleitete Flamme und der andere zu dem Alkohol der Lampe geführt ist 57

10. Welchen Einfluss hat eine Ortsveränderung des Ableitungsdrahtes in der Flamme? 60

11. Ueber die elektrische Spannung in der Flamme, wenn von den beiden in dieselbe geführten Polen eines Elementes der eine zur Erde abgeleitet ist . . 61

12. Erklärung der bisher beschriebenen Erscheinungen 64

13. Ueber die Verschiedenheit in der Leitung elektrischer Ströme durch die Flamme bei ungleichen Polflächen 71

14. Ueber die von Andrews bezüglich der verschiedenen Leitung eines Stromes durch die Flamme gemachten Beobachtungen 76

AUSEINANDERSETZUNG

EINER ZWECKMÄSSIGEN METHODE

ZUR

BERECHNUNG DER ABSOLUTEN STÖRUNGEN

DER

KLEINEN PLANETEN.

VON

P. A. HANSEN.

DRITTE ABHANDLUNG

In dieser Abhandlung, mit welcher ich vorläufig das Thema zu schliessen gedenke, entwickele ich die Ausdrücke für die Berechnung der Störungen, die von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte abhängen, und wende sie auf die Egeria an. Es erscheinen somit hier zum ersten Male die Störungen zweiter Ordnung eines der kleinen Planeten.

Ich habe schon früher bemerkt, dass die Egeria in Bezug auf die Grösse der Störungen, welche sie erleidet, zur Mittelgattung der kleinen Planeten, wenn ich mich so ausdrücken darf, gehört, es giebt nemlich unter diesen Planeten eine Anzahl, deren Störungen geringer sind wie die der Egeria, aber es giebt auch eine Anzahl, deren Störungen grösser ausfallen müssen. Aus dem in dieser Abhandlung erhaltenen Endresultat sieht man, dass die meisten Glieder zweiter Ordnung klein sind, dass aber darunter einige sich befinden, die nicht unbeträchtlich sind, und deren Uebergehung den berechneten Ort der Egeria in nicht sehr langer Zeit merklich unrichtig machen würde. Diese Glieder sind erstlich die Säcularänderungen, d. i. die mit $t \sin \varepsilon$ und $t \cos \varepsilon$ multiplicirten Glieder, deren vom Quadrat der störenden Kraft abhängiger Theil in der Länge

$$-0'',48916\ t \sin \varepsilon - 0'',76801\ t \cos \varepsilon$$

und im Radius nahe die Hälfte davon beträgt. Da die Einheit von t hier das Julianische Jahr ist, so würde die Weglassung dieser Glieder jährlich nahe Eine Secunde Einwirkung im Maximum erreichen. Zweitens haben durch die Berücksichtigung des Quadrats der störenden Kraft die Glieder, die den kleinsten Divisor bekommen, einen nicht unwesentlichen Zuwachs erhalten, nemlich

$$\{-40'',50-0'',01829\,t\}\sin\{(1-3\mu)\varepsilon-3(c'-\mu c)\}$$
$$+\{-31,37-0.57249\,t\}\cos\{(1-3\mu)\varepsilon-3(c'-\mu c)\}$$
$$+\{\ \ 19.66+0.01627\,t\}\sin\{(2-3\mu)\varepsilon-3(c'-\mu c)\}$$
$$+\{\ \ 25,37+0.06468\,t\}\cos\{(2-3\mu)\varepsilon-3(c'-\mu c)\}.$$

Der Coefficient des ersten dieser Argumente hat also einen Zuwachs von ohngefähr einer Minute bekommen, und die jährliche Aenderung desselben übersteigt eine halbe Secunde; der Zuwachs des Coefficienten des zweiten Arguments beträgt ohngefähr eine halbe Minute.

Es scheint im Ganzen aus diesen Untersuchungen hervor zu gehen, dass es unter den kleinen Planeten nur sehr wenige giebt, für welche man das Quadrat der störenden Kraft ganz übergehen kann, wenn man ein nicht allzu ungenaues Resultat erhalten will, allein es wird unter denselben auch nur wenige geben, für welche es absolut nothwendig wird, die Glieder zweiter Ordnung mit möglichster Ausführlichkeit zu berechnen. Für diejenigen der kleinen Planeten, die dem Jupiter am Nächsten kommen können, werden wohl auch einige der vom Cubus der störenden Kraft abhängige Glieder merkliche Werthe bekommen, man wird die Argumente, welchen diese Glieder angehören, leicht erkennen können, und nach den Grundsätzen, die in diesen Abhandlungen überhaupt massgebend sind, wenigstens die grösseren Theile derselben ohne grosse Mühe erhalten können.

Man wird in dieser Abhandlung finden, dass ich bei der Berechnung der Störungen zweiter Ordnung der Egeria in den rein periodischen Gliedern allgemein die dritte Decimale der Secunde berücksichtigt habe, bei den Gliedern, welche die kleinsten Divisoren erhalten, habe ich die Berechnung der Coefficienten, vor den Integrationen, bis auf die fünfte, bez. die vierte Decimale der Secunde, und bei den Gliedern die mit der Zeit selbst multiplicirt sind bis zur fünften Decimale einschliesslich durchgeführt.

Das Volumen Papiers, welches zur Berechnung der Störungen zweiter Ordnung der Egeria gedient hat, ist sehr wenig grösser wie das Volumen, welches zur Berechnung der Störungen erster Ordnung verwandt worden ist, und ich bin geneigt hieraus den Schluss zu ziehen, dass die Berechnung der Störungen zweiter Ordnung nicht viel mehr Zeit erfordert habe, wie die der ersten Ordnung. Einen anderen Massstab für die Angabe des Verhältnisses dieser beiden Zeiträume habe ich nicht, da die Berechnung der Störungen zweiter

Ordnung der Egeria, die ich schon vor mehreren Jahren angefangen habe, oftmals durch andere Arbeiten unterbrochen worden ist, und ich die Anzahl der Tage, die ich in jedem Abschnitt darauf verwandt habe, unterlassen habe anzumerken.

Ich halte nicht für nothwendig, dass man für jeden der kleinen Planeten die Störungen zweiter Ordnung mit solcher Ausführlichkeit berechnen müsse, wie hier aus dem Grunde geschehen ist, weil ich das erste Beispiel dieser Rechnung aufstelle, aber jedenfalls muss die Abkürzung, die man anwendet, so beschaffen sein, dass dadurch nicht merkliche Glieder verloren gehen. Ein einfaches Mittel diese Bedingung nicht zu verletzen, und dennoch auf eine weit kürzere Rechnung zu kommen, besteht darin, dass man die ganze Rechnung auf eine kleinere Anzahl von Decimalen der Secunde ausdehnt, wie in dieser Abhandlung geschehen ist. Wenn man allenthalben nur Eine Decimale weniger ansetzt wie hier, so kürzt sich die ganze Rechnung schon bedeutend ab, und würde man sich mit zwei Decimalen weniger begnügen wollen, so würde die Rechnung sehr kurz ausfallen.

Diese Abhandlung ist in folgende Abschnitte eingetheilt:

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über das hier entwickelte Verfahren. Art. 1—6.

§. 2. Ableitung eines Ausdrucks zur Berechnung der von den Quadraten und den höheren Potenzen der störenden Kräfte abhängigen Glieder der Ungleichheiten sehr langer Periode. Art. 7—9.

§. 3. Analytische Entwickelung der Hauptbedingungsgleichung für die von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Glieder.

Beweis zweier Sätze, die bei der Berechnung der von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Glieder angewandt werden. Art. 10—33.

§. 4. Entwickelung der Hülfsgrössen für die Berechnung der vom Quadrat der störenden Masse abhängigen Glieder, nebst Anwendung auf die Egeria. Art. 34—48.

§. 5. Berechnung der für die vom Quadrat der störenden Masse abhängigen Glieder erforderlichen Producte. Art. 49—60.

§. 6. Integration der im vorigen § berechneten Glieder. Art. 61—81.

§. 7. Berechnung der von den Producten der störenden Massen abhängigen Glieder

Bestimmung der numerischen Werthe der willkührlichen Constanten der zweiten Annäherung. Art. 82—94.

§. 8. Verwandlung der elliptischen Elemente. Art. 95—109.

§. 9. Entwickelung der Ausdrücke für die Verbesserungen der Störungscoefficienten, die aus der Verbesserung der der Rechnung zu Grunde gelegten osculirenden Elemente entstehen.

Anwendung auf die im Vorhergehenden berechneten Störungen. Art. 110—132.

§. 10. Verwandlung der von osculirenden Elementen abhängigen Störungen in solche die von den mittleren Elementen abhängen.

Bestimmung der mittleren Elemente. Art. 133—150.

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über das hier entwickelte Verfahren.

1.

Das Verfahren, welches ich zur Berechnung der Störungen angegeben und in diesen Abhandlungen mit besonderer Rücksicht auf die kleinen Planeten entwickele, ist eine Methode der Veränderung der willkührlichen Constanten, und die Methode der Veränderung der willkührlichen Constanten überhaupt ist nach dem Urtheil unserer grössten Mathematiker zur Berechnung der Störungen die geeigneteste. Der Grund hievon ist leicht zu erkennen, er liegt darin, dass in dieser Methode die Integrationen auf die möglichst einfachen zurück geführt werden, während in den auf Differentialgleichungen von Coordinaten beruhenden Methoden die Integrationen gehäuft sind, oder, mit anderen Worten, auf eine zusammengesetztere Art eintreten. Die Folge dieser Häufung der Integrationen tritt in den Anwendungen namentlich in den Gliedern, die kleine Divisoren erhalten, nachtheilig hervor, und verursacht dass man in den Differentialen einen grösseren Theil der Coefficienten mit mehr Decimalen berechnen muss wie in der Anwendung der Methode der Veränderung der willkührlichen Constanten, wenn man im Resultat dieselbe Genauigkeit erlangen will. Ein anderer Uebelstand der auf Differentialgleichungen von Coordinaten gegründeten Verfahren besteht darin, dass man auf Aggregate von schwächer convergirenden Reihen geführt wird.

Mein Verfahren unterscheidet sich von der gewöhnlichen Methode

der Veränderung der willkührlichen Constanten dadurch, dass ich die Anzahl der Veränderlichen auf die möglichst geringe zurück geführt, und den Uebergang zu den Coordinaten, welcher schliesslich bei jedem Verfahren bewirkt werden muss, auf die einfachste Weise ausgeführt habe. Durch die Wahl der Coordinaten habe ich bewirkt, dass nur in Einer derselben die Glieder vorkommen, die eine doppelte Integration erfordern, und da hieraus vorzugsweise die grossen Ungleichheiten erstehen, so sind diese auch nur in der einen Coordinate enthalten; es sind daher die Störungen überhaupt, so viel es möglich ist, auf diese Eine Coordinate, die mittlere Länge oder mittlere Anomalie, zurück gedrängt. Es ist noch anzuführen, dass in meiner Methode durch die Wahl der Coordinaten und der unabhängigen Veränderlichen die unendlichen Reihen durch welche die Störungen ausgedrückt werden auf eine weit grössere Convergenz gebracht worden sind, wie in irgend einer anderen der bis jetzt bekannten Methoden.

2.

Der Ausdruck der Länge hängt ursprünglich von vier elliptischen Elementen ab, nemlich von der mittleren Länge zur Zeitepoche, der grossen Achse, der Excentricität und der Länge des Perihels, und der Radius Vector von drei, nemlich von der grossen Achse, der Excentricität und der Länge des Perihels. In dem hier erklärten Verfahren kann W_0, von welcher Function die Längenstörungen abhängen, auf folgende Form gebracht werden,

$$W_0 = \Xi + \Upsilon(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e) + \Psi\sin\eta$$

und hängt also nur von den drei Elementen Ξ, Υ und Ψ ab. Die Störungen des Radius hängen von dem Differential von W_0 nach η ab, und da

$$\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right) = -\Upsilon\sin\eta + \Psi\cos\eta$$

ist, so hängen diese Störungen hier nur von den zwei Elementen Υ und Ψ ab. Für die Störungen der Breite haben wir hier den Ausdruck

$$R_0 = P\sin\eta - Q(\cos\eta - e)$$

und diese Störungen hängen also hier von zwei Elementen ab, wie in den anderen Methoden. Aber man erkennt hieraus, dass bei diesem Verfahren nur fünf Elemente im Ganzen vorkommen, während die Gesammtheit der Störungen ursprünglich von sechs elliptischen Elementen

abhängt, dass folglich in diesem Verfahren Ein Element eliminirt ist. Ausserdem ist in den Ausdrücken dieser Elemente eine Veränderliche eliminirt, denn die Ausdrücke der Artt. (43) (I) und (48) (I) für $d\delta W_0$ und $d\delta R_0$ zeigen, dass diese Grössen nur von acht Veränderlichen abhängen, während die Veränderungen der elliptischen Elemente ursprünglich von neun Veränderlichen abhängen, nemlich entweder von den drei Coordinaten und den drei Componenten der Geschwindigkeit des gestörten, und den drei Coordinaten des störenden Planeten, oder von den sechs elliptischen Elementen des gestörten, und den drei Coordinaten des störenden Planeten.

Der Uebergang von den gestörten Elementen zu den Coordinaten wird hier auf die einfachste Art bewirkt. In der ersten Annäherung bekommt man durch blose Addition der drei zu jedem Argument gehörigen Glieder von W_0 schon das Differential der Längenstörungen in Bezug auf die Zeit, und in der zweiten Annäherung erhält man dasselbe durch die Addition der je drei bez. Glieder von δW_0 und die Hinzufügung der beiden Glieder

$$\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r} + \nu^2$$

Das Differential der Störungen des Radius ergiebt sich in der ersten Annäherung durch die Addition der zwei zu jedem Argument gehörigen Glieder des Differentials von W_0 nach η, und in der zweiten Annäherung durch die Addition der zwei analogen Glieder vom Differential von δW_0 und durch Hinzufügung der beiden Glieder

$$\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right)\frac{an\delta z}{r} - \left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}\cdot\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

Die Störungen der Breite ergeben sich ähnlicher Weise in der ersten Annäherung durch die Addition der drei bez. Glieder von R_0, und in der zweiten Annäherung durch Addition der drei bez. Glieder von δR_0 und Hinzufügung des Gliedes

$$\left(\frac{dR_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}$$

3.

Die hier vorkommenden Elemente lassen sich leicht durch die bekannten elliptischen Elemente ausdrücken. Der im vor. Art. aufgestellte Ausdruck für W_0 giebt

$$W_0 = \Xi + \Upsilon\left(\frac{\varrho}{a_0}\cos\omega + \frac{3}{2}e_0\right) + \Psi\frac{\varrho\sin\omega}{a_0\cos\varphi_0}$$

wo a_0, e_0 und φ_0 wieder unveränderliche Elemente bedeuten. Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (39) (I), so ergiebt sich

$$\Xi = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 - 3e_0\frac{h}{h_0}\xi$$
$$\Upsilon = 2\frac{h}{h_0}\xi, \qquad \Psi = 2\frac{h}{h_0}\eta\cos\varphi_0$$

woraus durch die im Art. 25(I) gegebenen Ausdrücke für ξ und η

$$\Xi = 2\delta\frac{h}{h_0} - \delta\frac{h_0}{h} - \frac{3e_0 h}{\cos^2\varphi_0 h_0}\{e\cos(\chi-\pi_0) - e_0\}$$
$$\Upsilon = \frac{2}{\cos^2\varphi_0}\frac{h}{h_0}\{e\cos(\chi-\pi_0) - e_0\}$$
$$\Psi = \frac{2}{\cos\varphi_0}\frac{h}{h_0}e\sin(\chi-\pi_0)$$

folgt, wo ich wie früher $\delta\frac{h}{h_0}$ für $\frac{h}{h_0} - 1$, und $\delta\frac{h_0}{h}$ für $\frac{h_0}{h} - 1$ geschrieben habe. Statt der im vor. Art. mit P und Q bezeichneten Elemente können wir ohne Weiteres die im Art. 9(I) mit p und q bezeichneten nehmen, und haben also

$$p = \sin i\sin(\sigma-\theta_0)$$
$$q = \sin i\cos(\sigma-\theta_0) - \sin i_0$$

Dieses sind die strengen Ausdrücke für die fünf in der hier entwickelten Methode vorkommenden Elemente, in welchen

$$h = \frac{an}{\cos\varphi} = \frac{k}{\sqrt{a.\cos\varphi}}$$

ist, wenn k die Gaussische Constante bedeutet. Dies Element h ist also der Quadratwurzel aus dem Parameter der Bahn des gestörten Planeten umgekehrt proportional. Wenn man blos die Glieder beibehält, die von der ersten Potenz der störenden Kräfte abhängen, so werden diese Relationen einfacher. Indem man das Zeichen δ blos auf diese erste Potenz bezieht, wird

$$\delta\frac{h_0}{h} = -\delta\frac{h}{h_0} = \tfrac{1}{2}\delta\frac{a}{a_0} - \frac{\delta e}{\cos^2\varphi_0}$$
$$e\cos(\chi-\pi_0) - e_0 = \delta e$$
$$e\sin(\chi-\pi_0) \quad\; = e_0\delta\chi$$

und man bekommt daher

$$\Xi = -\tfrac{3}{2}\delta\frac{a}{a_0}$$
$$\Upsilon = \frac{2\delta e}{\cos^2\varphi_0}$$
$$\Psi = \frac{2e_0\delta\chi}{\cos\varphi_0}$$
$$p = \sin i_0\delta\sigma$$
$$q = \cos i_0\delta i$$

woraus man erkennt, dass ohne Rücksicht auf die Quadrate und höheren Potenzen der störenden Kräfte

Ξ den Störungen der grossen Achse
Υ den - der Excentricität
Ψ den - der Länge des Perihels
p den - der Länge des Knotens
q den - der Neigung

proportional ist.

4.

Aus den vorhergehenden Abhandlungen ist zu erkennen, dass diese Elemente von den in

$$n\delta z,\ \nu,\ \frac{h}{h_0},\ u \text{ und } \frac{du}{d\varepsilon}$$

enthaltenen Störungen abhängig gemacht worden sind, — der Coordinaten des störenden Planeten nicht zu gedenken, — während sonst in der Methode der Veränderung der willkührlichen Constanten die elliptischen Elemente von ihren eigenen Störungen abhängig gemacht werden. Auch hier kann man diese Abhängigkeit darthun, muss aber zu dem Ende das eliminirte Element wieder einführen. Ich werde zeigen wie man dieses bewirken kann, dabei aber nur auf die ersten Potenzen der Veränderungen Rücksicht nehmen, und der Kürze wegen die Elemente p und q von der Umformung ausschliessen. Die Gleichung (32) (I) giebt nach Einführung der Elemente Ξ, Υ und Ψ strenge

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \Xi + \Upsilon\left(\frac{\bar{r}}{a_0}\cos\bar{f} + \tfrac{3}{2}e_0\right) + \Psi\frac{\bar{r}\sin\bar{f}}{a_0\cos\varphi_0} + \frac{h_0}{h}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2$$

und die Gleichung (33) (I) ist

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h(1+\nu)^2}$$

Bezeichnen wir nun die hier zu ermittelnden Variationen mit einem den Grössen vorgesetzten Δ, so geben diese beiden Gleichungen

$$\Delta\frac{dz}{dt} = \Delta\Xi + \Delta\Upsilon\left(\frac{\bar{r}\cos\bar{f}}{a_0} + \tfrac{3}{2}e_0\right) + \Delta\Psi\frac{\bar{r}\sin\bar{f}}{a_0\cos\varphi_0}$$
$$+ \left\{-\Upsilon\frac{\sin\bar{f}}{\cos\varphi_0} + \Psi\frac{\cos\bar{f}+e_0}{\cos\varphi_0}\right\}\Delta n\delta z + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2\Delta\frac{h_0}{h} + \frac{2h_0\nu}{h(1+\nu)^3}\Delta\nu$$
$$\Delta\frac{\delta z}{dt} = \frac{1}{(1+\nu)^2}\Delta\frac{h_0}{h} - \frac{2h_0}{h(1+\nu)^3}\Delta\nu$$

woraus nach der Elimination von $\Delta\nu$

$$\Delta \frac{d\delta z}{dt} = \frac{\Delta \Xi}{1+\nu} + \frac{\Delta \Upsilon}{1+\nu}\left(\frac{\overline{r}\cos\overline{f}}{a_0} + \tfrac{3}{2}e_0\right) + \frac{\Delta \Psi}{1+\nu}\frac{\overline{r}\sin\overline{f}}{a_0\cos\varphi_0}$$
$$- \left\{\Upsilon\frac{\sin\overline{f}}{\cos\varphi_0} - \Psi\frac{\cos\overline{f}+e_0}{\cos\varphi_0}\right\}\frac{\Delta nz}{1+\nu} + \frac{\nu}{(1+\nu)^2}\Delta\frac{h_0}{h}$$

folgt. Aus dem Differential der Gleichung (36) (I) bekommt man nach der Substitution des Ausdrucks für W strenge

$$2\frac{d\nu}{n_0 dt} = \Upsilon\frac{\sin\overline{f}}{\cos\varphi_0} - \Psi\frac{\cos\overline{f}+e_0}{\cos\varphi_0}$$

und die strengen Ausdrücke des vor. Art. geben

$$\Xi + \tfrac{3}{2}e_0\Upsilon = 2\delta\frac{h}{h_0} - \delta\frac{h_0}{h}$$

wovon die Variation

$$\Delta\frac{h_0}{h} = -\frac{\Delta\Xi + \frac{3}{2}e_0\Delta\Upsilon}{1+2\left(\frac{h_0}{h}\right)^2}$$

ist. Substituirt man diese beiden Gleichungen, und setzt zur Abkürzung

$$J = -\frac{2\,d\nu}{n_0(1+\nu)\,dt}$$
$$K = \frac{1}{1+\nu} - \frac{\nu}{(1+\nu)^2}\frac{1}{1+2\left(\frac{h_0}{h}\right)^2}$$
$$L = \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\overline{r}\cos\overline{f}}{a_0} + \tfrac{3}{2}e_0\right) - \frac{3e_0\nu}{2(1+\nu)^2}\frac{1}{1+2\left(\frac{h_0}{h}\right)^2}$$
$$M = \frac{1}{1+\nu}\frac{\overline{r}\sin\overline{f}}{a_0\cos\varphi_0}$$

so wird

$$\Delta\frac{dz}{dt} = J\Delta nz + K\Delta\Xi + L\Delta\Upsilon + M\Delta\Psi$$

Vermöge der Gleichung

$$\Delta\frac{dz}{dt} = \frac{1}{(1+\nu)^2}\Delta\frac{h_0}{h} - \frac{2h_0}{h(1+\nu)^3}\Delta\nu$$

bekommen wir zuerst

$$\Delta\frac{dW_0}{d\varepsilon_0} = A\Delta nz + B_1\Delta\frac{dz}{dt} + C_1\Delta\frac{h_0}{h}$$

wo

$$B_1 = -B\frac{h(1+\nu)^3}{2h_0};\quad C_1 = B\frac{h(1+\nu)}{2h_0} - C\left(\frac{h}{h_0}\right)^2$$

ist, und A, B, und C dieselbe Bedeutung haben wie im Art. 43 (I). Eliminiren wir hieraus $\Delta\frac{dz}{dt}$ und $\Delta\frac{h_0}{h}$ durch die eben entwickelten Gleichungen, so wird

$$\Delta\frac{dW_0}{d\varepsilon_0} = N\Delta nz + P\Delta\Xi + Q\Delta\Upsilon + R\Delta\Psi$$

wo durch folgende Gleichungen

$$N = A + JB_1$$

$$P = KB_1 - \frac{C_1}{1+2\left(\frac{h_0}{h}\right)^2}$$

$$Q = LB_1 - \frac{\frac{3}{2}e_0 C_1}{1+2\left(\frac{h_0}{h}\right)^2}$$

$$R = MB_1$$

die Coefficienten gegeben sind.

5.

Um aus den eben gefundenen Gleichungen Δnz eliminiren zu können müssen wir das Element wieder einführen, welches eliminirt worden ist, und wenn wir dieses mit X bezeichnen, so können wir die folgende Gleichung dafür aufstellen

$$n\delta z = X + \Upsilon \frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2\varphi_0}{2a_0^2 \cos\varphi_0} \sin f_0 + \Psi \frac{r_0^2}{2a_0^2 e_0}$$

wovon die Variation

$$\Delta nz = \Delta X + \Delta\Upsilon \frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2\varphi_0}{2a_0^2 \cos\varphi_0} \sin f_0 + \Delta\Psi \frac{r_0^2}{2a_0^2 e_0}$$

ist. Eliminirt man hiermit Δnz aus den beiden im vor. Art. entwickelten Gleichungen, so wird

$$\Delta \frac{dz}{dt} = J\Delta X + K\Delta\Xi + L_1\Delta\Upsilon + M_1\Delta\Psi$$

$$\Delta \frac{dW_0}{d\varepsilon} = N\Delta X + P\Delta\Xi + Q_1\Delta\Upsilon + R_1\Delta\Psi$$

wo

$$L_1 = L + J\frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2\varphi_0}{2a_0^2 \cos\varphi_0} \sin f_0$$

$$M_1 = M + J\frac{r_0^2}{2a_0^2 e_0}$$

$$Q_1 = Q + N\frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2\varphi_0}{2a_0^2 \cos\varphi_0} \sin f_0$$

$$R_1 = R + N\frac{r_0^2}{2a_0^2 e_0}$$

Differentiiren wir die obige Relation zwischen $n\delta z$ und X in Bezug auf t, so wird wegen der Gleichung $\frac{d\varepsilon_0}{dt} = \frac{a_0}{r_0} n_0$,

$$\frac{dX}{d\varepsilon_0} = \frac{r_0}{a_0}\frac{d\delta z}{dt} - \Upsilon\frac{r_0}{a_0}\left(\frac{r_0}{a_0}\cos f_0 + \tfrac{3}{2}e_0\right) - \Psi\frac{r_0}{a_0}\frac{r_0 \sin f_0}{a_0 \cos\varphi_0}$$
$$- \frac{d\Upsilon}{d\varepsilon_0}\frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2\varphi_0}{2a_0^2 \cos\varphi_0} \sin f_0 - \frac{d\Psi}{d\varepsilon_0}\frac{r_0^2}{2a_0^2 e_0}$$

und die Variation davon wird

$$\Delta\frac{dX}{d\varepsilon_0} = \frac{r_0}{a_0}\Delta\frac{dz}{dt} - \Delta\Upsilon.\frac{r_0}{a_0}\left(\frac{r_0}{a_0}\cos f_0 + \tfrac{3}{2}e_0\right) - \Delta\Psi.\frac{r_0^2 \sin f_0}{a_0^2 \cos\varphi_0}$$
$$- \Delta\frac{d\Upsilon}{d\varepsilon_0}\cdot\frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2\varphi_0}{2a_0^2 \cos\varphi_0} \sin f_0 - \Delta\frac{d\Psi}{d\varepsilon_0}\cdot\frac{r_0^2}{2a_0^2 e_0}$$

6.

Der Ausdruck für $\frac{dW_0}{d\varepsilon_0}$ nimmt folgende Form an,

$$\frac{dW_0}{d\varepsilon_0} = \frac{d\Xi}{d\varepsilon_0} + \frac{dT}{d\varepsilon_0}(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e_0) + \frac{d\Psi}{d\varepsilon_0}\sin\eta$$

und die Variation davon wird also

$$\Delta\frac{dW_0}{d\varepsilon_0} = \Delta\frac{d\Xi}{d\varepsilon_0} + \Delta\frac{dT}{d\varepsilon_0}(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e_0) + \Delta\frac{d\Psi}{d\varepsilon_0}\sin\eta$$

Um diesen mit dem im Art. 5 abgeleiteten Ausdruck derselben Grösse vergleichen zu können, müssen wir die Form der dort mit N, P, Q und R bezeichneten Coefficienten kennen lernen. Jeder derselben kann erstlich auf ähnliche Formen hingeführt werden, wie die für T, X, etc. im §. 5 (I) gegebenen, und durch die Reihenentwickelungen der Differentialquotienten der Störungsfunction und der Anwendung von solchen Entwickelungen, wie die im §. 4 (II) erklärten können sie auf folgende Form gebracht werden,

$$\begin{aligned}
N = {} & \Sigma\Gamma_s \sin\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} + \Sigma\Gamma_c \cos\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
& + \Sigma\Lambda_s \sin\{-\eta + (i-i'\mu)\varepsilon + U\} + \Sigma\Lambda_c \cos\{-\eta + (i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
& + \Sigma\Pi_s \sin\{\eta + (i-i'\mu)\varepsilon + U\} + \Sigma\Pi_c \cos\{\eta + (i-i'\mu)\varepsilon + U\}
\end{aligned}$$

wo $U = -i'(c-\mu c')$ ist. Von dieser Form kann man auf die folgende übergehen

$$N = \alpha + \beta(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e_0) + \gamma\sin\eta$$

denn die Functionen α, β und γ hängen durch die folgenden Gleichungen von den Gliedern des vorhergehenden Ausdrucks ab,

$$\begin{aligned}
\alpha = {} & \Sigma\{\Gamma_s - \tfrac{e}{2}\Lambda_s - \tfrac{e}{2}\Pi_s\}\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
& + \Sigma\{\Gamma_c - \tfrac{e}{2}\Lambda_c - \tfrac{e}{2}\Pi_c\}\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
\beta = {} & \Sigma\{\Lambda_s + \Pi_s\}\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
& + \Sigma\{\Lambda_c + \Pi_c\}\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
\gamma = {} & -\Sigma\{\Lambda_s - \Pi_s\}\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
& + \Sigma\{\Lambda_c - \Pi_c\}\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\}
\end{aligned}$$

Auch kann man diese letztere Form erhalten ohne die erstere vorangehen zu lassen. Eben so bekommt man auch

$$\begin{aligned}
P &= \alpha_1 + \beta_1(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e_0) + \gamma_1\sin\eta \\
Q_1 &= \alpha_2 + \beta_2(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e_0) + \gamma_2\sin\eta \\
R_1 &= \alpha_3 + \beta_3(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e_0) + \gamma_3\sin\eta
\end{aligned}$$

Substituirt man nun diese Ausdrücke in den Ausdruck von $\Delta \frac{dW_0}{d\varepsilon_0}$ des Art. 5, und vergleicht ihn alsdann mit dem in diesem Art. gegebenen Ausdruck, so bekommt man sogleich

$$\Delta \frac{d\Xi}{d\varepsilon_0} = \alpha \Delta X + \alpha_1 \Delta \Xi + \alpha_2 \Delta \Upsilon + \alpha_3 \Delta \Psi$$
$$\Delta \frac{d\Upsilon}{d\varepsilon_0} = \beta \Delta X + \beta_1 \Delta \Xi + \beta_2 \Delta \Upsilon + \beta_3 \Delta \Psi$$
$$\Delta \frac{d\Psi}{d\varepsilon_0} = \gamma \Delta X + \gamma_1 \Delta \Xi + \gamma_2 \Delta \Upsilon + \gamma_3 \Delta \Psi$$

und substituirt man die Ausdrücke für $\Delta \frac{dz}{dt}$, $\Delta \frac{d\Upsilon}{d\varepsilon_0}$ und $\Delta \frac{d\Psi}{d\varepsilon_0}$ in den Ausdruck für $\Delta \frac{dX}{d\varepsilon_0}$ des vor. Art., so wird

$$\Delta \frac{dX}{d\varepsilon_0} = \theta \Delta X + \theta_1 \Delta \Xi + \theta_2 \Delta \Upsilon + \theta_3 \Delta \Psi$$

wo

$$\theta = \frac{r_0}{a_0} J - \beta \frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2 \varphi_0}{2 a_0^2 \cos \varphi_0} \sin f_0 - \gamma \frac{r_0^2}{2 a_0^2 e_0}$$
$$\theta_1 = \frac{r_0}{a_0} K - \beta_1 \frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2 \varphi_0}{2 a_0^2 \cos \varphi_0} \sin f_0 - \gamma_1 \frac{r_0^2}{2 a_0^2 e_0}$$
$$\theta_2 = \frac{r_0}{a_0} L_1 - \frac{r_0}{a_0} \left(\frac{r_0}{a_0} \cos f_0 + \tfrac{3}{2} e_0 \right) - \beta_2 \frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2 \varphi_0}{2 a_0^2 \cos \varphi_0} \sin f_0 - \gamma_2 \frac{r_0^2}{2 a_0^2 e_0}$$
$$\theta_3 = \frac{r_0}{a_0} M_1 - \frac{r_0^2 \sin f_0}{a_0^2 \cos \varphi_0} - \beta_3 \frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2 \varphi_0}{2 a_0^2 \cos \varphi_0} \sin f_0 - \gamma_3 \frac{r_0^2}{2 a_0^2 e_0}$$

Hiemit sind die Variationen der Differentiale der Elemente X, Ξ, Υ und Ψ in Function der Variationen dieser Elemente selbst dargestellt.

In der Berechnung der Störungen der kleinen Planeten wende ich zwar diese Formeln nicht an, aber ich werde vielleicht später einen Fall veröffentlichen, in welchem ich sie vor Jahren schon angewandt habe.

§. 2. Ableitung eines Ausdrucks zur Berechnung der von den Quadraten und den höheren Potenzen der störenden Kräfte abhängigen Glieder der Ungleichheiten sehr langer Periode.

7.

Es ist aus dem Vorhergehenden leicht einzusehen, dass der Theil irgend einer Ungleichheit, welcher das Quadrat des durch die Integration erzeugten Divisors bekommt, blos von dem im vor. § mit Ξ bezeichneten Element abhängt, und wenn die Periode der Ungleichheit

sehr lang, und folglich der Divisor sehr klein ist, so ist dieser Theil der Ungleichheit der erheblichste. Man kann zwar durch das Verfahren dessen Grundformeln ich in der Abhandlung (I) abgeleitet habe, und welches ich weiter unten ausführlich entwickeln werde, in jedem Falle den von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Theil aller Ungleichheiten berechnen, allein wenn der Divisor sehr klein ist, so kann namentlich für die Glieder, die das Quadrat desselben bekommen, die Rechnung umständlich werden, weil man in diesem Falle sich genöthigt sehen wird viele Glieder hinzuzuziehen, und die betreffenden Glieder erster Ordnung in Bezug auf die Massen mit mehr als zu den übrigen Zwecken erforderlicher Genauigkeit zu berechnen. Ich werde indess hier zeigen, dass das Element Ξ in dem Falle, wo der störende Planet ein oberer ist, in seinen grösseren Theilen an sich integrabel ist, und diese also im Endresultat in der That nur den kleinen Divisor in der ersten Potenz erhalten, während die Theile die sich nicht integriren lassen zu den kleineren gehören. Da der Jupiter, welcher auf die kleinen Planeten die grösste störende Kraft ausübt, in Bezug auf diese ein oberer ist, so kann diese Formel, wenn in der Theorie der kleinen Planeten sehr kleine Divisoren vorkommen sollten, die grossen Ungleichheiten angehören, gute Dienste leisten. Bei der Berechnung der Störungen der Egeria habe ich diesen Ausdruck nicht angewandt, weil der kleinste Divisor, der dort in den Jupiterstörungen vorkommt, nicht kleiner ist als dass sich das davon abhängige Glied immer noch durch die allgemeinen, weiter unten zu entwickelnden Ausdrücke ohne Unbequemlichkeit berechnen lässt, bei der Berechnung der Mondstörungen hat mir aber dieser Ausdruck sehr gute Dienste geleistet.

8.

Erheben wir von den Gleichungen

$$\Xi = 2\delta\frac{h}{h_0} - \delta\frac{h_0}{h} - \frac{3e_0}{\cos^2\varphi_0}\frac{h}{h_0}\{e\cos(\chi-\pi_0) - e_0\}$$

$$\Upsilon = \frac{2}{\cos^2\varphi_0}\frac{h}{h_0}\{e\cos(\chi-\pi_0) - e_0\}$$

$$\frac{\Psi}{\cos\varphi_0} = \frac{2}{\cos^2\varphi_0}\frac{h}{h_0}e\sin(\chi-\pi_0)$$

des Art. 3 die beiden letzten ins Quadrat und addiren, so ergiebt sich eine Gleichung, die sich leicht wie folgt stellen lässt,

$$\frac{e_0}{\cos^2\varphi_0}\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 e\cos(\chi-\pi_0)=-\tfrac{1}{8}\Upsilon^2\cos^2\varphi_0-\tfrac{1}{8}\Psi^2+\frac{e^2}{2\cos^2\varphi_0}\left(\frac{h}{h_0}\right)^2+\frac{e_0^2}{2\cos^2\varphi_0}\left(\frac{h}{h_0}\right)^2$$

eliminirt man hiemit $\cos(\chi-\pi_0)$ aus der ersten, so bekommt man leicht

$$\frac{h}{h_0}\Xi=-\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}\frac{h^2\cos^2\varphi}{h_0^2\cos^2\varphi_0}+\tfrac{1}{2}\left(\delta\frac{h}{h_0}\right)^2+\tfrac{3}{8}\Upsilon^2\cos^2\varphi_0+\tfrac{3}{8}\Psi^2$$

Es ist aber

$$\frac{h^2\cos^2\varphi}{h_0^2\cos^2\varphi_0}=\frac{a_0}{a}$$

Wenn wir daher $\frac{a_0}{a}=1+\delta\frac{a_0}{a}$ setzen, so wird

$$\Xi=\tfrac{3}{2}\delta\frac{a_0}{a}-\Xi\delta\frac{h}{h_0}+\tfrac{1}{2}\left(\delta\frac{h}{h_0}\right)^2+\tfrac{3}{8}(\Upsilon^2\cos^2\varphi_0+\Psi^2)$$

wo mit Ausnahme des ersten Gliedes alle Glieder rechter Hand Grössen zweiter Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte sind. Nun ist aber

$$\delta\frac{a_0}{a}=-2a_0\int n\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt$$

wo wieder g die mittlere Anomalie bedeutet, und

$$n\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt=\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)dv+\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)dr$$

Da ferner

$$d\Omega=\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)dv+\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)dr+\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)dv'+\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right)dr'$$

ist, so wird

$$\delta\frac{a_0}{a}=-2a_0\Omega+2\int a_0\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)dv'+2\int a_0r'\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right)d.\log r'$$

Da die Ausdrücke für dv' und $d\log r'$ mit n' multiplicirt sind, und wenn der störende Planet ein oberer ist $n'<n$ ist, so sind die Glieder, welche hier unter den Integralzeichen stehen, in diesem Falle immer kleiner wie die Glieder ausserhalb dieses Zeichens. Da ferner die kleinen Planeten keine merklichen Störungen auf die übrigen ausüben, so darf man in der Theorie, die uns hier beschäftigt, für dv' und $d\log r'$ die Werthe substituiren, die sie in der elliptischen Bewegung haben. Da ferner $d\log r'$ von der Ordnung der Excentricität e', und diese in unserem Sonnensystem bei den Planeten die sehr merkliche Störungen ausüben eine kleine Grösse ist, so ist aus diesem Grunde das letzte Glied des vorstehenden Ausdrucks viel kleiner wie das vorhergehende, aber dieses kann, wie ich jetzt zeigen werde, auch in seinem grösseren Theile vom Integralzeichen befreit werden.

9.

Aus Art. 34 (I) folgt leicht dass

$$\left(\frac{d\Omega}{d\Pi}\right)\cos J+\left(\frac{d\Omega}{d\Pi'}\right)=\sin J\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)r\cos(f+\Pi)$$

oder da $f+\Pi=(v-\theta_0)+(\Pi-\pi_0+\theta_0)$ ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\Omega}{d\Pi}\right)\cos J+\left(\frac{d\Omega}{d\Pi'}\right)&=\cos(\Pi-\pi_0+\theta_0)\sin J\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)r\cos(v-\theta_0)\\&\quad-\sin(\Pi-\pi_0+\theta_0)\sin J\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)r\sin(v-\theta_0)\\&=\cos(\Pi-\pi_0-\theta_0)\frac{\sin J}{h}\frac{dq}{\cos i dt}-\sin(\Pi-\pi_0+\theta_0)\frac{\sin J}{h}\frac{dp}{\cos i dt}\end{aligned}$$

zufolge der Gleichungen (22) (I). Uebergehen wir aber in dem Ausdruck von dJ des Art. (33) (I) die kleinen von dp' und dq' abhängigen Glieder, die hier nie merklichen Einfluss haben können, und erwägen dass

$$\left(\frac{d\Omega}{d\Pi}\right)=\left(\frac{d\Omega}{dv}\right);\quad\left(\frac{d\Omega}{d\Pi'}\right)=\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)$$

so wird die vorstehende Gleichung

$$\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)=-\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)\cos J+\frac{\sin J}{h}\frac{dJ}{dt}$$

und da $d\frac{1}{h}=\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)dt$ ist, so bekommen wir hieraus

$$\int\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)dt=-\frac{\cos J}{h}$$

Vermittelst dieser Gleichung giebt nun die partielle Integration

$$\int\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)dv'=-\frac{\cos J}{h}\frac{dv'}{dt}+\int\frac{\cos J}{h}\frac{d^2v'}{dt}$$

und da d^2v' von der Ordnung e' ist, so ist hier das grösste Glied vom Integralzeichen befreit.

Um im Endresultat dieser Integration die wesentliche Eigenschaft der unter dem Integralzeichen stehen gebliebenen Glieder hervor zu heben, will ich bei der Substitution der eben entwickelten Ausdrücke in den Ausdruck für Ξ noch die folgenden Gleichungen anwenden,

$$1=h_0\frac{\cos q_0}{a_0n_0},\quad\mu=\frac{n'}{n_0},\quad d^2v'=-2n'^2e'\frac{a'^3}{r'^3}\sin f'dt^2,$$

$$d\log r'=n'e'\frac{a'\sin f'}{r'\cos\varphi'}dt,\quad dv'=n'\frac{a'^2}{r'^2}\cos\varphi'dt$$

und wir bekommen daher schliesslich

$$\begin{aligned}\Xi=&-3a\Omega-3\mu\cos q_0\cos q'\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\frac{h_0}{h}\cos J-\Xi\delta\frac{h}{h_0}+\tfrac{1}{2}\left(\delta\frac{h}{h_0}\right)^2+\tfrac{3}{8}(\Upsilon^2\cos^2q_0+\Psi^2)\\&+3n'e'\mu\int\left\{ar'\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right)\frac{a'\sin f'}{r'\cos q'}-2\mu\cos q_0\frac{h_0}{h}\cos J\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\sin f'\right\}dt\end{aligned}$$

Diese Gleichung erstreckt sich auf alle Potenzen der störenden Massen, das erste Glied derselben unter dem Integralzeichen ist, abgesehen von diesen Massen, von der Ordnung $e'\mu$ und das zweite von der Ordnung $e'\mu^2$. Diese beiden Glieder sind also desto kleiner, je kleiner die Excentricität des störenden Planeten, und je grösser die grosse Achse seiner Bahn im Verhältniss zu der des gestörten Planeten ist.

Die für die Anwendung dieser Gleichung zur Berechnung der von den Quadraten der störenden Massen abhängigen, in Ξ befindlichen Glieder einer Ungleichheit von langer Periode noch erforderliche Entwickelung einiger Glieder derselben ist sehr einfach, und leicht zu erhalten. Da ich aber, wie schon erwähnt, bei der Egeria davon keinen Gebrauch gemacht habe, so unterlasse ich diese Entwickelung an diesem Orte, und erwähne nur, dass man dabei durch Anwendung von einigen einfachen Betrachtungen bewirken kann, dass einige der grössten der in den Entwickelungen hervortretenden Glieder, deren Wirkung im Endresultat sich aufheben würde, vor der Anwendung aus der Gleichung verschwinden.

§. 3. Analytische Entwickelung der Hauptbedingungsgleichung für die von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Glieder.

Beweis zweier Sätze, die bei der Berechnung der von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Glieder angewandt werden.

10.

Die im §. 5 (I) abgeleitete, und unter den Formen (80), (81) und (82) (I) aufgestellte Bedingungsgleichung wurde schon im §. 4 (II) zur Prüfung der Berechnung der Coefficienten der von der ersten Potenz der Massen abhängigen Glieder angewandt, und wird auch weiter unten für die von den Quadraten und Producten derselben abhängigen Glieder in Anwendung gebracht werden. In Bezug auf diese kommt der Umstand wesentlich in Betracht, dass die Berechnung der Störungen hier mit einer mittleren Bewegung ausgeführt wird, die von dem wahren Werthe derselben im Allgemeinen verschieden ist, und dass daraus eine Verbesserung der in der ersten Annäherung angewandten Werthe der Integrationsdivisoren entspringt, deren Berechnung im §. 5 (II) gezeigt wurde. Die hieraus entstehenden Glieder zweiter Ord-

nung müssen der eben erwähnten durch (80), (81) oder (82) (I) gegebenen Entwickelung noch hinzugefügt werden, da ohne dieselben der Bedingungsgleichung nicht vollständig würde Gnüge geleistet werden können. Ihre Berechnung ist schon im Art. 56 (II) entwickelt worden, und wir könnten ohne Weiteres die dort erhaltenen Ausdrücke auch in der Bedingungsgleichung anwenden, allein für diese lassen sich die angeführten Ausdrücke sehr vereinfachen, und diese Vereinfachung will ich zuerst entwickeln. Da ich mich an die Form (82) (I) halten werde, so wird zufolge dieser

$$\frac{d\delta z}{dt} + 2\delta\nu = \delta\frac{h_0}{h} + 3\nu^2 - 2\nu.\,\delta\frac{h_0}{h}$$

und da hieraus für die Störungen erster Ordnung

$$\frac{d\delta z}{dt} + 2\nu = \delta\frac{h_0}{h}$$

hervorgeht, so folgt dass wenn man die in Rede stehende Verbesserung an die rechte Seite dieser Gleichung anbringen will, sie

$$\Delta\delta\frac{h_0}{h} - \Delta\frac{d\delta z}{dt} - 2\,\Delta\nu$$

zum Ausdruck hat, wenn Δ überhaupt die vom Unterschied zwischen der der Rechnung zu Grunde gelegten, und der wahren mittleren Bewegung herrührende Verbesserung bezeichnet.

11.

Sei nun überhaupt

$$T = M(i)\,\sin\,(l\eta + (i,i')) + N(i)\cos\,(l\eta + (i,i'))$$

wo ich der Kürze wegen das Zeichen (i,i') für den Bogen $(i - i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c' - c\mu)$ gewählt, und auch, zur Abkürzung, das Summenzeichen, welches der Strenge nach vor den Gliedern rechter Hand gehört, weggelassen habe. Der Index l kann hier, wie aus der Abhandlung (II) hervorgeht, nur die drei Werthe 0 und $\pm$ 1 annehmen. Multipliciren wir nun diesen Ausdruck von T mit $d\varepsilon$ und integriren, so bekommen wir mit Anwendung der in diesen Abhandlungen allgemein eingeführten Bezeichnungen

$$W = k + k_1\cos\iota_l + k_2\sin\iota_l - \frac{M(i)}{i - i'\mu}\cos\,(l_l + (i,i')) + \frac{N(i)}{i - i'\mu}\sin\,(l_l + (i,i'))$$

wo wie früher $k + k_1\cos\iota_l + k_2\sin\iota_l$ die willkührliche Constante ist. Hieraus ergiebt sich durch die Formeln

$$\frac{d\delta z}{dt} = \overline{W},\quad 2\nu = -\int\left(\frac{dW}{d\eta}\right)d\varepsilon,\quad \delta\frac{h_0}{h} = \int T\,d\varepsilon$$

mit wenig Mühe

$$\frac{d\delta z}{dt} = k + k_1 \cos\varepsilon + k_2 \sin\varepsilon - \Sigma' \frac{M(i-l)}{i-l-i'\mu} \cos(i,i') + \Sigma' \frac{N(i-l)}{i-l-i'\mu} \sin(i,i')$$

$$2\nu = -k_1 \cos\varepsilon - k_2 \sin\varepsilon + \Sigma \frac{lM(i-l}{(i-i'\mu)(i-l-i'\mu)} \cos(i,i') - \Sigma' \frac{lN(i-l)}{(i-i'\mu)(i-l-i'\mu)} \sin(i,i')$$

$$\delta \frac{h_0}{h} = -K - \frac{\Sigma M(i-l)}{i-i'\mu} \cos(i,i') + \frac{\Sigma N(i-l)}{i-i'\mu} (\sin i,i')$$

wo die Summenzeichen sich auf l beziehen. Zufolge der Bemerkung des Art. 56 (II) müssen wir hier allenthalben, wo Integrationen vorgekommen sind, bevor wir die Variation in Bezug auf den Unterschied der beiden Gattungen von mittlerer Bewegung nehmen können, das constante n_0 der Zähler von dem veränderlichen n der Nenner trennen. Wir müssen daher diese Ausdrücke erst wie folgt schreiben,

$$\frac{d\delta z}{dt} = k + k_1 \cos\varepsilon + k_2 \sin\varepsilon - n_0 \Sigma' \frac{M(i-l)}{in-ln-i'n'} \cos(i,i') + n_0 \Sigma' \frac{N(i-l)}{in-ln-i'n'} \sin(i,i')$$

$$2\nu = -n_0 \frac{k_1}{n} \cos\varepsilon - n_0 \frac{k_2}{n} \sin\varepsilon + n_0^2 \Sigma' \frac{lM(i-l)}{(in-i'n')(in-ln-i'n')} \cos(i,i')$$

$$- n_0^2 \Sigma' \frac{lN(i-l)}{(in-i'n')(in-ln-i'n')} \sin(i,i')$$

$$\delta \frac{h_0}{h} = -K - n_0 \frac{\Sigma M(i-l)}{in-i'n'} \cos(i,i') + n_0 \frac{\Sigma N(i-l)}{in-i'n'} \sin(i,i')$$

und hieraus bekommen wir

$$\delta \frac{h_0}{h} - \frac{d\delta z}{dt} - 2\nu = -K - k - \frac{n-n_0}{n} \{k_1 \cos\varepsilon + k_2 \sin\varepsilon\}$$

$$+ \Sigma \frac{n_0(n-n_0)lM(i-l)}{(in-i'n')(in-ln-i'n')} \cos(i,i') - \Sigma' \frac{n_0(n-n_0)lN(i-l)}{(in-i'n')(in-ln-i'n')} \sin(i,i')$$

Nimmt man hievon die Variation in Bezug auf n, und setzt darauf $n_0 = n$, so wird augenscheinlich

$$\Delta\delta \frac{h_0}{h} - \Delta \frac{d\delta z}{dt} - 2\Delta\nu = 2\nu \frac{\Delta n}{n}$$

wo zufolge der Ableitung der vollständige Ausdruck von ν, das ist der Ausdruck von ν mit Inbegriff der Glieder, welche die willkührlichen Constanten enthalten angewandt werden muss. Es wird sich indess weiter unten zeigen, dass es gleichgültig ist, ob man das constante Glied des Ausdrucks von ν mit zuzieht oder nicht. In der vorstehenden Ableitung ist zwar keine specielle Rücksicht auf die in den Ausdrücken der vorstehenden Gleichung enthaltenen, mit nt ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen multiplicirten, Glieder genommen worden, allein es ist leicht zu finden, dass man, um diese Gleichung zu erfüllen, auch diese Glieder von 2ν mit $\frac{\Delta n}{n}$ multipliciren muss. Unsere

im vor. Art. angeführte Bedingungsgleichung wird also in dem Falle wo der Berechnung der Störungen nicht von Anfang an der wahre Werth der mittleren Bewegung zu Grunde gelegt worden ist,

$$\frac{d\delta z}{dt} + 2\delta\nu = \delta\frac{h_0}{h} + 3\nu^2 - 2\nu\delta\frac{h_0}{h} + 2\nu\frac{\Delta n}{n} \qquad (1)$$

wo

$$\Delta n = (n) - n_0$$

ist, wenn (n) den wahren, und überhaupt n_0 den der Berechnung der Störungen untergelegten Werth der mittleren Bewegung bedeutet. In der so gestellten Bedingungsgleichung muss dagegen die im Art. 56 (II) erklärte Verbesserung der Integrationsdivisoren weggelassen werden.

12.

Der Beweis dieser Bedingungsgleichung ist in der Abhandlung (I) so allgemein wie möglich geführt, aber obgleich ich meine, dass sich gegen diesen Beweis nichts Gründliches einwenden lässt, so halte ich es doch nicht für undienlich auch durch eine allgemeine Entwickelung der Glieder dieser Gleichung zu zeigen, dass sie in der That für die von dem Quadrat der störenden Kraft abhängigen Glieder erfüllt wird. Es kann diese Entwickelung dienen um die innere Beschaffenheit dieser Gleichung aufzudecken, und man kann daraus eine Hinweisung schöpfen auf welche Theile der Rechnung man vorzugsweise seine Aufmerksamkeit wenden muss, wenn bei der Anwendung der Gleichung auf numerisch berechnete Coefficienten man hie und da zuerst eine Nichtübereinstimmung finden sollte, die auf begangene Rechnungsfehler deutet. Es kann ferner die vorzunehmende analytische Entwickelung, wenn es noch nöthig wäre, zur Verification der in der Abhandlung (II) entwickelten Theorie der willkührlichen Constanten dienen. Denn es ist klar, dass die von diesen Constanten abhängigen Glieder nur der obigen Bedingungsgleichung gnügen können, wenn sie nach richtigen Grundsätzen in die Ausdrücke der Störungen eingeführt sind.

Es ist leicht einzusehen, dass diese Bedingungsgleichung für je zwei beliebige Werthe des Index i' statt finden muss, allein sie findet ausserdem auch für je zwei beliebige Werthe des Index i statt. Man braucht daher in der analytischen Entwickelung derselben überhaupt nur auf zwei Glieder von T und den übrigen davon abhängigen Functio-

nen Rücksicht zu nehmen. Um Vollständigkeit in diese Entwickelungen zu legen kann man sich mit den allgemeinen Ausdrücken dieser Glieder nicht begnügen, sondern muss auf die Glieder, die in den Integrationen besondere Formen annehmen, besondere Rücksicht nehmen. Diese verschiedenen Gattungen von Gliedern sollen alle im Folgenden betrachtet werden, um aber die Ausdrücke nicht allzu lang werden zu lassen, sollen die verschiedenartigen Glieder nach und nach betrachtet und substituirt werden.

Zuvor werde ich zeigen, dass diese Bedingungsgleichung für ihre analytische Entwickelung in vier Gleichungen zerlegt werden kann, von welchen drei so beschaffen sind, dass sich ihre Entwickelung auf sehr kurze Weise ausführen lässt. Bei der Anwendung dieser Bedingungsgleichung zur Controle numerisch berechneter Störungscoefficienten kann diese Zerlegung bei der Aufsuchung von Rechnungsfehlern zuweilen mit Nutzen angewandt werden.

13.

Da für die Störungen zweiter Ordnung

$$\frac{d\delta z}{dt} = \overline{\delta W_0} + \overline{\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)} \frac{an\delta z}{r} + \nu^2$$

$$2\nu = -\int \overline{\left(\frac{d\delta W_0}{d\eta}\right)} d\varepsilon - \int \left\{ \overline{\left(\frac{d^2 W}{d\eta^2}\right)} \frac{a}{r} - \overline{\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)} \frac{a^2 e \sin\varepsilon}{r^2} \right\} n\delta z . d\varepsilon$$

ist, so wird die Bedingungsgleichung (1) zuerst

$$(2) \qquad 0 = \overline{\delta W_0} - \int \overline{\left(\frac{d\delta W_0}{d\eta}\right)} d\varepsilon - \delta \frac{h_0}{h} - 2\nu \left(\nu - \delta \frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) + R = 0$$

wenn wir zur Abkürzung

$$(3) \qquad R = \overline{\left(\frac{dW}{d\eta}\right)} \frac{an\delta z}{r} - \int \left\{ \overline{\left(\frac{d^2 W}{d\eta^2}\right)} \frac{a}{r} - \overline{\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)} \frac{a^2 e \sin\varepsilon}{r^2} \right\} n\delta z . d\varepsilon$$

setzen. Zufolge der Artt. 43 und 47 (I) ist, wenn wir von den Gliedern, welche die Breitenstörungen und die von den Producten der Massen abhängigen Störungen enthalten, absehen

$$\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} = A \frac{an\delta z}{r} + B\nu + C\delta \frac{h}{h_0}$$

$$\frac{d\delta \frac{h_0}{h}}{d\varepsilon} = A' \frac{an\delta z}{r} + B'\nu$$

wo

$$A = \left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right) - T \frac{ae \sin\varepsilon}{r}$$

$$B = V + X$$

$$C = 2\{T + X + T\}$$
$$A' = \left(\frac{d\overline{T}}{d\varepsilon}\right) - \overline{T}\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$
$$B' = \overline{V}$$

ist, und alle Bezeichnungen dieselben sind wie in §. 3 (I). Da aber, wie leicht einzusehen,

$$\left(\frac{d\overline{T}}{d\varepsilon}\right) = \left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right) + \left(\frac{\delta T}{d\eta}\right)$$

ist, so folgt sogleich aus den vorstehenden Ausdrücken dass auch

$$A' = \overline{A} + \overline{\left(\frac{dT}{d\eta}\right)}$$

ist, und wir erhalten demnach

$$\delta\frac{h_0}{h} = \int\left(\frac{dT}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}d\varepsilon + \int\left\{\overline{A}\frac{an\delta z}{r} + \overline{V}\nu\right\}d\varepsilon$$

Substituiren wir diesen Ausdruck in die Bedingungsgleichung (2), so wird sie

$$\delta\overline{W_0} - \int\left(\frac{d\delta W_0}{d\eta}\right)d\varepsilon - \int\left\{\overline{A}\frac{an\delta z}{r} + \overline{V}\nu\right\}d\varepsilon$$
$$-\int\left(\frac{dT}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}d\varepsilon - 2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) + R = 0$$

14.

Sei nun

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = A\frac{an\delta z}{r};\ \frac{dQ}{d\varepsilon} = V\nu;\ \frac{dM}{d\varepsilon} = C\delta\frac{h}{h_0};\ \frac{dN}{d\varepsilon} = X\nu \qquad (4)$$

woraus zufolge der im vor. Art. angeführten Ausdrücke

$$\delta W_0 = P + Q + M + N$$

folgt, dann findet die Bedingungsgleichung für jede der vier Functionen P, Q, M, N abgesondert statt, oder wenn man die vorstehenden Ausdrücke in die am Ende des vor. Art. gefundene Gleichung substituirt, so wird für sich

$$\overline{P} - \int\left(\frac{dP}{d\eta}\right)d\varepsilon - \int\overline{A}\frac{an\delta z}{r}d\varepsilon = 0$$
$$\overline{Q} - \int\left(\frac{dQ}{d\eta}\right)d\varepsilon - \int V\nu.d\varepsilon = 0$$
$$\overline{M} - \int\left(\frac{dM}{d\eta}\right)d\varepsilon = 0$$
$$\overline{N} - \int\left(\frac{dN}{d\eta}\right)d\varepsilon - \int\left(\frac{dT}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}d\varepsilon - 2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) + R = 0 \qquad (5)$$

deren Summe die angeführte Gleichung bildet.

Um diese Gleichungen zu beweisen muss man sich jeden der Factoren, die sie enthalten, in unendliche Reihen von der Form entwickelt denken, die in den §§. 4 und 5 (II) angewandt wurde. Sei darauf aus

der Multiplication irgend eines Gliedes des Ausdrucks von $\frac{an\delta z}{r}$ mit irgend einem Gliede des Ausdrucks von A im Product $A\frac{n\delta z}{ar}$ das folgende Glied hervorgegangen

$$N(i)\varepsilon \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (l\eta + (i,i'))$$

so dass in Bezug auf dasselbe

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = \mathrm{N}(i)\varepsilon \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (l\eta + (i,i'))$$

wird. Ich bemerke hiezu dass zwar in diesem sowohl wie in den übrigen Producten für jedes Argument Glieder vorhanden sind, die ε oder statt dessen nt ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen enthalten, dass aber auch in Bezug auf jedes Argument Glieder vorkommen, die diesen Factor nicht enthalten, und dass diese letzteren im Allgemeinen die grösseren Glieder sind. Dass ich hier ausdrücklich das mit ε multiplicirte Glied betrachte, geschieht um den Beweis sogleich auf diese Gattung von Gliedern auszudehnen, indem der Uebergang von diesen zu jenen einfacher ist, wie der entgegengesetzte Uebergang. Aus dem obigen Ausdruck folgt

$$\begin{aligned}
P &= \mp \tfrac{N(i)}{i-i'\mu}\,\varepsilon \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (l\eta + (i,i')) + \tfrac{N(i)}{(i-i'\mu)^2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (l\eta + (i,i')) \\
\tfrac{dP}{d\eta} &= \tfrac{lN(i)}{i-i'\mu}\,\varepsilon \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (l\eta + (i,i')) \pm \tfrac{lN(i)}{(i-i'\mu)^2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (l\eta + (i,i')) \\
\overline{P} &= \mp \Sigma' \tfrac{N(i-l)}{i-l-i'\mu}\,\varepsilon \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (i,i') + \Sigma' \tfrac{N(i-l)}{(i-l-i'\mu)^2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i') \\
\left(\tfrac{dP}{d\eta}\right) &= \Sigma' \tfrac{lN(i-l)}{i-l-i'\mu}\,\varepsilon \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i') \pm \Sigma' \tfrac{lN(i-l)}{(i-l-i'\mu)^2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (i,i') \\
\int\left(\tfrac{dP}{d\eta}\right) d\varepsilon &= \mp \tfrac{1}{i-i'\mu}\,\Sigma' \tfrac{lN(i-l)}{i-l-i'\mu}\,\varepsilon \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (i,i') \\
&\quad + \tfrac{1}{(i-i'\mu)^2}\,\Sigma' \tfrac{lN(i-l)}{i-l-i'\mu} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i') + \tfrac{1}{i-i'\mu}\,\Sigma' \tfrac{lN(i-l)}{(i-l-i'\mu)^2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i')
\end{aligned}$$

wo die Summationen sich wieder auf l beziehen, und daher nur die drei Werthe 0 und ± 1 von l in sich begreifen. Diese Ausdrücke geben

$$(6) \qquad \overline{P} - \int\left(\tfrac{dP}{d\eta}\right) d\varepsilon = \mp \tfrac{\Sigma N(i-l)}{i-i'\mu}\,\varepsilon \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (i,i') + \tfrac{\Sigma N(i-l)}{(i-i'\mu)^2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i')$$

Da nun das dem obigen Gliede von $A\frac{an\delta z}{r}$ entsprechende Glied von $\overline{A}\frac{an\delta z}{r}$ nothwendiger Weise

$$\overline{A}\tfrac{an\delta z}{r} = \Sigma N(i-l)\,\varepsilon \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i')$$

ist, so ergiebt sich

$$\int \overline{A}\frac{an\delta z}{r}\,d\varepsilon = \mp \frac{\Sigma N(i-l)}{i-i'\mu}\,\varepsilon \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(i,i') + \frac{\Sigma N(i-l)}{(i-i'\mu)^2}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(i,i')$$

also

$$\overline{P} - \int\left(\overline{\frac{dP}{d\eta}}\right)d\varepsilon - \int \overline{A}\frac{an\delta z}{r}\,d\varepsilon = 0$$

Hiemit ist die erste der obigen vier Gleichungen, in welche wir die Bedingungsgleichung zerlegt haben, für die mit ε multiplicirten Glieder bewiesen, und um den Beweis auch für die Glieder zu bekommen, die diesen Factor nicht enthalten braucht man nur in den vorstehenden Integralen die Glieder welche den Factor ε nicht enthalten weg zu streichen, und in den übrigen den Factor $\varepsilon = 1$ zu setzen.

Da die zweite unserer drei Gleichungen der ersten eben bewiesenen völlig ähnlich ist, so braucht der Beweis für diese nicht besonders geführt zu werden, und auch der Beweis der dritten Gleichung lässt sich aus den vorstehenden Entwickelungen leicht erhalten. Zu dem Ende bemerke ich dass Art. 42 (I)

$$T = \frac{1}{\cos\varphi}\left\{2\varrho\cos(f-\omega) - r + \frac{2\varrho r}{a\cos^2\varphi}\left[\cos(f-\omega)-1\right]\right\}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$
$$+ \frac{2}{\cos\varphi}\varrho\sin(f-\omega)\,r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

und Art. 44 (I)

$$X = -\frac{2}{\cos\varphi}\varrho\cos(f-\omega)\left(\frac{d\Omega}{df}\right) - \frac{2}{\cos\varphi}\varrho\sin(f-\omega)\,r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

gesetzt wurde. Verwandelt man in diesen Ausdrücken ω in f und ϱ in r, so ergiebt sich die Gleichung

$$\overline{X} = -2T$$

Nun ist aber wie im vor. Art. angeführt wurde

$$C = 2(T + X + \overline{T})$$

also

$$\overline{C} = 0$$

Nehmen wir nun an, dass nach der Entwickelung und der Multiplication von C mit $\delta\frac{h}{h_0}$ irgend ein Glied im Differential von M

$$\frac{dM}{d\varepsilon} = N(i)\varepsilon\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(l\eta + (i,i'))$$

sei, dann ist in Folge der eben gefundenen Gleichung

$$\Sigma N(i-l) = 0$$

und folglich zufolge der Gleichung (6), wenn wir darin M statt P schreiben

$$\overline{M} - \int \left(\frac{dM}{d\eta}\right) d\varepsilon = 0$$

W. Z. B. W. Auf dieselbe Art beweist man ferner dass diese Gleichungen auch für die Glieder, in welchen $i' = 0$ und $i = 0$ oder $= \pm 1$ ist, und deren Integrale eine andere Form annehmen, statt finden.

Wir haben also im Folgenden blos die Gleichung (5) zu entwickeln.

15.

Wenn wir die Gleichung (5) ohne Weiteres der Entwickelung unterwerfen wollten, so würden wir wegen der Divisoren r und r^2 die darin vorkommen auf unendliche Reihen geführt; diese können aber durch die folgende Umformung vermieden werden. Differentiiren wir den Ausdruck (3) für R, so ergiebt sich

$$\frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{d\left(\frac{dH}{d\eta}\right)}{d\varepsilon} \frac{a}{r} n\delta z + \overline{\left(\frac{dW}{d\eta}\right)} \frac{a}{r} \frac{d\delta z}{d\varepsilon} - \overline{\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right)} \frac{a}{r} n\delta z$$

aber es ist leicht einzusehen dass

$$\frac{d\left(\frac{dH}{d\eta}\right)}{d\varepsilon} = \overline{\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right)} + \left(\frac{d^2W}{d\eta d\varepsilon}\right)$$

und

$$\overline{\left(\frac{d^2W}{d\eta d\varepsilon}\right)} = \overline{\left(\frac{dT}{d\eta}\right)}$$

ist; da wir nun ferner auch

$$n \frac{d\delta z}{d\varepsilon} = \frac{d\delta z}{dt} \frac{r}{a}$$

haben, so wird nach der Substitution und der Rückintegration

$$R = \int \left(\frac{dT}{d\eta}\right) \frac{an\delta z}{r} d\varepsilon + \int \overline{\left(\frac{dW}{d\eta}\right)} \frac{d\delta z}{dt} d\varepsilon$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (5), so ergiebt sich

$$(7) \qquad \overline{N} - \int \left(\frac{dN}{d\eta}\right) d\varepsilon + \int \overline{\left(\frac{dW}{d\eta}\right)} \frac{d\delta z}{dt} d\varepsilon - 2\nu\left(\nu - \delta \frac{h_0}{h} + \frac{Jn}{n}\right) = 0$$

in deren Entwickelung keine unendlichen Reihen innerhalb der einzelnen Argumente vorkommen.

16.

Da wir nun zuerst die Ausdrücke erster Ordnung der Störungen haben müssen, so könnten wir die schon oben abgeleiteten benutzen,

allein um etwas mehr Einfachheit in die zu entwickelnden Formeln zu bringen, will ich hier

$$T = (i - i'\mu)\, D(i) \sin(l\eta + (i,i')) + (i - i'\mu)\, E(i) \cos(l\eta + (i,i')) \qquad (8)$$

setzen, wo (i,i') dieselbe Bedeutung hat wie im Art. 11. Den Factor $i - i'\mu$ habe ich hinzugefügt, damit er in den folgenden Ausdrücken im Nenner nicht vorkomme, und die Glieder dadurch etwas einfacher mache. Aus diesem Ausdruck von T bekommen wir zuerst die folgenden allgemeinen Glieder

$$\begin{aligned}
W &= -D(i)\cos(l\eta + (i,i')) + E(i)\sin(l\eta + (i,i')) \\
\frac{d\delta z}{dt} = \overline{W} &= -\Sigma D(i-l)\cos(i,i') + \Sigma E(i-l)\sin(i,i') \\
\left(\frac{dW}{d\eta}\right) &= \Sigma l D(i-l)\sin(i,i') + \Sigma l E(i-l)\cos(i,i') \\
\nu &= \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma l D(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i') - \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma l E(i-l)}{i-i'\mu}\sin(i,i') \\
\delta\frac{h_0}{h} &= -\frac{\Sigma(i-l-i'\mu)\, D(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i') + \frac{\Sigma(i-l-i'\mu)\, E(i-l)}{i-i'\mu}\sin(i,i')
\end{aligned}$$

die wir zuerst in die Bedingungsgleichung substituiren wollen.

17.

Nehmen wir irgend zwei Glieder der Entwickelung von X vor, und nennen sie

$$\begin{aligned}
X = {} & A(p)\sin(l\eta + (p,p')) + B(p)\cos(l\eta + (p,p')) \\
& + A(q)\sin(l\eta + (q,q')) + B(q)\cos(l\eta + (q,q')) \qquad (9)
\end{aligned}$$

dann müssen wir diese mit den folgenden analogen Gliedern von ν verbinden

$$\begin{aligned}
\nu = {} & \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma l D(p-l)}{p-p'\mu}\cos(p,p') - \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma l E(p-l)}{p-p'\mu}\sin(p,p') \\
& + \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma l D(q-l)}{q-q'\mu}\cos(q,q') - \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma l E(q-l)}{q-q'\mu}\sin(q,q')
\end{aligned}$$

und es reicht bei der Multiplication aus im Product blos die mit den Argumenten $((p \pm q), (p' \pm q'))$ behafteten Glieder zu berücksichtigen, da hiemit schon die grösste Allgemeinheit erlangt ist. Multipliciren wir daher, substituiren in (4), integriren, und setzen zur Abkürzung

$$i = p \pm q\,;\; i' = p' \pm q'$$

so bekommen wir

$$N = -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{matrix} \frac{A(p)\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu} & \frac{A(q)\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ \mp\frac{B(p)\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu} & -\frac{B(q)\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \end{matrix}\right\}\frac{\cos(l\eta+(i,i'))}{i-i'\mu}$$

$$+\tfrac{1}{4}\left\{\begin{matrix} \frac{B(p)\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu} & +\frac{B(q)\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ \pm\frac{A(p)\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu} & \pm\frac{A(q)\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \end{matrix}\right\}\frac{\sin(l\eta+(i,i'))}{i-i'\mu}$$

und da hieraus

$$\overline{N} = -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{matrix} \Sigma'\frac{A(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu} & \pm\Sigma'\frac{A'q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ \mp\Sigma'\frac{B(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu} & -\Sigma'\frac{B(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \end{matrix}\right\}\cos(i,i')$$

$$+\tfrac{1}{4}\left\{\begin{matrix} \Sigma'\frac{B(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu} & +\Sigma'\frac{B(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ \pm\Sigma'\frac{A(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu} & \pm\Sigma'\frac{A(q-l)}{i-l-i'\mu} \quad \frac{\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \end{matrix}\right\}\sin(i,i')$$

und

$$\int\left(\frac{\overline{dN}}{d\eta}\right)d\varepsilon = -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{matrix} \Sigma'\frac{lA(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu} & \pm\Sigma'\frac{lA(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ \mp\Sigma'\frac{lB(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu} & -\Sigma'\frac{lB(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \end{matrix}\right\}\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$

$$+\tfrac{1}{4}\left\{\begin{matrix} \Sigma'\frac{lB(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu} & +\Sigma'\frac{lB(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ \pm\Sigma'\frac{lA(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu} & \pm\Sigma'\frac{lA(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \end{matrix}\right\}\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$

folgt, so ergiebt sich

$$\overline{N} - \int\left(\frac{\overline{dN}}{d\eta}\right)d\varepsilon = -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{matrix} \frac{\Sigma A(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)} & \pm\frac{\Sigma A(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)} \\ \mp\frac{\Sigma B(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)} & -\frac{\Sigma B(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)} \end{matrix}\right\}\cos(i,i')$$

$$+\tfrac{1}{4}\left\{\begin{matrix} \frac{\Sigma B(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)} & +\frac{\Sigma B(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)} \\ \pm\frac{\Sigma A(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)} & \pm\frac{\Sigma A(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)} \end{matrix}\right\}\sin(i,i')$$

Verwandeln wir aber in den Ausdrücken (8) und (9) η_l in ε, so bekommen wir wegen der oben gefundenen Gleichung $\overline{X} = -2\overline{T}$ die Relationen

$$(10)\qquad \left\{\begin{matrix} \Sigma A(i-l) = -2\Sigma(i-l-i'\mu)\,D(i-l) \\ \Sigma B(i-l) = -2\Sigma(i-l-i'\mu)\,E(i-l) \end{matrix}\right.$$

die für alle Argumente ohne Ausnahme gelten. Die vorstehende Gleichung verwandelt sich dadurch in

$$\bar{N} - \int \left(\frac{d\bar{N}}{d\eta}\right) d\varepsilon = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \frac{\Sigma(p-l-p'\mu)\, D(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)} \pm \frac{\Sigma(q-l-q'\mu)\, D(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)} \\ \mp \frac{\Sigma(p-l-p'\mu)\, E(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)} - \frac{\Sigma(q-l-q'\mu)\, E(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)} \end{matrix} \right\} \cos(i,i')$$

$$- \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \frac{\Sigma(p-l-p'\mu)\, D(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)} + \frac{\Sigma(q-l-q'\mu) E(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)} \\ \pm \frac{\Sigma((p-l-p'\mu)\, D(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)} \pm \frac{\Sigma(q-l-q'\mu)\, D(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)} \end{matrix} \right\} \sin(i,i')$$

womit die beiden ersten Glieder der Bedingungsgleichung (7) entwickelt sind.

18.

Um das dritte Glied der Bedingungsgleichung zu entwickeln müssen wir aus dem Art. 16 die folgenden Ausdrücke entlehnen,

$$\left(\frac{d\bar{W}}{d\eta}\right) = \Sigma lD(p-l)\sin(p,p') + \Sigma lE(p-l)\cos(p,p') + \Sigma lD(q-l)\sin(q,q') + \Sigma lE(q-l)\cos(q,q')$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = -\Sigma D(p-l)\cos(p,p') + \Sigma E(p-l)\sin(p,p') - \Sigma D(q-l)\cos(q,q') + \Sigma E(q-l)\sin(q,q')$$

multipliciren wir diese mit einander und mit $d\varepsilon$ und integriren, so erhalten wir

$$\int \left(\frac{d\bar{W}}{d\eta}\right) \frac{d\delta z}{dt}\, d\varepsilon = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \frac{\Sigma D(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{i-i'\mu} \pm \frac{\Sigma D(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{i-i'\mu} \\ \mp \frac{\Sigma E(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{i-i'\mu} - \frac{\Sigma E(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{i-i'\mu} \end{matrix} \right\} \cos(i,i')$$

$$- \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \pm \frac{\Sigma E(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{i-i'\mu} \pm \frac{\Sigma E(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{i-i'\mu} \\ + \frac{\Sigma D(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{i-i'\mu} + \frac{\Sigma D(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{i-i'\mu} \end{matrix} \right\} \sin(i,i')$$

Aus dem Art. 16 folgt ferner

$$\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta m}{n} = \frac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l)}{p-p'\mu}\cos(p,p') - \frac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l)}{p-p'\mu}\sin(p,p') + \frac{\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)D(q-l)}{q-q'\mu}\cos(q,q') - \frac{\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)E(q-l)}{q-q'\mu}\sin(q,q')$$

$$2\nu = \frac{\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu}\cos(p,p') - \frac{\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu}\sin(p,p') + \frac{\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu}\cos(q,q') - \frac{\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu}\sin(q,q')$$

wozu die Grösse $\frac{\Delta m}{n}$ keinen Beitrag hat liefern können, weil sie blos Function der willkührlichen Constanten ist, die hier noch nicht in Betracht gezogen werden. Aus den vorstehenden Ausdrücken folgt

$$2\nu\left(\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)D(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}+\dfrac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}\\ \mp\dfrac{\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)E(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}\mp\dfrac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}\end{array}\right\}\cos(i,i')$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\pm\dfrac{\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)E(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}+\dfrac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}\\ +\dfrac{\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)D(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}\pm\dfrac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}\end{array}\right\}\sin(i,i')$$

womit alle Glieder der Bedingungsgleichung entwickelt sind.

19.

Substituiren wir nun die im Vorhergehenden ausgeführten Entwickelungen in (7) und bringen alle Glieder auf einen und denselben Nenner, so bekommen wir

$$\begin{aligned}0=&(p-p'\mu)\Sigma'(p-l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lD(q-l)\pm(q-q'\mu)\Sigma'(q-l-q'\mu)D(q-l).\Sigma lD(p-l)\\&+(p-p'\mu)(q-q'\mu)\Sigma D'(q-l).\Sigma lD(p-l)\pm(p-p'\mu)(q-q'\mu)\Sigma D(p-l).\Sigma lD(q-l)\\&-(i-i'\mu)\Sigma(q-\tfrac{1}{2}l-q'\mu)D(q-l).\Sigma lD(p-l)-(i-i'\mu)\Sigma(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lD(q-l)\\&\mp(p-p'\mu)\Sigma'(p-l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lE(q-l)-(q-q'\mu)\Sigma'(q-l-q'\mu)E(q-l).\Sigma lE(p-l)\\&\mp(p-p'\mu)(q-q'\mu)\Sigma E(q-l).\Sigma lE(p-l)-(p-p'\mu)(q-q'\mu)\Sigma E(p-l).\Sigma lE(q-l)\\&\pm(i-i'\mu)\Sigma(q-\tfrac{1}{2}l-q'\mu)E(q-l).\Sigma lE(p-l)\pm(i-i'\mu)\Sigma(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lE(q-l)\\0=&(p-p'\mu)\Sigma'(p-l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lD(q-l)+(q-q'\mu)\Sigma'(q-l-q'\mu)E(q-l).\Sigma lD(p-l)\\&\pm(p-p'\mu)(q-q'\mu)\Sigma E(q-l).\Sigma lD(p-l)\pm(p-p'\mu)(q-q'\mu)\Sigma E(p-l).\Sigma lD(q-l)\\&\mp(i-i'\mu)\Sigma(q-\tfrac{1}{2}l-q'\mu)E(q-l).\Sigma lD(p-l)-(i-i'\mu)\Sigma(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lD(q-l)\\&\pm(p-p'\mu)\Sigma'(p-l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lE(q-l)\pm(q-q'\mu)\Sigma'(q-l-q'\mu)D(q-l).\Sigma lE(p-l)\\&+(p-p'\mu)(q-q'\mu)\Sigma D(q-l).\Sigma lE(p-l)+(p-p'\mu)(q-q'\mu)\Sigma D(p-l).\Sigma lE(q-l)\\&-(i-i'\mu)\Sigma(q-\tfrac{1}{2}l-q'\mu)D(q-l).\Sigma lE(p-l)\mp(i-i'\mu)\Sigma(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lE(q-l)\end{aligned}$$

Da die erste dieser beiden Gleichungen aus zwei abgesonderten einander völlig ähnlichen Theilen besteht, von welchen der eine von den D- und der andere von den E-Coefficienten abhängt, so ist klar, dass sie in zwei Gleichungen zerfallen muss, und dass wenn die eine dieser identisch Null ist, die andere nothwendig auch identisch Null sein muss; es braucht daher nur gezeigt zu werden, dass die ersten sechs Glieder derselben einander aufheben. Zu dem Ende bemerke ich dass

$$\Sigma'(q-\tfrac{1}{2}l-q'\mu)D(q-l) = (q-q'\mu)\Sigma D(q-l)-\tfrac{1}{2}\Sigma lD(q-l)$$
$$\Sigma'(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l) = (p-p'\mu)\Sigma D(p-l)-\tfrac{1}{2}\Sigma lD(p-l)$$
$$i-i'\mu \quad = (p-p'\mu) \pm (q-q'\mu)$$

ist. Substituirt man diese Werthe in das fünfte und sechste Glied der ersten Gleichung, so werden die ersten sechs Glieder derselben

$$\begin{aligned}
0 = {} & (p-p'\mu)\Sigma'(p-l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lD(q-l) \pm (q-q'\mu)\Sigma'(q-l-q'\mu)D(q-l).\Sigma lD(p-l)\\
& -(p-p'\mu)^2\Sigma D(p-l).\Sigma lD(q-l) \mp (q-q'\mu)^2\Sigma D(q-l).\Sigma lD(p-l).\\
& +(p-p'\mu)\Sigma lD(q-l).\Sigma lD(p-l) \pm (q-q'\mu)\Sigma lD(q-l).\Sigma lD(p-l).
\end{aligned}$$

aber es ist auch

$$\Sigma'(p-l-p'\mu)D(p-l) = (p-p'\mu)\Sigma D(p-l)-\Sigma lD(p-l)$$
$$\Sigma'(q-l-q'\mu)D(q-l) = (q-q'\mu)\Sigma D(q-l)-\Sigma lD(q-l)$$

vermittelst welcher man sogleich erkennt, dass die vorstehende Gleichung identisch Null ist. Es ist ferner

$$\Sigma'(q-\tfrac{1}{2}l-q'\mu)E(q-l) = (q-q'\mu)E(q-l)-\tfrac{1}{2}\Sigma lE(q-l)$$
$$\Sigma'(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l) = (p-p'\mu)E(p-l)-\tfrac{1}{2}\Sigma lE(p-l)$$

und durch diese und die vorhergehenden verwandelt man leicht die zweite Gleichung in folgende,

$$\begin{aligned}
0 = {} & (p-p'\mu)\Sigma'(p-l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lD(q-l) + (q-q'\mu)\Sigma'(q-l-q'\mu)E(q-l).\Sigma lD(p-l)\\
& -(p-p'\mu)^2\Sigma E(p-l).\Sigma lD(q-l) - (q-q'\mu)^2\Sigma E(q-l).\Sigma lD(p-l)\\
& \pm(p-p'\mu)\Sigma lE(q-l).\Sigma lD(p-l) + (q-q'\mu)\Sigma lE(q-l).\Sigma lD(p-l)\\
& \pm(p-p'\mu)\Sigma'(p-l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lE(q-l) \pm (q-q'\mu)\Sigma'(q-l-q'\mu)D(q-l).\Sigma lE(p-l)\\
& \mp(p-p'\mu)^2\Sigma D(p-l).\Sigma lE(q-l) \mp (q-q'\mu)^2\Sigma D(q-l).\Sigma lE(p-l)\\
& +(p-p'\mu)\Sigma lD(q-l).\Sigma lE(p-l) \pm (q-q'\mu)\Sigma lD(q-l).\Sigma lE(p-l)
\end{aligned}$$

deren Identität auf dieselbe Weise erkannt wird wie die jener Gleichung.

20.

Im Vorhergehenden ist die Identität der Bedingungsgleichung für die allgemeine Form der darin zu substituirenden Glieder entwickelt worden, aber zur Vervollständigung dieser Analyse sind noch die Glieder zu betrachten, die durch die Integrationen andere Formen annehmen, und sich daher in Bezug auf die allgemeine Form als Ausnahmeglieder gestalten. Solche entstehen schon durch die Substitution der im Vorhergehenden betrachteten Glieder der allgemeinen Form, und diese wollen wir zuerst vornehmen. Wir könnten sie schon dadurch erhalten, dass wir in den vorhergehenden Ausdrücken, vor den Integra-

tionen $p'=q'$, und nach einander $p=q$ und $p=q+1$ setzten, und dabei die unteren Zeichen anwendeten, allein ich halte für übersichtlicher die Multiplicationen von Neuem auszuführen. Da wir hiebei in dem Factor X den Index l von η specialisiren müssen, so will ich für die Coefficienten von X allgemein die Zeichen $A(l,i)$ und $B(l,i)$, statt der oben angewandten $A(i)$ und $B(i)$ gebrauchen. Die von X in Betracht zu ziehenden Glieder sind nun

$$\begin{aligned}
X = {} & A(0,p)\sin(p,p') && + B(0,p)\cos(p,p') \\
& + A(-1,p+1)\sin(-\eta+(p+1,p')) && + B(-1,p+1)\cos(-\eta+(p+1,p')) \\
& + A(1,p-1)\sin(\eta+(p-1,p')) && + B(1,p-1)\cos(\eta+(p-1,p')) \\
& + A(0,p+1)\sin(p+1,p') && + B(0,p+1)\cos(p+1,p') \\
& + A(-1,p+2)\sin(-\eta+(p+2,p')) && + B(-1,p+2)\cos(-\eta+(p+2,p')) \\
& + A(1,p)\sin(\eta+(p,p')) && + B(1,p)\cos(\eta+(p,p'))
\end{aligned}$$

die mit den folgenden von ν verbunden werden müssen.

$$\begin{aligned}
\nu = {} & \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu}\cos(p,p') - \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu}\sin(p,p') \\
& + \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma lD(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\cos(p+1,p') - \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma lE(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\sin(p+1,p')
\end{aligned}$$

Die Multiplication und Integration giebt leicht

$$\begin{aligned}
N = {} & -\tfrac{1}{4}\frac{A(0,p)\,\Sigma lE(p-l) - B(0,p)\,\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu}\,\varepsilon \\
& -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(-1,p+1)\,\Sigma lD(p-l) + B(-1,p+1)\,\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \\ -\dfrac{A(1,p-1)\,\Sigma lD(p-l) + B(1,p-1)\,\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu}\end{array}\right\}\cos(-\eta+\varepsilon) \\
& -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(-1,p+1)\,\Sigma lE(p-l) - B(-1,p+1)\,\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ +\dfrac{A(1,p-1)\,\Sigma lE(p-l) - B(1,p-1)\,\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu}\end{array}\right\}\sin(-\eta+\varepsilon) \\
& -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(0,p+1)\,\Sigma lD(p-l) + B(0,p+1)\,\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \\ -\dfrac{A(0,p)\,\Sigma lD(p+1-l) + B(0,p)\,\Sigma lE(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\cos\varepsilon \\
& -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(0,p+1)\,\Sigma lE(p-l) - B(0,p+1)\,\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ +\dfrac{A(0,p)\,\Sigma lE(p+1-l) - B(0,p)\,\Sigma lD(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\sin\varepsilon \\
& -\tfrac{1}{8}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(-1,p+2)\,\Sigma lD(p-l) + B(-1,p+2)\,\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \\ -\dfrac{A(1,p-1)\,\Sigma lD(p+1-l) + B(1,p-1)\,\Sigma lE(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\cos(-\eta+2\varepsilon)
\end{aligned}$$

$$-\tfrac{1}{8}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(-1,p+2)\,\Sigma lE(p-l)-B(-1,p+2)\,\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu}\\ +\dfrac{A(1,p-1)\,\Sigma lE(p+1-l)-B(1,p-1)\,\Sigma lD(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\sin(-\eta+2\varepsilon)$$

$$+\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(1,p)\,\Sigma lD(p-l)+B(1,p)\,\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu}\\ -\dfrac{A(-1,p+1)\Sigma lD(p+1-l)+B(-1,p+1)\Sigma lE(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\varepsilon\sin\eta$$

$$-\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(1,p)\,\Sigma lE(p-l)-B(1,p)\,\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu}\\ +\dfrac{A(-1,p+1)\Sigma lE(p+1-l)-B(-1,p+1)\Sigma lD(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\varepsilon\cos\eta$$

und hieraus bekommt man mit Weglassung der constanten Glieder, und wenn man bedenkt, dass die Gleichungen (10), nachdem man erst p und $p+1$ statt l, und dann auf der linken Seite $0, -1$ und $+1$ statt l substituirt hat,

$$A(0,p)+A(-1,p+1)+A(1,p-1)=-2\Sigma'(p-l-p'\mu)\,D(p-l)$$
$$B(0,p)+B(-1,p+1)+B(1,p-1)=-2\Sigma'(p-l-p'\mu)\,E(p-l)$$
$$A(0,p+1)+A(-1,p+2)+A(1,p)=-2\Sigma'(p+1-l-p'\mu)\,D(p+1-l)$$
$$B(0,p+1)+B(-1,p+2)+B(1,p)=-2\Sigma'(p+1-l-p'\mu)\,E(p+1-l)$$

geben,

$$\overline{N}-\int\left(\frac{\overline{dN}}{d\eta}\right)d\varepsilon=\tfrac{1}{2}\,\frac{\Sigma(p-l-p'\mu)\,D(p-l).\,\Sigma lE(p-l)-\Sigma(p-l-p'\mu)\,E(p-l).\,\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu}\,\varepsilon$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Sigma(p+1-l-p'\mu)\,D(p+1-l).\,\Sigma lD(p-l)+\Sigma(p+1-l-p'\mu)\,E(p+1-l).\,\Sigma lE(p+1-l)}{p-p'\mu}\\ -\dfrac{\Sigma(p-l-p'\mu)\,D(p-l).\,\Sigma lD(p+1-l)+\Sigma(p-l-p'\mu)\,E(p-l).\,\Sigma lE(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\cos\varepsilon$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Sigma(p+1-l-p'\mu)\,D(p+1-l).\,\Sigma lE(p-l)-\Sigma(p+1-l-p'\mu)E(p+1-l).\,\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu}\\ +\dfrac{\Sigma(p-l-p'\mu)\,D(p-l).\,\Sigma lE(p+1-l)-\Sigma(p-l-p'\mu)\,E(p-l).\,\Sigma lD(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\sin\varepsilon$$

Die constanten Glieder der Producte und Integrale müssen hier und in den weiter unten folgenden Entwickelungen weggelassen werden, weil sie nichts bedeuten können. Aus den constanten Gliedern der Bedingungsgleichung (1) wurde nemlich in §. 5 (II) die Constante C des Ausdrucks für v abgeleitet, und wir könnten daher durch Zuziehung dieser Glieder hier höchstens die Glieder zweiter Ordnung dieser Constante wieder erhalten. Aber auch dieses lässt sich nicht erlangen, weil wir für die Gleichung (7) eine neue Integration vorgenommen haben, und wir könnten also nur die constanten Glieder benutzen, um die dieser Integration hinzuzufügende Constante zu bestimmen, wozu wieder der genannte Ausdruck für C mit benutzt werden müsste.

21.

Es ist nun ferner anzuwenden

$$\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right) = \Sigma lD\,(p-l)\,\sin(p,p') + \Sigma lE\,(p-l)\,\cos(p,p')$$
$$+\Sigma lD\,(p+1-l)\,\sin(p+1,p') + \Sigma lE\,(p+1-l)\,\cos(p+1,p').$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = -\Sigma D\,(p-l)\,\cos(p,p') + \Sigma E\,(p-l)\,\sin(p,p')$$
$$-\Sigma D\,(p+1-l)\,\cos(p+1,p') + \Sigma E\,(p+1-l)\,\sin(p+1,p')$$

woraus

$$\int\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)\frac{d\delta z}{dt}\,d\varepsilon = \tfrac{1}{2}\{\ \Sigma lD\,(p-l).\Sigma E\,(p-l) - \Sigma D\,(p-l).\Sigma lE\,(p-l)\}\,\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\Sigma D\,(p+1-l).\Sigma lD\,(p-l) + \Sigma E\,(p+1-l).\Sigma lE\,(p-l)\\ -\Sigma D\,(p-l).\Sigma lD\,(p+1-l) - \Sigma E\,(p-l).\Sigma lE\,(p+1-l)\end{matrix}\right\}\cos\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\Sigma D\,(p+1-l).\Sigma lE\,(p-l) - \Sigma E\,(p+1-l).\Sigma lD\,(p-l)\\ +\Sigma D\,(p-l).\Sigma lD\,(p+1-l) - \Sigma E\,(p-l).\Sigma lD\,(p+1-l)\end{matrix}\right\}\sin\varepsilon$$

hervorgeht, ausserdem findet man leicht

$$2\nu\left(\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}\right) =$$
$$\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\frac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)\,D(p-l).\Sigma lD(p+1-l)+\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)\,E(p-l).\Sigma lE(p+1-l)}{(p-p'\mu)\,(p+1-p'\mu)}\\ +\frac{\Sigma(p+1-\frac{1}{2}l-p'\mu)\,D(p+1-l).\Sigma lD(p-l)+\Sigma(p+1-\frac{1}{2}l-p'\mu)\,E(p+1-l).\Sigma lE(p-l)}{(p-p'\mu)\,(p+1-p'\mu)}\end{matrix}\right\}\cos\varepsilon$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}-\frac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)\,E(p-l).\Sigma lD(p+1-l)-\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)\,D(p-l).\Sigma lE(p+1-l)}{(p-p'\mu)\,(p+1-p'\mu)}\\ -\frac{\Sigma(p+1-\frac{1}{2}l-p'\mu)\,E(p+1-l).\Sigma lD(p-l)-\Sigma(p+1-\frac{1}{2}l-p'\mu)\,D(p+1-l).\Sigma lE(p-l)}{(p-p'\mu)\,(p+1-p'\mu)}\end{matrix}\right\}\sin\varepsilon$$

Substituirt man diese Entwickelungen in (7), so bekommt man die folgenden drei Gleichungen:

$$0 = \Sigma(p-l-p'\mu)\,D(p-l).\Sigma lE(p-l) - \Sigma(p-l-p'\mu)\,E(p-l).\Sigma lD(p-l)$$
$$-(p-p'\mu)\,\Sigma D(p-l).\Sigma lE(p-l) + (p-p'\mu)\,\Sigma E(p-l).\Sigma lD(p-l)$$

$$0 = (p+1-p'\mu)\Sigma(p+1-l-p'\mu)D(p+1-l).\Sigma lD(p-l) - (p-p'\mu)\Sigma(p-l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lD(p+1-l)$$
$$+(p+1-p'\mu)\,(p-p'\mu)\,\Sigma D(p-l).\Sigma lD(p+1-l) - (p+1-p'\mu)\,(p-p'\mu)\,\Sigma D(p+1-l).\Sigma lD(p-l)$$
$$-\Sigma(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)\,D(p-l).\Sigma lD(p+1-l) - \Sigma(p+1-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)\,D(p+1-l).\Sigma lD(p-l)$$
$$+(p+1-p'\mu)\Sigma(p+1-l-p'\mu)E(p+1-l).\Sigma lE(p+1-l) - (p-p'\mu)\Sigma(p-l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lE(p+1-l)$$
$$+(p+1-p'\mu)\,(p-p'\mu)\,\Sigma E(p-l).\Sigma lE(p+1-l) - (p+1-p'\mu)\,(p-p'\mu)\,\Sigma E(p+1-l).\Sigma lE(p-l)$$
$$-\Sigma(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)\,E(p-l).\Sigma lE(p+1-l) - \Sigma(p+1-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)\,E(p+1-l).\Sigma lE(p-l)$$

$$0 = (p+1-p'\mu)\Sigma(p+1-l-p'\mu)E(p+1-l).\Sigma lD(p-l) + (p-p'\mu)\Sigma(p-l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lD(p+1-l)$$
$$-(p+1-p'\mu)\,(p-p'\mu)\,\Sigma E(p-l).\Sigma lD(p+1-l) - (p+1-p'\mu)\,(p-p'\mu)\,\Sigma E(p+1-l).\Sigma lD(p-l)$$
$$+\Sigma(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)\,E(p-l).\Sigma lD(p+1-l) - \Sigma(p+1-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)\,E(p+1-l).\Sigma lD(p-l)$$
$$-(p+1-p'\mu)\Sigma(p+1-l-p'\mu)D(p+1-l).\Sigma lE(p-l) - (p-p'\mu)\Sigma(p-l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lE(p+1-l)$$
$$+(p+1-p'\mu)\,(p-p'\mu)\,\Sigma D(p-l).\Sigma lE(p+1-l) + (p+1-p'\mu)\,(p-p'\mu)\,\Sigma D(p+1-l).\Sigma lE(p-l)$$
$$-\Sigma(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)\,D(p-l).\Sigma lE(p+1-l) + \Sigma(p+1-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)\,D(p+1-l).\Sigma lE(p-l)$$

Die Identität der ersten dieser Gleichungen ist auf den ersten Blick zu erkennen, und die beiden andern stellen sich als specielle Fälle der beiden Gleichungen dar, auf welche wir im Art. 19 hingeführt wurden. Schreibt man nemlich in diesen 0 für i', 1 für i, $p+1$ für p, p für q und p' für q', so verwandeln sie sich in die obigen. Der a. a. O. geführte Beweis der Identität der beiden dortigen Gleichungen erstreckt sich also auch auf die beiden letzten vorstehenden.

22.

Es kommen jetzt die Glieder in Betracht, die von den Ausnahmegliedern der ersten Ordnung entstehen, und zwar geben diese theils Glieder der allgemeinen Form, theils wieder Ausnahmeglieder. Um für diese Entwickelungen die Ausnahmeglieder erster Ordnung zu erhalten, will ich dieselbe Bezeichnung wie im §. 5 (II) anwenden, und demgemäss setzen

$$\begin{aligned} T = & \quad - G(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon) \\ & \tfrac{e}{2}H(0.s) \quad - eH(0.s)\cos(-\eta+\varepsilon) \\ & -F(1,c)\sin\varepsilon - G(2.c)\sin(-\eta+2\varepsilon) - H(0.c)\sin\eta \\ & +F(1,s)\cos\varepsilon + G(2.s)\cos(-\eta+2\varepsilon) + H(0.s)\cos\eta \end{aligned}$$

welches die Glieder sind, aus welchen durch die Integrationen die Ausnahmeglieder, oder die Glieder, die von der allgemeinen Form abweichen, hervorgehen.

In diesen Ausdruck von T habe ich bereits die Relationen eingeführt, die zufolge der Gleichung (19) (II) zwischen dreien seiner Coefficienten statt finden. Wir bekommen hieraus, nachdem wir den Integralen die willkührlichen Constanten nach Anleitung des §. 5 (II) hinzugefügt haben,

$$\begin{aligned} W = & \quad k \quad + G(1.c)\cos(-\eta+\varepsilon) + k_1\cos\eta \\ & + \tfrac{e}{2}H(0,s)\varepsilon - eH(0.s)\sin(-\eta+\varepsilon) + k_2\sin\eta \\ & + F(1.c)\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}G(2.c)\cos(-\eta+2\varepsilon) + H(0.s)\varepsilon\cos\eta \\ & + F(1.s)\sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}G(2.s)\sin(-\eta+2\varepsilon) - H(0.c)\varepsilon\sin\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{W} = & \quad \{k + G(1.c)\} \quad + \tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon \\ & + \{k_1 + F(1.c) + \tfrac{1}{2}G(2,c)\}\cos\varepsilon + H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon \\ & + \{k_2 + F(1.s) + \tfrac{1}{2}G(2.s)\}\sin\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = eH(0.s) - \{k_1 - \tfrac{1}{2}G(2.c)\}\sin\varepsilon - H(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon + \{k_2 - \tfrac{1}{2}G(2.s)\}\cos\varepsilon - H(0.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$\nu = C_0 - \tfrac{e}{2}H(0.s)\,\varepsilon - \tfrac{1}{2}\{k_1 - \tfrac{1}{2}G(2.c) - H(0.c)\}\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\{k_2 - \tfrac{1}{2}G(2.s) - H(0.s)\}\sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$\delta\frac{h_0}{h} = -K - \tfrac{e}{2}H(0.s)\,\varepsilon + \{F(1.c) + G(2.c) + H(0.c)\}\cos\varepsilon + \{F(1.s) + G(2.s) + H(0.s)\}\sin\varepsilon$$

Da die im Art. 51 (II) mit Z_0 bezeichnete Grösse hier durch $G(1.c)$ dargestellt wird, weil ich statt $\varepsilon\sin\varepsilon$ nicht $nt\sin\varepsilon$ einführen werde, indem diese Einführung die folgenden Entwickelungen zusammengesetzter machen würde, so wird hier

$$(11)\qquad \begin{cases} C_0 = -\tfrac{1}{6}(4k + ek_1 + 3G(1.c)) \\ k = \tfrac{1}{3}(k + ek_1) \end{cases}$$

23.

Um die vorstehenden Ausdrücke abzukürzen, setze ich

$$P(1.c) = F(1.c) + \tfrac{1}{2}G(2.c)$$
$$P(1.s) = F(1.s) + \tfrac{1}{2}G(2.s)$$
$$\Pi(1.c) = F(1.c) + G(2.c) + H(0.c)$$
$$\Pi(1.s) = F(1.s) + G(2.s) + H(0.s)$$
$$\lambda_1 = k_1 + P(1.c)$$
$$\lambda_2 = k_2 + P(1.s)$$

wodurch

$$\overline{W} = k + G(1.c) + \lambda_1\cos\varepsilon + \lambda_2\sin\varepsilon + \tfrac{e}{2}H(0.s)\,\varepsilon + H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right) = -\lambda_1\sin\varepsilon + \lambda_2\cos\varepsilon + eH(0.s) + \{\Pi(1.c) - H(0.c)\}\sin\varepsilon - \{\Pi(1.s) - H(0.s)\}\cos\varepsilon - H(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon - H(0.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$\nu = C_0 - \tfrac{1}{2}\lambda_1\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda_2\sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Pi(1.s)\sin\varepsilon - \tfrac{e}{2}H(0.s)\,\varepsilon - \tfrac{1}{2}H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$\delta\frac{h_0}{h} = -K + \Pi(1.c)\cos\varepsilon + \Pi(1.s)\sin\varepsilon - \tfrac{e}{2}H(0.s)\,\varepsilon$$

wird. Multiplicirt man nun den vorstehenden Ausdruck von $\overline{W}$ mit $1 - e\cos\varepsilon$, so ergiebt sich

$$n\frac{d\delta z}{d\varepsilon} = k + G(1.c) - \tfrac{e}{2}\lambda_1 + \{\lambda_1 - ek - eG(1.c)\}\cos\varepsilon + \lambda_2 \sin\varepsilon - \tfrac{e}{2}\lambda_1 \cos 2\varepsilon - \tfrac{e}{2}\lambda_2 \sin 2\varepsilon$$
$$+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon - \tfrac{e}{2} H(0.s)\varepsilon\cos 2\varepsilon$$
$$+ \tfrac{e}{2} H(0.c)\varepsilon \sin 2\varepsilon$$

und hieraus

$$n\delta z = \left(k + G(1.c) - \tfrac{e}{2}\lambda_1\right)\varepsilon + \{\lambda_1 - ek - eG(1.c) - H(0.c)\}\sin\varepsilon - \left\{\lambda_2 - \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0.s)\right\}\cos\varepsilon$$
$$- \tfrac{e}{4}\{\lambda_1 - \tfrac{1}{2}H(0.c)\}\sin 2\varepsilon + \tfrac{e}{4}\{\lambda_2 - \tfrac{1}{2}H(0.s)\}\cos 2\varepsilon$$
$$+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) H(0.s)\varepsilon \sin\varepsilon + H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon - \tfrac{e}{4} H(0.s)\varepsilon \sin 2\varepsilon$$
$$- \tfrac{e}{4} H(0.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

Eliminirt man aus dem ersten Gliede dieses Ausdrucks ε durch die Gleichung

$$\varepsilon = nt + e\sin\varepsilon$$

so wird

$$n\delta z = \left(k + G(1.c) - \tfrac{e}{2}\lambda_1\right)nt + \left\{\left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)\lambda_1 - H(0.c)\right\}\sin\varepsilon - \left\{\lambda_2 - \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0.s)\right\}\cos\varepsilon$$
$$- \tfrac{e}{4}\{\lambda_1 - \tfrac{1}{2}H(0.c)\}\sin 2\varepsilon + \tfrac{e}{4}\{\lambda_2 - \tfrac{1}{2}H(0.s)\}\cos 2\varepsilon$$
$$+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon + H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon - \tfrac{e}{4}H(0.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon$$
$$- \tfrac{e}{4}H(0.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

Zufolge des §. 5 (II) ist in dem mit nt multiplicirten Gliede dieses Ausdruckes der Coefficient von t der Unterschied zwischen der wahren und der der Rechnung zu Grunde gelegten mittleren Bewegung während der Zeiteinheit, es wird also hier

$$\frac{\Delta n}{n} = k + G(1.c) - \tfrac{e}{2}\lambda_1 \qquad (12)$$

und den Entwickelungen ist in Verbindung damit der übrige Theil von $n\delta z$ zu Grunde zu legen, nemlich

$$n\delta z = \left\{\left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)\lambda_1 - H(0.c)\right\}\sin\varepsilon - \left\{\lambda_2 - \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0.s)\right\}\cos\varepsilon$$
$$- \tfrac{e}{4}\{\lambda_1 - \tfrac{1}{2}H(0.c)\}\sin 2\varepsilon + \tfrac{e}{4}\{\lambda_2 - \tfrac{1}{2}H(0.s)\}\cos 2\varepsilon$$
$$+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon + H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon - \tfrac{e}{4}H(0.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon - \tfrac{e}{4}H(0.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

Da unsere zu entwickelnde Bedingungsgleichung (7) so gestellt ist, dass darin $\frac{d\delta z}{dt}$ statt $n\delta z$ vorkommt, so müssen wir den dafür zu substituirenden Ausdruck durch die Differentiation des vorstehenden erlangen. Differentiiren wir diesen zuerst nach ε, so ist das Differential immer noch durch $1 - e\cos\varepsilon$ theilbar, und wir bekommen

$$\frac{d\delta z}{dt} = \tfrac{e}{2}\lambda_1 + \lambda_1\cos\varepsilon + \lambda_2\sin\varepsilon$$
$$+ \tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon + H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$

für den im Folgenden anzuwendenden Ausdruck von $\frac{d\delta z}{dt}$.

24.

Um die allzu grosse Ausdehnung der Formeln zu vermeiden, wollen wir die eben entwickelten Formeln wieder theilweise in die Bedingungsgleichung substituiren, und zwar zuerst die von den willkührlichen Constanten unabhängigen Glieder derselben vornehmen und mit dem allgemeinen Gliede verbinden. Aber auch diese Glieder wollen wir zur Erlangung der möglichsten Kürze nicht sogleich vollständig aufnehmen, sondern davon die mit ε multiplicirten Glieder vorläufig weglassen. Wir setzen daher jetzt mit Weglassung des zweiten allgemeinen Gliedes, welches nur Glieder derselben Form hervorbringen würde,

$$\nu = \tfrac{1}{2} H(1.c)\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2} H(1.s)\sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma l D(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')$$

und bezeichnen die correspondirenden Glieder in X mit

$$\begin{aligned} X = {} & -B(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon) \\ & +A(0.s) \quad +B(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon) \\ & -A(1.c)\sin\varepsilon - B(2.c)\sin(-\eta+2\varepsilon) - C(0.c)\sin\eta \\ & +A(1.s)\cos\varepsilon + B(2.s)\cos(-\eta+2\varepsilon) + C(0.s)\cos\eta \\ & +A(i)\sin(l\eta+(i,i')) \end{aligned}$$

Zufolge der Bedingungsgleichung $X = -2\overline{T}$ und der im vor. Art. eingeführten Bezeichnung erhalten wir hier speciell

$$13. \quad \left\{\begin{aligned} A(0.s)+B(1.s) &= eH(0.s) \\ A(1.c)+B(2.c)+C(0.c) &= -2H(1.c) \\ A(1.s)+B(2.s)+C(0.s) &= -2H(1.s) \end{aligned}\right.$$

25.

Multiplicirt man nun ν mit X, nimmt dabei blos auf die Producte der speciellen Glieder mit den allgemeinen Gliedern Rücksicht und integrirt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} N = {} & \tfrac{1}{4}\Big\{A(1.c)\frac{\Sigma l D(i-l-1)}{i-1-i'\mu} - A(1.c)\frac{\Sigma l D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\Big\}\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu} \\ & + \tfrac{1}{4}\Big\{B(2.c)\frac{\Sigma l D(i-l-1)}{i-1-i'\mu} + B(1.c)\frac{\Sigma l D(i-l)}{i-i'\mu} - C(0.c)\frac{\Sigma l D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\Big\}\frac{\cos(-\eta+(i+1,i'))}{i+1-i'\mu} \\ & + \tfrac{1}{4}\Big\{C(0.c)\frac{\Sigma l D(i-l-1)}{i-1-i'\mu} - B(1.c)\frac{\Sigma l D(i-l)}{i-i'\mu} - B(2.c)\frac{\Sigma l D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\Big\}\frac{\cos(\eta+(i-1,i'))}{i-1-i'\mu} \\ & + \tfrac{1}{4}\Big\{A(1.s)\frac{\Sigma l D(i-l-1)}{i-1-i'\mu} + 2A(0.s)\frac{\Sigma l D(i-l)}{i-i'\mu} + A(1.s)\frac{\Sigma l D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\Big\}\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu} \\ & + \tfrac{1}{4}\Big\{B(2.s)\frac{\Sigma l D(i-l-1)}{i-1-i'\mu} + B(1.s)\frac{\Sigma l D(i-l)}{i-i'\mu} + C(0.s)\frac{\Sigma l D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\Big\}\frac{\sin(-\eta+(i+1,i'))}{i+1-i'\mu} \\ & + \tfrac{1}{4}\Big\{C(0.s)\frac{\Sigma l D(i-l-1)}{i-1-i'\mu} + B(1.s)\frac{\Sigma l D(i-l)}{i-i'\mu} + B(2.s)\frac{\Sigma l D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\Big\}\frac{\sin(\eta+(i-1,i'))}{i-1-i'\mu} \end{aligned}$$

$$-\tfrac{1}{4}\Pi(1.c)\{A(i-1)+A(i+1)\}\frac{\cos(l\eta+(i,i'))}{i-i'\mu}$$
$$\tfrac{1}{4}\Pi(1.s)\{A(i-1)-A(i+1)\}\frac{\sin(l\eta+(i,i'))}{i-i'\mu}$$

und aus diesem Ausdruck ergiebt sich leicht zuerst, dass

$$N-\int\left(\frac{dN}{d\eta}\right)d\varepsilon=\tfrac{1}{4}\{A(1.c)+B(2.c)+C(0.c)\}\left\{\frac{\Sigma lD(i-l-1)}{i-1-i'\mu}-\frac{\Sigma lD(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\right\}\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{4}\{A(1.s)+B(2.s)+C(0.s)\}\left\{\frac{\Sigma lD(i-l-1)}{i-1-i'\mu}+\frac{\Sigma lD(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\right\}\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{2}\{A(0.s)+B(1.s)\}\frac{\Sigma lD(i-l)}{(i-i'\mu)^2}\sin(i,i')$$
$$-\tfrac{1}{4}\Pi(1.c)\,\Sigma'\{A(i-l-1)+A(i-l+1)\}\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{4}\Pi(1.s)\,\Sigma'\{A(i-l-1)-A(i-l+1)\}\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$

wird. Wenden wir hierauf sowohl die allgemeinen Bedingungsgleichungen (10) wie die speciellen Bedingungsgleichungen (13) an, so erhalten wir

$$N-\int\left(\frac{dN}{d\eta}\right)d\varepsilon=-\tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\left\{\frac{\Sigma lD(i-l-1)}{i-1-i'\mu}-\frac{\Sigma lD(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\right\}\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\{\Sigma'(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)+\Sigma'(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{2}\Pi(1.s)\left\{\frac{\Sigma lD(i-l-1)}{i-1-i'\mu}+\frac{\Sigma lD(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\right\}\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{2}\Pi(1.s)\{\Sigma(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)-\Sigma'(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\frac{e}{2}H(0.s)\frac{\Sigma lD(i-l)}{(i-i'\mu)^2}\sin(i,i')$$

womit wieder die beiden ersten Glieder der Bedingungsgleichung (7) entwickelt sind.

26.

Für die Entwickelung der übrigen Glieder haben wir aus dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{d\dot{W}}{d\eta}\right)=eH(0.s)+\{\Pi(1.c)-H(0.c)\}\sin\varepsilon-\{\Pi(1.s)-H(0.s)\}\cos\varepsilon$$
$$+\Sigma lD(i-l)\sin(i,i')$$
$$\frac{d\delta z}{dt}=-\Sigma D(i-l)\cos(i,i')$$
$$\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}=-\tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\cos\varepsilon-\tfrac{1}{2}\Pi(1.s)\sin\varepsilon+\frac{\Sigma(i-\frac{1}{2}l-i'\mu)D(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')$$
$$2\nu=\Pi(1.c)\cos\varepsilon+\Pi(1.s)\sin\varepsilon+\frac{\Sigma lD(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')$$

woraus man leicht

$$\int\left(\frac{d\bar{W}}{d\eta}\right)\frac{d\delta z}{dt}\,d\varepsilon = \tfrac{1}{2}H(1.c)\,\Sigma'\{D(i-l-1)-D(i-l+1)\}\,\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{2}H(1.s)\,\Sigma\{D(i-l-1)+D(i-l+1)\}\,\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{2}H(0.s)\,\Sigma\{D(i-l-1)+2eD(i-l)+D(i-l+1)\}\,\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{2}H(0.c)\,\Sigma\{D(i-l-1)-D(i-l+1)\}\,\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$

und

$$2\nu\left(\nu-\delta\,\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}\right)=$$
$$\tfrac{1}{2}H(1.c)\,\Sigma'\left\{\frac{(i-l-1-i'\mu)\,D(i-l-1)}{i-1-i'\mu}+\frac{(i-l+1-i'\mu)\,D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\right\}\cos(i,i')$$
$$+H(\tfrac{1}{2}1.s)\,\Sigma\left\{\frac{(i-l-1-i'\mu)\,D(i-l-1)}{i-1-i'\mu}-\frac{(i-l+1-i'\mu)\,D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\right\}\sin(i,i')$$

erhält. Substituirt man nun diese Entwickelungen in die Bedingungsgleichung (7), reducirt, und nennt die linke Seite derselben B, so findet man, dass

$$B=-\tfrac{1}{2}H(0.c)\,\Sigma\{D(i-l-1)-D(i-l+1)\}\,\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{2}H(0.s)\,\Sigma\{D(i-l-1)+D(i-l+1)\}\,\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-eH(0.s)\,\frac{\Sigma(i-\frac{1}{2}l-i'\mu)\,D(i-l)}{(i-i'\mu)^2}\sin(i,i')$$

In diesem Falle ist die Bedingungsgleichung also nicht identisch Null geworden, und die Glieder, welche im vorstehenden Ausdruck übrig geblieben sind, müssen im folgenden diejenigen erhalten, gegen welche sie sich aufheben.

27.

Gehen wir nun zu den Gliedern über, die mit ε multiplicirt sind, und verbinden auch diese mit den allgemeinen Gliedern, so dürfen wir für das Product $X\nu$ setzen

$$\nu=-\tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon-\tfrac{1}{2}H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon+\tfrac{1}{2}H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$
$$X=\quad A(i)\sin(l\eta+(i,i'))$$

da die Verbindung des allgemeinen Gliedes von ν mit den obigen speciellen Gliedern von X keine mit ε multiplicirten Glieder hervorbringen kann. Wir bekommen nun aus den vorstehenden Ausdrücken

$$N = \tfrac{1}{4}H(0.s)\{A(i-1)+2eA(i)+A(i+1)\}\frac{\varepsilon\cos(l\eta+(i,i'))}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{4}H(0.c)\{A(i-1)-A(i+1)\}\frac{\varepsilon\sin(l\eta+(i,i'))}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{4}H(0.s)\{A(i-1)+2eA(i)+A(i+1)\}\frac{\sin(l\eta+(i,i'))}{(i-i'\mu)^2}$$
$$-\tfrac{1}{4}H(0.c)\{A(i-1)-A(i+1)\}\frac{\cos(l\eta+(i,i'))}{(i-i'\mu)^2}$$

hieraus

$$\overline{N}-\int\left(\frac{dN}{d\eta}\right)d\varepsilon = \tfrac{1}{4}H(0.s)\,\Sigma'\{A(i-l-1)+2eA(i-l)+A(i-l+1)\}\frac{\varepsilon\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{4}H(0.c)\,\Sigma'\{A(i-l-1)-A(i-l+1)\}\frac{\varepsilon\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{4}H(0.s)\,\Sigma'\{A(i-l-1)+2eA(i-l)+A(i-l+1)\}\frac{\sin(i,i')}{(i-i'\mu)^2}$$
$$-\tfrac{1}{4}H(0.c)\,\Sigma'\{A(i-l-1)-A(i-l+1)\}\frac{\cos(i,i')}{(i-i'\mu)^2}$$

und nach Anwendung der Gleichungen (10)

$$\overline{N}-\int\left(\frac{\overline{dN}}{d\eta}\right)d\varepsilon = -\tfrac{1}{2}H(0.s)\Sigma'\{(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)+2e(i-l-i'\mu)D(i-l)+(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\frac{\varepsilon\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{2}H(0.c)\Sigma'\{(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)-(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\frac{\varepsilon\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{2}H(0.s)\Sigma'\{(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)+2e(i-l-i'\mu)D(i-l)+(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\frac{\sin(i,i')}{(i-i'\mu)^2}$$
$$+\tfrac{1}{2}H(0.c)\Sigma'\{(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)-(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\frac{\cos(i,i')}{(i-i'\mu)^2}$$

Für die übrigen Producte wird jetzt

$$\left(\frac{\overline{dW}}{d\eta}\right) = -H(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon - H(0.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon + \Sigma' lD(i-l)\sin(i,i')$$
$$\frac{d\delta z}{dt} = \frac{e}{2}H(0.s)\varepsilon + H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon - \Sigma' D(i-l)\cos(i,i')$$
$$\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n} = -\tfrac{1}{2}H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon + \frac{\Sigma'(i-\frac{1}{2}l-i'\mu)D(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')$$
$$2\nu = -eH(0.s)\,\varepsilon - H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon + H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon + \frac{\Sigma' lD(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')$$

und hieraus ergiebt sich

$$\int\left(\frac{\overline{dW}}{d\eta}\right)\frac{d\delta z}{dt}d\varepsilon = -\tfrac{1}{2}H(0.s)\,\Sigma'\{(l+1)D(i-l-1)+elD(i-l)+(l-1)D(i-l+1)\}\frac{\varepsilon\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{2}H(0.c)\,\Sigma'\{(l+1)D(i-l-1)-(l-1)D(i-l+1)\}\frac{\varepsilon\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{2}H(0.s)\,\Sigma'\{(l+1)D(i-l-1)+elD(i-l)+(l-1)D(i-l+1)\}\frac{\sin(i,i')}{(i-i'\mu)^2}$$
$$+\tfrac{1}{2}H(0.c)\,\Sigma'\{(l+1)D(i-l-1)-(l-1)D(i-l+1)\}\frac{\cos(i,i'\mu)}{(i-i')^2}$$

$$2\nu\left(\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}\right) = -\tfrac{1}{2}H(0.s)\,\Sigma'\{D(i-l-1)+D(i-l+1)\}\varepsilon\cos(i,i')$$
$$+\tfrac{1}{2}H(0.c)\,\Sigma'\{D(i-l-1)-D(i-l+1)\}\varepsilon\sin(i,i')$$
$$-eH(0.s)\frac{\Sigma'(i-\frac{1}{2}l-i'\mu)D(i-l)}{i-i'\mu}\varepsilon\cos(i,i')$$

Substituiren wir diese Entwickelungen in (7) und nennen die linke Seite dieser Gleichung jetzt B', so erhalten wir

$$\begin{aligned} B' = {} & \tfrac{1}{2}H(0.s)\,\Sigma'\{D(i-l-1) + D(i-l+1)\}\tfrac{\sin(i,i')}{i-i'\mu} \\ & + \tfrac{1}{2}H(0.c)\,\Sigma'\{D(i-l-1) - D(i-l+1)\}\tfrac{\cos(i,i')}{i-i'\mu} \\ & + eH(0.s)\tfrac{\Sigma(i-\frac{1}{2}l-i'\mu)\,D(i-l)}{(i-i'\mu)^2}\sin(i,i'') \end{aligned}$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem des vorhergehenden Artikels, so findet man $B + B' = 0$

Die Bedingungsgleichung (7) ist also auch für die Summe der in diesem und dem vor. Art. berücksichtigten unregelmässigen Glieder identisch Null.

28.

Um diese Entwickelungen zu vervollständigen, müssen wir auch die Glieder betrachten, die aus den Producten der unregelmässigen Glieder in einander entstehen. Sei daher jetzt

$$\begin{aligned} \nu = {} & \tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Pi(1.s)\sin\varepsilon \\ & - \tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon - \tfrac{1}{2}H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon \\ X = {} & - B(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon) \\ & + A(0.s) + B(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon) \\ & - A(1.c)\sin\varepsilon - B(2.c)\sin(-\eta+2\varepsilon) - C(0.c)\sin\eta \\ & + A(1.s)\cos\varepsilon + B(2.s)\cos(-\eta+2\varepsilon) + C(0.s)\cos\eta \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \overline{N} = {} & \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{8}\Pi(1.c)B(1.c) - \Pi(1.s)\left[\tfrac{1}{2}A(0.s) + \tfrac{1}{8}B(1.s)\right] \\ -H(0.s)\left[\tfrac{1}{2}A(0.s) + \tfrac{1}{1\,6}B(1.s) + \tfrac{e}{2}A(1.s) + \tfrac{e}{8}B(2.s)\right] + \tfrac{1}{1\,6}H(0.c)B(1.c) \end{array}\right\}\cos\varepsilon \\ + & \left\{\begin{array}{l} \Pi(1.c)\left[\tfrac{1}{8}A(1.c) + \tfrac{1}{1\,2}B(2.c) + \tfrac{1}{4}C(0.c)\right] - \Pi(1.s)\left[\tfrac{1}{8}A(0.s) + \tfrac{1}{1\,2}B(2.s) + \tfrac{1}{4}C(0.s)\right] \\ -H(0.s)\left[\tfrac{1}{1\,6}A(1.s) + \tfrac{1}{3\,6}B(2.s) + \tfrac{1}{4}C(0.s)\right] + H(0.c)\left[\tfrac{1}{1\,6}A(1.c) + \tfrac{1}{3\,6}B(2.c) + \tfrac{1}{4}C(0.c)\right] \end{array}\right\}\cos 2\varepsilon \\ + & \left\{\begin{array}{l} \Pi(1.c)\left[\tfrac{1}{2}A(0.s) + \tfrac{1}{8}B(1.s)\right] + \tfrac{1}{8}\Pi(1.s)B(1.c) \\ +H(0.s)\left[\tfrac{1}{1\,6}B(1.c) + \tfrac{e}{2}A(1.c) + \tfrac{e}{8}B(2.c)\right] + H(0.c)\left[\tfrac{1}{2}A(0.s) + \tfrac{1}{1\,6}B(1.s)\right] \end{array}\right\}\sin\varepsilon \\ + & \left\{\begin{array}{l} \Pi(1.c)\left[\tfrac{1}{8}A(1.s) + \tfrac{1}{1\,2}B(2.s) + \tfrac{1}{4}C(0.s)\right] + \Pi(1.s)\left[\tfrac{1}{8}A(1.c) + \tfrac{1}{1\,2}B(2.c) + \tfrac{1}{4}C(0.c)\right] \\ +H(0.s)\left[\tfrac{1}{1\,6}A(1.c) + \tfrac{1}{3\,6}B(2.c) + \tfrac{1}{4}C(0.c)\right] + H(0.c)\left[\tfrac{1}{1\,6}A(1.s) + \tfrac{1}{3\,6}B(2.s) + \tfrac{1}{4}C(0.s)\right] \end{array}\right\}\sin 2\varepsilon \\ + & \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{4}\Pi(1.c)A(1.s) - \tfrac{1}{4}\Pi(1.s)A(1.c) \\ -H(0.s)\left[\tfrac{e}{2}B(1.c) + \tfrac{1}{4}B(2.c) - \tfrac{1}{4}C(0.c)\right] + H(0.c)\left[\tfrac{1}{4}B(2.s) - \tfrac{1}{4}C(0.s)\right] \end{array}\right\}\varepsilon \end{aligned}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}H(1.c)B(1.s)-\frac{1}{4}H(1.s)B(1.c)\\ -H(0.s)\left[\frac{1}{8}B(1.c)+\frac{e}{2}A(1.c)+\frac{e}{4}B(2.c)\right]-H(0.c)\left[\frac{1}{2}A(0.s)+\frac{1}{8}B(1.s)\right]\end{array}\right\}\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\tfrac{1}{8}A(1.c)+\tfrac{1}{1\,2}B(2.c)+\tfrac{1}{4}C(0.c)\right]+H(0.c)\right]\tfrac{1}{8}A(1.s)+\tfrac{1}{1\,2}B(2.s)+\tfrac{1}{4}C(0.s)]\}\,\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}H(1.c)B(1.c)+\frac{1}{4}H(1.s)B(1.s)\\ -H(0.s)\left[\frac{1}{2}A(0.s)+\frac{1}{8}B(1.s)+\frac{e}{2}A(1.s)+\frac{e}{4}B(2.s)\right]+\frac{1}{8}H(0.c)B(1.c)\end{array}\right\}\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\tfrac{1}{8}A(1.s)+\tfrac{1}{1\,2}B(2.s)+\tfrac{1}{4}C(0.s)\right]-H(0.c)\left[\tfrac{1}{8}A(1.c)+\tfrac{1}{1\,2}B(2.c)+\tfrac{1}{4}C(0.c)\right]\right\}\varepsilon\sin 2\varepsilon$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\tfrac{e}{4}A(0.s)+\tfrac{1}{8}A(1.s)\right]+\tfrac{1}{8}H(0.c)A(1.c)\right\}\varepsilon^2$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\tfrac{1}{8}B(1.s)+\tfrac{e}{4}C(0.s)\right]+\tfrac{1}{8}H(0.c)B(1.c)\right\}\varepsilon^2\cos\varepsilon$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\tfrac{1}{8}B(1.c)-\tfrac{e}{4}C(0.c)\right]-\tfrac{1}{8}H(0.c)B(1.s)\right\}\varepsilon^2\sin\varepsilon$$

und

$$\int\left(\frac{dN}{d\eta}\right)d\varepsilon=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{8}H(1.c)B(1.c)+\frac{3}{8}H(1.s)B(1.s)\\ +H(0.s)\left[\frac{7}{1\,6}B(1.s)+\frac{3e}{8}B(2.s)+\frac{e}{2}C(0.s)\right]+\frac{1}{1\,6}H(0.c)B(1.c)\end{array}\right\}\cos\varepsilon$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-H(1.c)\left[\frac{1}{2\,4}B(2.c)-\frac{1}{8}C(0.c)\right]+H(1.s)\left[\frac{1}{2\,4}B(2.s)-\frac{1}{8}C(0.s)\right]\\ +H(0.s)\left[\frac{5}{1\,4\,4}B(2.s)-\frac{3}{1\,6}C(0.s)\right]-H(0.c)\left[\frac{5}{1\,4\,4}B(2.c)-\frac{3}{1\,6}C(0.c)\right]\end{array}\right\}\cos 2\varepsilon$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{3}{8}H(1.c)B(1.s)+\frac{1}{8}H(1.s)B(1.c)\\ +H(0.s)\left[\frac{1}{1\,6}B(1.c)-\frac{3e}{8}B(2.c)-\frac{e}{2}C(0.c)\right]-\frac{7}{1\,6}H(0.c)B(1.s)\end{array}\right\}\sin\varepsilon$$

$$-\left\{\begin{array}{l}H(1.c)\left[\frac{1}{2\,4}B(2.s)-\frac{1}{8}C(0.s)\right]+H(1.s)\left[\frac{1}{2\,4}B(2.c)-\frac{1}{8}C(0.c)\right]\\ +H(0.s)\left[\frac{5}{1\,4\,4}B(2.c)-\frac{3}{1\,6}C(0.c)\right]+H(0.c)\left[\frac{5}{1\,4\,4}B(2.s)-\frac{3}{1\,6}C(0.s)\right]\end{array}\right\}\sin 2\varepsilon$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{4}H(1.c)\left[B(2.s)+C(0.s)\right]+\frac{1}{4}H(1.s)\left[B(2.c)+C(0.c)\right]\\ +H(0.s)\left[-\frac{e}{2}B(1.c)-\frac{1}{4}B(2.c)+\frac{1}{4}C(0.c)\right]+H(0.c)\left[\frac{1}{4}B(2.s)-\frac{1}{4}C(0.s)\right]\end{array}\right\}\varepsilon$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}H(1.c)B(1.s)-\frac{1}{4}H(1.s)B(1.c)\\ +H(0.s)\left[-\frac{1}{8}B(1.c)+\frac{e}{4}B(2.c)+\frac{e}{2}C(0.c)\right]+\frac{3}{8}H(0.c)B(1.s)\end{array}\right\}\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$+\left\{H(0.s)\left[\tfrac{1}{2\,4}B(2.c)-\tfrac{1}{8}C(0.c)\right]+H(0.c)\left[\tfrac{1}{2\,4}B(2.s)-\tfrac{1}{8}C(0.s)\right]\right\}\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}H(1.c)B(1.c)+\frac{1}{4}H(1.s)B(1.s)\\ +H(0.s)\left[\frac{3}{8}B(1.s)+\frac{e}{4}B(2.s)+\frac{e}{2}C(0.s)\right]+\frac{1}{8}H(0.c)B(1.c)\end{array}\right\}\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$+\left\{H(0.s)\left[\tfrac{1}{2\,4}B(2.s)-\tfrac{1}{8}C(0.s)\right]-H(0.c)\left[\tfrac{1}{2\,4}B(2.c)-\tfrac{1}{8}C(0.c)\right]\right\}\varepsilon\sin 2\varepsilon$$

$$+\left\{H(0.s)\left[\tfrac{e}{4}B(1.s)+\tfrac{1}{8}B(2.s)+\tfrac{1}{8}C(0.s)\right]+H(0.c)\left[\tfrac{1}{8}B(2.c)+\tfrac{1}{8}C(0.c)\right]\right\}\varepsilon^2$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\tfrac{1}{8}B(1.s)+\tfrac{e}{4}C(0.s)\right]+\tfrac{1}{8}H(0.c)B(1.c)\right\}\varepsilon^2\cos\varepsilon$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\tfrac{1}{8}B(1.c)-\tfrac{e}{4}C(0.c)\right]-\tfrac{1}{8}H(0.c)B(1.s)\right\}\varepsilon^2\sin\varepsilon$$

hervorgeht. Mit Zuziehung der Gleichungen (13) ergiebt sich hieraus

$$\begin{aligned}
\overline{N}-\int\left(\overline{\frac{dN}{d\eta}}\right)d\varepsilon = &\left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.s)\right\}\cos\varepsilon\\
&+\begin{Bmatrix}-\frac{1}{4}\Pi(1.c)\Pi(1.c)+\frac{1}{4}\Pi(1.s)\Pi(1.s)\\+\frac{1}{8}H(0.s)\Pi(1.s)-\frac{1}{8}H(0.c)\Pi(1.c)\end{Bmatrix}\cos 2\varepsilon\\
&-\left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.c)-\tfrac{e}{2}H(0.c)H(0.s)\right\}\sin\varepsilon\\
&-\left\{\tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\Pi(1.s)+\tfrac{1}{8}H(0.s)\Pi(1.c)+\tfrac{1}{8}H(0.c)\Pi(1.s)\right\}\sin 2\varepsilon\\
&+\left\{eH(0.s)\Pi(1.c)-\tfrac{e}{2}H(0.c)H(0.s)\right\}\varepsilon\cos\varepsilon\\
&+\left\{\tfrac{1}{4}H(0.s)\Pi(1.c)+\tfrac{1}{4}H(0.c)\Pi(1.s)\right\}\varepsilon\cos 2\varepsilon\\
&-\left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.s)-eH(0.s)\Pi(1.s)\right\}\varepsilon\sin\varepsilon\\
&+\left\{\tfrac{1}{4}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{1}{4}H(0.c)\Pi(1.c)\right\}\varepsilon\sin 2\varepsilon\\
&-\left\{\tfrac{e^2}{4}H(0.s)H(0.s)-\tfrac{1}{4}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{1}{4}H(0.c)\Pi(1.c)\right\}\varepsilon^2
\end{aligned}$$

Die Factoren der übrigen Producte sind jetzt

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\frac{dW}{d\eta}}\right) &= eH(0.s) + \{\Pi(1.c)-H(0.c)\}\sin\varepsilon - \{\Pi(1.s)-H(0.s)\}\cos\varepsilon\\
&\quad - H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon - H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon\\
\frac{d\delta z}{dt} &= \tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon + H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon\\
\left(\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}\right) &= -\tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\cos\varepsilon-\tfrac{1}{2}\Pi(1.s)\sin\varepsilon\\
&\quad -\tfrac{1}{2}H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon+\tfrac{1}{2}H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon\\
2\nu &= \Pi(1.c)\cos\varepsilon+\Pi(1.s)\sin\varepsilon\\
&\quad -eH(0.s)\varepsilon - H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon+H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon
\end{aligned}$$

und diese geben

$$\begin{aligned}
\int\left(\overline{\frac{dW}{d\eta}}\right)\frac{d\delta z}{dt}d\varepsilon = &-\left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.s)\right\}\cos\varepsilon\\
&-\left\{\tfrac{1}{8}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{1}{8}H(0.c)\Pi(1.c)\right\}\cos 2\varepsilon\\
&+\left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.c)-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.c)\right\}\sin\varepsilon\\
&+\left\{\tfrac{1}{8}H(0.s)\Pi(1.c)+\tfrac{1}{8}H(0.c)\Pi(1.s)\right\}\sin 2\varepsilon\\
&-\left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.c)-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.c)\right\}\varepsilon\cos\varepsilon\\
&-\left\{\tfrac{1}{4}H(0.s)\Pi(1.c)+\tfrac{1}{4}H(0.c)\Pi(1.s)\right\}\varepsilon\cos 2\varepsilon\\
&-\left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.s)\right\}\varepsilon\sin\varepsilon\\
&-\left\{\tfrac{1}{4}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{1}{4}H(0.c)\Pi(1.c)\right\}\varepsilon\sin 2\varepsilon\\
&-\begin{Bmatrix}\frac{1}{4}H(0.s)\Pi(1.s)+\frac{1}{4}H(0.c)\Pi(1.c)\\-\frac{1}{4}(1+e^2)H(0.s)H(0.s)-\frac{1}{4}H(0.c)H(0.c)\end{Bmatrix}\varepsilon^2\\
&+\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.s)\varepsilon^2\cos\varepsilon\\
&+\left\{\tfrac{1}{4}H(0.s)H(0.s)-\tfrac{1}{4}H(0.c)H(0.c)\right\}\varepsilon^2\cos 2\varepsilon\\
&-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.c)\varepsilon^2\sin\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{2}H(0.s)H(0.c)\varepsilon^2\sin 2\varepsilon
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2\nu\left(\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}\right) = &-\{\tfrac{1}{4}\Pi(1.c)\Pi(1.c)-\tfrac{1}{4}\Pi(1.s)\Pi(1.s)\}\cos 2\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\Pi(1.s)\sin 2\varepsilon\\
&+\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon\\
&+\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon\\
&+\{\tfrac{1}{4}H(0.s)H(0.s)+\tfrac{1}{4}H(0.c)H(0.c)\}\,\varepsilon^2\\
&+\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.s)\,\varepsilon^2\cos\varepsilon\\
&+\{\tfrac{1}{4}H(0.s)H(0.s)-\tfrac{1}{4}H(0.c)H(0.c)\}\,\varepsilon^2\cos 2\varepsilon\\
&-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.c)\,\varepsilon^2\sin\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{2}H(0.s)H(0.c)\,\varepsilon^2\sin 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

Substituirt man diese Entwickelungen in die Bedingungsgleichung (7), so wird sie wieder identisch Null, und hiemit sind alle Combinationen derjenigen Glieder, welche die willkührlichen Constanten nicht enthalten, in Betracht gezogen.

In Bezug auf die zuletzt entwickelte Combination ist zu bemerken, dass zufolge der Erklärung des Art. 20 auch die hier in den Integralen und Producten entstandenen constanten Glieder ausser Betracht gelassen werden mussten.

29.

Gehen wir jetzt zu den Gliedern über, die von den willkührlichen Constanten abhängen, und verbinden sie zuerst mit den allgemeinen Gliedern, dann müssen wir um $X\nu$ zu erhalten,

$$\nu = C_0-\tfrac{1}{2}\lambda_1\cos\varepsilon-\tfrac{1}{2}\lambda_2\sin\varepsilon$$
$$X = A(i)\sin(l\eta+(i,i'))$$

setzen, und erhalten damit

$$
\begin{aligned}
N = &-C_0\frac{A(i)}{i-i'\mu}\cos(l\eta+(i,i'))\\
&+\frac{\frac{1}{4}\lambda_1}{i-i'\mu}\{A(i-1)+A(i+1)\}\cos(l\eta+(i,i'))\\
&-\frac{\frac{1}{4}\lambda_2}{i-i'\mu}\{A(i-1)-A(i+1)\}\sin(l\eta+(i,i'))
\end{aligned}
$$

woraus nach Berücksichtigung der Gleichungen (10)

$$
\begin{aligned}
\overline{N}-\int\left(\overline{\frac{dN}{d\eta}}\right)d\varepsilon = &\,2C_0\frac{\Sigma(i-l-i'\mu)D(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')\\
&-\frac{\frac{1}{2}\lambda_1}{i-i'\mu}\Sigma\{(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)+(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\cos(i,i')\\
&+\frac{\frac{1}{2}\lambda_2}{i-i'\mu}\Sigma\{(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)-(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\sin(i,i')
\end{aligned}
$$

hervorgeht. Für die übrigen Producte wird in diesem Falle

$$\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = -\lambda_1 \sin\varepsilon + \lambda_2 \cos\varepsilon + \Sigma' lD(i-l) \sin(i,i')$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = \tfrac{e}{2}\lambda_1 + \lambda_1 \cos\varepsilon + \lambda_2 \sin\varepsilon - \Sigma' D(i-l) \cos(i,i')$$

$$\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n} = \left(C_0 + K + \frac{\Delta n}{n}\right) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda_2 \sin\varepsilon + \frac{\Sigma'(i-\frac{1}{2}l-i'\mu)D(i-l)}{i-i'\mu} \cos(i,i')$$

$$2\nu = 2C_0 - \lambda_1 \cos\varepsilon - \lambda_2 \sin\varepsilon + \frac{\Sigma' lD(i-l)}{i-i'\mu} \cos(i,i')$$

und hiemit wird

$$\int\left(\frac{d\bar{W}}{d\eta}\right)\frac{d\delta z}{dt}\,d\varepsilon = -\frac{\frac{1}{2}\lambda_1}{i-i'\mu}\Sigma'\{(l+1)D(i-l-1) + lD(i-l) + (l-1)D(i-l+1)\}\cos(i,i')$$
$$-\frac{\frac{1}{2}\lambda_2}{i-i'\mu}\Sigma'\{(l+1)D(i-l-1) - (l-1)D(i-l+1)\}\sin(i,i')$$

$$2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) = 2C_0\,\Sigma D(i-l)\cos(i,i')$$
$$+\left(K + \frac{\Delta n}{n}\right)\frac{\Sigma' lD(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')$$
$$-\tfrac{1}{2}\lambda_1\Sigma'\{D(i-l-1) + D(i-l+1)\}\cos(i,i')$$
$$-\tfrac{1}{2}\lambda_2\Sigma'\{D(i-l-1) - D(i-l+1)\}\sin(i,i')$$

erhalten. Substituirt man diese Entwickelungen in (7), so folgt daraus, dass

$$2C_0 + K + \frac{\Delta n}{n} + \tfrac{e}{2}\lambda_1 = 0$$

sein muss. Die Ausdrücke (11) und (12) geben zu dem Ende

$$2C_0 = -\tfrac{1}{3}k - \tfrac{e}{3}k_1 - G(1.c)$$
$$K = \tfrac{1}{3}k + \tfrac{e}{3}k_1$$
$$\frac{\Delta n}{n} = k + G(1.c) - \tfrac{e}{2}\lambda_1$$

woraus in der That

$$2C_0 + K + \frac{\Delta n}{n} + \tfrac{e}{2}\lambda_1 = 0 \qquad (14)$$

folgt. Die Bedingungsgleichung (7) wird also auch für diese Glieder identisch Null.

30.

Combiniren wir jetzt die von den willkührlichen Constanten abhängigen Glieder mit den unregelmässigen und von diesen Constanten unabhängigen Gliedern, so wird für $X\nu$

$$\nu = C_0 - \tfrac{1}{2}\lambda_1 \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda_2 \sin\varepsilon$$
$$X = -B(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon)$$
$$+A(0.s) + B(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon)$$
$$-A(1.c)\sin\varepsilon - B(2.c)\sin(-\eta+2\varepsilon) + C(0.c)\sin\eta$$
$$+A(1.s)\cos\varepsilon + B(2.s)\cos(-\eta+2\varepsilon) + C(0.s)\cos\eta$$

woraus

$$
\begin{aligned}
N = & \left\{ \begin{array}{l} C_0 B(1.c) - \frac{1}{4}\lambda_1 B(2.c) - \frac{1}{4}\lambda_1 C(0.c) \\ \qquad - \frac{1}{4}\lambda_2 B(2.s) + \frac{1}{4}\lambda_2 C(0.s) \end{array} \right\} \cos(-\eta+\varepsilon \\
+ & \left\{ \begin{array}{l} C_0 B(1.s) - \frac{1}{4}\lambda_1 B(2.s) - \frac{1}{4}\lambda_1 C(0.s) \\ \qquad + \frac{1}{4}\lambda_2 B(2.c) + \frac{1}{4}\lambda_2 C(0.c) \end{array} \right\} \sin(-\eta+\varepsilon) \\
+ & \left\{ C_0 A(1.c) + \tfrac{1}{2}\lambda_2 A(0.s) \right\} \cos\varepsilon \\
+ & \left\{ \tfrac{1}{2} C_0 B(2.c) - \tfrac{1}{8}\lambda_1 B(1.c) + \tfrac{1}{8}\lambda_2 B(1.s) \right\} \cos(-\eta+2\varepsilon) \\
+ & \left\{ C_0 A(1.s) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 A(0.s) \right\} \sin\varepsilon \\
+ & \left\{ \tfrac{1}{2} C_0 B(2.s) - \tfrac{1}{8}\lambda_1 B(1.s) - \tfrac{1}{8}\lambda_2 B(1.c) \right\} \sin(-\eta+2\varepsilon) \\
- & \left\{ \tfrac{1}{8}\lambda_1 A(1.c) - \tfrac{1}{8}\lambda_2 A(1.s) \right\} \cos 2\varepsilon \\
- & \left\{ \tfrac{1}{12}\lambda_1 B(2.c) - \tfrac{1}{12}\lambda_2 B(2.s) \right\} \cos(-\eta+3\varepsilon) \\
- & \left\{ \tfrac{1}{4}\lambda_1 C(0.c) - \tfrac{1}{4}\lambda_2 C(0.s) \right\} \cos(\eta+\varepsilon) \\
- & \left\{ \tfrac{1}{8}\lambda_1 A(1.s) + \tfrac{1}{8}\lambda_2 A(1.c) \right\} \sin 2\varepsilon \\
- & \left\{ \tfrac{1}{12}\lambda_1 B(2.s) + \tfrac{1}{12}\lambda_2 B(2.c) \right\} \sin(-\eta+3\varepsilon) \\
- & \left\{ \tfrac{1}{4}\lambda_1 C(0.s) + \tfrac{1}{4}\lambda_2 C(0.c) \right\} \sin(\eta+\varepsilon) \\
+ & \left\{ C_0 A(0.s) - \tfrac{1}{4}\lambda_1 A(1.s) + \tfrac{1}{4}\lambda_2 A(1.c) \right\} \varepsilon \\
+ & \left\{ C_0 C(0.s) - \tfrac{1}{4}\lambda_1 B(1.s) + \tfrac{1}{4}\lambda_2 B(1.c) \right\} \varepsilon\cos\eta \\
- & \left\{ C_0 C(0.c) + \tfrac{1}{4}\lambda_1 B(1.c) + \tfrac{1}{4}\lambda_2 B(1.s) \right\} \varepsilon\sin\eta
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\overline{N} - \int\left(\frac{d\overline{N}}{d\eta}\right) d\varepsilon = & \left\{ -2C_0 \Pi(1.c) + \tfrac{e}{2}\lambda_2 H(0.s) \right\} \cos\varepsilon \\
& + \left\{ \tfrac{1}{4}\lambda_1 \Pi(1.c) - \tfrac{1}{4}\lambda_2 \Pi(1.s) \right\} \cos 2\varepsilon \\
& + \left\{ -2C_0 \Pi(1.s) - \tfrac{e}{2}\lambda_1 H(0.s) \right\} \sin\varepsilon \\
& + \left\{ \tfrac{1}{4}\lambda_1 \Pi(1.s) + \tfrac{1}{4}\lambda_2 \Pi(1.c) \right\} \sin 2\varepsilon \\
& + \left\{ e C_0 H(0.s) + \tfrac{1}{2}\lambda_1 \Pi(1.s) - \tfrac{1}{2}\lambda_2 \Pi(1.c) \right\} \varepsilon
\end{aligned}
$$

hervorgeht. Für die übrigen Producte ist jetzt

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right) = & -\lambda_1 \sin\varepsilon + \lambda_2 \cos\varepsilon \\
& + eH(0.s) + \{\Pi(1.c) - H(0.c)\}\sin\varepsilon - \{\Pi(1.s) - H(0.s)\}\cos\varepsilon \\
& \qquad - H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon \qquad - \Pi(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\delta z}{dt} = & \ \tfrac{e}{2}\lambda_1 + \lambda_1\cos\varepsilon + \lambda_2\sin\varepsilon \\
& + \tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon + H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n} = & \left(C_0 + K + \frac{\Delta n}{n}\right) - \tfrac{1}{2}\lambda_1\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda_2\sin\varepsilon \\
& - \tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\Pi(1.s)\sin\varepsilon \\
& - \tfrac{1}{2}H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\nu = & \ 2C_0 - \lambda_1\cos\varepsilon - \lambda_2\sin\varepsilon \\
& + \Pi(1.c)\cos\varepsilon + \Pi(1.s)\sin\varepsilon \\
& + eH(0.s)\varepsilon + H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon
\end{aligned}
$$

und mit diesen Werthen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)\frac{d\delta z}{dt}\,d\varepsilon = &-\tfrac{e}{2}\{\lambda_1 \Pi(1.c)+\lambda_2 H(0.s)\}\cos\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{4}\{\lambda_1 \Pi(1.c)-\lambda_2 \Pi(1.s)\}\cos 2\varepsilon\\
&-\tfrac{e}{2}\lambda_1\{\Pi(1.s)- H(0.s)\}\sin\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{4}\{\lambda_1 \Pi(1.s)+\lambda_2 \Pi(1.c)\}\sin 2\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{2}\{\lambda_1[\Pi(1.s)-(1+e^2)H(0.s)]-\lambda_2[\Pi(1.c)-H(0.c)]\}\varepsilon\\
&+e\lambda_1 H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon\\
&+\tfrac{1}{2}\{\lambda_1 H(0.s)+\lambda_2 H(0.c)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon\\
&-\tfrac{e}{2}\{\lambda_1 H(0.c)-\lambda_2 H(0.s)\}\varepsilon\sin\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{2}\{\lambda_1 H(0.c)-\lambda_2 H(0.s)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\nu\left(\nu-\delta\tfrac{h_0}{h}+\tfrac{\Delta n}{n}\right) = &\left(K+\tfrac{\Delta n}{n}\right)\Pi(1.c)\cos\varepsilon+\left(K+\tfrac{\Delta n}{n}\right)\Pi(1.s)\sin\varepsilon\\
&+\left\{-e\left(C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}\right)H(0.s)+\tfrac{1}{2}\lambda_1 H(0.s)-\tfrac{1}{2}\lambda_2 H(0.s)\right\}\varepsilon\\
&-\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}-\tfrac{e}{2}\lambda_1\right)H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon\\
&+\tfrac{1}{2}\lambda_1 H(0.s)+\lambda_2 H(0.c)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon\\
&+\left\{\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}\right)H(0.c)+\tfrac{e}{2}\lambda_2 H(0.s)\right\}\varepsilon\sin\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{2}\{\lambda_1 H(0.c)-\lambda_2 H(0.s)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Substituirt man diese in (7), so findet man

$$\begin{aligned}
0 = &-\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}+\tfrac{e}{2}\lambda_1\right)\Pi(1.c)\cos\varepsilon\\
&-\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}+\tfrac{e}{2}\lambda_1\right)\Pi(1.s)\sin\varepsilon\\
&+e\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}+\tfrac{e}{2}\lambda_1\right)H(0.s)\,\varepsilon\\
&+\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}+\tfrac{e}{2}\lambda_1\right)H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon\\
&-\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}+\tfrac{e}{2}\lambda_1\right)H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon
\end{aligned}$$

wo wieder jeder Coefficient vermöge der Gleichung (14) identisch Null ist.

31.

Wir haben, um alle Gattungen von Gliedern zu erschöpfen, nun nur noch die von den willkührlichen Constanten abhängigen Glieder mit den ähnlichen zu verbinden, und für diese Combinationen ist sogleich einzusehen, dass

$$\overline{N}-\int\left(\frac{d\overline{N}}{d\eta}\right)d\varepsilon = 0$$

wird, da X die willkührlichen Constanten nicht enthält. Für die übrigen Producte wird jetzt

$$\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = -\lambda_1 \sin\varepsilon + \lambda_2 \cos\varepsilon$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = \frac{e}{2}\lambda_1 + \lambda_1 \cos\varepsilon + \lambda_2 \sin\varepsilon$$

$$\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n} = \left(C_0 + K + \frac{\Delta n}{n}\right) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda_2 \sin\varepsilon$$

$$2\nu = 2C_0 - \lambda_1 \cos\varepsilon - \lambda_2 \sin\varepsilon$$

wodurch

$$\int\left(\frac{dW}{d\eta}\right)\frac{d\delta z}{dt}\,d\varepsilon = \frac{e}{2}\lambda_1^2 \cos\varepsilon + \frac{e}{2}\lambda_1\lambda_2 \sin\varepsilon + \tfrac{1}{4}\{\lambda_1^2 - \lambda_2^2\}\cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 \sin 2\varepsilon$$

$$2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) = -\left(2C_0 + K + \frac{\Delta n}{n}\right)\lambda_1 \cos\varepsilon - \left(2C_0 + K + \frac{\Delta n}{n}\right)\lambda_2 \sin\varepsilon + \tfrac{1}{4}\{\lambda_1^2 - \lambda_2^2\}\cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 \sin 2\varepsilon$$

wird. Die Substitution dieser Ausdrücke in (7) führt auf die Gleichung

$$0 = \left(2C_0 + K + \frac{\Delta n}{n} + \frac{e}{2}\lambda_1\right)\lambda_1 \cos\varepsilon + \left(2C_0 + K + \frac{\Delta n}{n} + \frac{e}{2}\lambda_1\right)\lambda_2 \sin\varepsilon$$

die sich wieder vermöge (14) als identisch Null erweist. Also die Gleichung (7) ist für je zwei Gattungen der darin vorkommenden Glieder identisch Null.

32.

Ich werde jetzt noch zwei Sätze beweisen, die bei der Berechnung der von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Glieder in Betracht kommen.

»In der Entwickelung der Function

$$\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right)\frac{an\delta z}{r} - \left(\frac{dW}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}\cdot\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von ε ist das ε^2 oder n^2t^2 proportionale Glied Null.«

Das genannte Glied kann nur aus der Multiplication der in den Factoren bereits mit ε oder nt multiplicirten Glieder mit einander entstehen, und aus dem Art. 23 folgt, dass diese die folgenden sind.

$$\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = -H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right) = -H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon + H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$n\delta z = \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon + H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon - \frac{e}{4}H(0.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon - \frac{e}{4}H(0.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

und hieraus folgt, wenn wir in den Producten die Glieder weglassen, die auf keinen Fall in der oben genannten Function ein ε^2 proportionales Glied hervorbringen können,

$$\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right) n\delta z = -H(0.s)\,(H0.c)\left\{\frac{e^2}{4} + \left(1-\frac{e^2}{4}\right)\cos 2\varepsilon - \frac{e}{4}\cos 3\varepsilon\right\}\varepsilon^2$$

$$\left(\frac{dW}{d\eta}\right) n\delta z = -H(0.s)\,H(0.c)\left\{\left(1-\frac{e^2}{4}\right)\sin 2\varepsilon - \frac{e}{4}\sin 3\varepsilon\right\}\varepsilon^2$$

Aus der mehrmals angewandten Reihe

$$\frac{a}{r}\cos\varphi = 1 + 2\beta\cos\varepsilon + 2\beta^2\cos 2\varepsilon + 2\beta^3\cos 3\varepsilon + \ldots$$

wo $\beta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ist, folgt

$$\frac{a^2 e\sin\varepsilon}{r^2}\cos\varphi = 2\beta\sin\varepsilon + 4\beta^2\sin 2\varepsilon + 6\beta^3\sin 3\varepsilon + \ldots$$

und hiemit wird

$$\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right)\frac{an\delta z}{r} - \left(\frac{dW}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}\cdot\frac{ae\sin\varepsilon}{r} =$$
$$-\frac{H(0.c)\,H(0.c)}{\cos\varphi}\left\{\frac{e^2}{4} - \beta^2\left(1-\frac{e^2}{4}\right) + \beta^3\frac{e}{2}\right\}\varepsilon^2$$

wenn wir blos auf das ε^2 proportionale Glied Rücksicht nehmen. Dem obigen Satze zufolge muss also

$$\frac{e^2}{4} - \beta^2\left(1-\frac{e^2}{4}\right) - \beta^3\frac{e}{2} = 0$$

sein; es ist aber

$$e = \frac{2\beta}{1+\beta^2}$$

substituirt man diesen Werth, so wird

$$\frac{e^2}{4} - \beta^2\left(1-\frac{e^2}{4}\right) + \beta^3\frac{e}{2} = \frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2} - \beta^2\left(1-\frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2}\right) + \frac{\beta^4}{1+\beta^2} =$$
$$\frac{1}{(1+\beta^2)^2}\left\{\beta^2 - \beta^2(1+\beta^2+\beta^4) + \beta^4(1+\beta^2)\right\} = 0$$

W. Z. B. W.

33.

»In der Entwickelung der im §. 1 (I) mit Γ bezeichneten Function sind keine mit ε^2 oder n^2t^2 multiplicirte Glieder vorhanden.«

Aus der Gleichung (23) (I) folgt leicht, dass

$$d\Gamma = \frac{1}{2\cos\varphi\cos i}\,\frac{r}{a}\cdot\frac{u}{\cos i}\cdot a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)d\varepsilon$$

ist, und aus diesem Ausdruck giebt sich sogleich zu erkennen, dass, wenn in Γ Glieder vorhanden sind, die mit ε^2 oder t^2 multiplicirt sind, diese sich nothwendig auf ein ε^2 oder t^2 proportionales Glied beschränken

müssen. Der Beweis des obigen Satzes reducirt sich also auf den Beweis, dass in $d\Gamma$ kein ε oder t proportionales Glied vorhanden ist, und ein solches kann nur aus den im Ausdruck von $\frac{ru}{a\cos i}$ befindlichen mit ε multiplicirten Gliedern entstehen, da im Ausdruck von $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ keine solche Glieder vorhanden sind.

Aus dem §. 5 (II) erhalten wir mit bloser Rücksicht auf diese Glieder

$$\frac{u}{\cos i} = -eV(0.s)\varepsilon - V(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon - V(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon$$

multipliciren wir diese mit dem Ausdruck $1-e\cos\varepsilon$ von $\frac{r}{a}$, so ergiebt sich

$$\frac{ru}{a\cos i} = -\tfrac{3e}{2}V(0.s)\varepsilon - V(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon + (1+e^2)V(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon + \tfrac{e}{2}V(0.c)\varepsilon\sin 2\varepsilon - \tfrac{e}{2}V(0.s)\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

Setzen wir nun, ebenfalls in den im §. 5 (II) angewandten Bezeichnungen,

$$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \tfrac{1}{2}d(0.c) + d(1.s)\sin\varepsilon + d(1.c)\cos\varepsilon + d(2.s)\sin 2\varepsilon + d(2.c)\cos 2\varepsilon$$

so haben wir in dieser Function alle Glieder aufgenommen, die durch Multiplication mit dem vorhergehenden Ausdruck in $d\Gamma$ Glieder hervorbringen können, die ε proportional sind. Nach der Ausführung der Multiplication werden diese Glieder

$$2\frac{d\Gamma}{d\varepsilon}\cos i\cos\varphi = -V(0.s)\left\{\tfrac{3e}{4}d(0.c) - \tfrac{1+e^2}{2}d(1.c) + \tfrac{e}{4}d(2.c)\right\}\varepsilon + V(0.c)\left\{-\tfrac{1}{2}d(1.s) + \tfrac{e}{4}d(2.s)\right\}\varepsilon$$

Aber die Gleichungen (28) (II) geben

$$V(0.c) = \tfrac{3e}{4}d(0.c) - \tfrac{1+e^2}{2}d(1.c) + \tfrac{e}{4}d(2.c)$$

$$V(0.s) = -\tfrac{1}{2}d(1.s) + \tfrac{e}{4}d(2.s)$$

durch deren Substitution der vorstehende Ausdruck sogleich

$$\frac{d\Gamma}{d\varepsilon} = 0$$

wird. W. Z. B. W.

Dieser Satz ergänzt die in §. 7 (II) in Bezug auf die Säcularänderung der mittleren Länge bewiesenen Sätze, denn wenn in Γ ein dem Quadrat der Zeit proportionales Glied vorkäme, so würde dasselbe auf die Säcularänderung der mittleren Länge eine Mitwirkung äussern, da Γ in der Reduction der Länge in der Bahn auf die Fundamentalebene, vermöge der Gleichungen (21) (I), enthalten ist.

§. 4. Entwickelung der Hülfsgrössen für die Berechnung der vom Quadrat der störenden Masse abhängigen Glieder, nebst Anwendung auf die Egeria.

34.

Für die Längenstörungen ist zuerst der im Art. 43 (I) abgeleitete Ausdruck für $\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}$ zu entwickeln, in welchem jedoch auf zwei von dem Unterschiede zwischen dem der Rechnung zu Grunde gelegten osculirenden Werthe der mittleren Bewegung und dem wahren Werthe derselben herrührenden Glieder noch keine Rücksicht genommen worden ist. Das eine dieser Glieder, welches in der Wirkung besteht, die der genannte Unterschied der mittleren Bewegungen auf die Integrationsdivisoren ausübt, ist schon im Art. 56 (II) vollständig entwickelt, und braucht daher in $\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}$ nicht besonders aufgenommen zu werden, das andere aus derselben Ursache entstehende Glied verursacht eine kleine Veränderung in der im Art. 74 (I) eingeführten und mit λ bezeichneten Grösse, die vom Verhältniss μ der mittleren Bewegungen abhängt. Dieses Glied muss der Vollständigkeit wegen mit aufgenommen werden und ist leicht zu berücksichtigen, denn wenn wir T in der Bedeutung des §. 5 (I) wieder aufnehmen, so ist es augenscheinlich $= \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\delta\lambda$. Betrachten wir daher nur fürerst das Quadrat der störenden Kraft, so wird der Eingangs angezogene Ausdruck

$$(15) \qquad \frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} = \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\delta\lambda + A\frac{an\delta z}{r} + B\nu + C\delta\frac{h}{h_0} + D\frac{u}{\cos i} + E\frac{u_1}{\cos i}$$

welcher auf die einfachste Weise dadurch numerisch entwickelt wird, dass man die Entwickelungen von $\left(\frac{dT}{\delta\lambda}\right)$, A, B, etc. mit den in der Abhandlung (II) mit Rücksicht auf die erste Potenz der Massen erhaltenen Ausdrücke für $\delta\lambda$, $\frac{an\delta z}{r}$, ν, etc. numerisch auf die von mir zuerst in der »Untersuchung uber die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns« angegebene und ausgeführte Art multiplicirt.

35.

Nehmen wir zuerst das Product $\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\delta\lambda$ vor, welches in der Behandlung das einfachste ist, weil $\delta\lambda$ eine Constante ist. Da

$$\lambda = \tfrac{1}{2}e\mu$$

ist, so wird

$$\delta\lambda = -\tfrac{1}{2}e\mu\frac{\Delta n}{n}$$

wo $\Delta n = (n) - n_0$ ist, oder den Unterschied zwischen der wahren und der osculirenden mittleren Bewegung bedeutet. Für die Egeria wurde im Art. 61 (II) gefunden

$$\Delta n = -0''09148$$

und es wird daher

$$\delta\lambda = +0{,}00000158$$

36.

Um den Ausdruck des Differentialquotienten von T nach λ zu erhalten, sei überhaupt F eine Function von folgender Form:

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma'\Sigma'\{((i,i',c)) - \sqrt{-1}.((i,i',s))\}y^i z^{-i'}$$

die in folgende verwandelt worden ist:

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'\{[i,i',c] - \sqrt{-1}.[i,i',s]\}\pi^{-i'}y^{i-i'\mu}$$

wo die Bezeichnungen dieselben sind, wie in Art. 74 (I). Substituirt man in den ersten dieser Ausdrücke die Gleichung (141) (I), nemlich

$$z^{-i'} = \pi^{-i'}y^{-i'\mu}h^{i'\lambda\left(y-\frac{1}{y}\right)}$$

so wird

$$\Sigma'\Sigma'[i,i',c]\,\pi^{-i'}y^{i-i'\mu} = \Sigma'\Sigma'((i,i'c))\,\pi^{-i'}y^{i-i'\mu}h^{i'\lambda\left(y-\frac{1}{y}\right)}$$

und eine ähnliche Gleichung bekommt man für $\Sigma'\Sigma'[i,i',s]$. Da aber in diesen Gleichungen zu beiden Seiten i' unverändert bleibt, so darf man das eine Summenzeichen weglassen, und die Gleichung wird daher

$$\Sigma'[i,i',c]y^i = h^{i'\lambda\left(y-\frac{1}{y}\right)}\Sigma'((i,i',c))\,y^i$$

wenn man diese nach λ differentiirt, so erhält man

$$\begin{aligned}\Sigma'\left(\tfrac{d[i,i',c]}{d\lambda}\right)y^i &= i'\left(y-\tfrac{1}{y}\right)h^{i'\lambda\left(y-\frac{1}{y}\right)}\Sigma'((i,i',c))\,y^i\\ &= i'\left(y-\tfrac{1}{y}\right)\Sigma'[i,i',c]y^i\\ &= i'\Sigma'\{[i-1,i',c]-[i+1,i'c]\}y^i\end{aligned}$$

Geht man hievon zum Reellen über, so bekommt man

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{dF}{d\lambda}\right) = {}&\Sigma\Sigma' i'\{[i-1,i',c]-[i+1,i',s]\}\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\}\\ &+\Sigma\Sigma' i'\{[i-1,i',s]-[i+1,i',s]\}\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\}\end{aligned} \qquad (16)$$

wo U für $i'(c'-c\mu)$ geschrieben ist. Also um den Differentialquotienten nach λ einer Function von der Form

$$F = \Sigma\Sigma'[i,i',c]\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\} + \Sigma\Sigma'[i,i',s]\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\}$$

zu erhalten, braucht man nur in Bezug auf jedes Glied den Coefficienten des nachfolgenden Gliedes von dem des vorhergehenden zu subtrahiren und den Unterschied mit i' zu multipliciren. In den Functionen, die

wie T aus Gliedern bestehen, die unter den Sinus- und Cosinuszeichen die Bögen

$$(i-i'\mu)\varepsilon - U$$
$$-\eta + (i-i'\mu)\varepsilon - U$$
$$\eta + (i-i'\mu)\varepsilon - U$$

enthalten, muss diese Regel auf jede dieser drei Gattungen von Gliedern besonders angewandt werden.

37.

Für unser Beispiel und für die Jupiterstörungen, die einzigen die hier in Betracht kommen, habe ich aus der Tafel des Art. 57 (II) für T die Coefficienten des Differentialquotienten nach λ berechnet, die auf jeden Fall ausreichen. Wenn man von der imaginären Form von T zum Reellen übergeht, so findet man, dass die in der ersten Columne der angeführten Tafel gegebenen Zahlen die Coefficienten der Sinusse mit umgekehrten, und die in der zweiten Columne gegebenen die der Cosinusse mit wahren Zeichen sind. Deshalb habe ich den betr. Columnen der folgenden Tafel die Ueberschriften — sin und cos gegeben.

$$\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)$$

$i,-i'$	−sin	cos	$i,-i'$	−sin	cos	$i,-i'$	−sin	cos
0,−2	+27″.96	−22.38	3,−3	+92″.61	+10″.98	4,−5	−91″.85	−30″.80
	−11.44	+4.38		−31.32	−6.27		+26.20	+11.45
	−31.28	+29.42		−95.61	−10.95		+94.75	+30.55
1,−2	−177.82	+125.20	4,−3	−159.06	−125.25	5,−5	−76.05	+46.00
	+49.58	−32.82		+49.77	+39.06		+26.35	−14.65
	+186.76	−133.52		+163.11	+127.80		+77.10	−46.80
2,−2	−36.64	+23.14	2,−4	+31.28	+89.52	6,−5	+95.95	+7.60
	+15.32	−7.10		−6.92	−28.21		−30.75	−2.45
	+37.62	−26.62		−33.00	−95.12		−97.65	−7.10
3,−2	+187.58	−129.14	3,−4	+67.72	−126.92	2,−6	−0.06	+5.82
	−56.70	+39.26		−21.96	+35.28		+2.22	−1.44
	−193.66	+133.16		−68.84	+131.88		−1.44	−6.60
0,−3	+7.62	−3.99	4,−4	−22.32	−98.52	3,−6	+25.44	−7.62
	−8.88	−1.29		+5.84	+33.84		−9.30	+0.06
	−4.05	+6.69		+23.00	+100.52		−26.16	+8.94
1,−3	−86.67	+0.87	5,−4	−53.44	+137.72	4,−6	−32.32	−40.86
	+26.04	+3.00		+16.96	−43.68		+15.12	+13.80
	+94.11	−0.51		+53.88	−140.60		+54.54	+42.54
2,−3	+147.12	+122.97	3,−5	+68.20	−50.30	5,−6	−12.30	+61.68
	−39.87	−36.66		−22.20	+13.80		+5.70	−18.12
	−154.35	−127.08		−71.50	+52.65		+14.76	−63.18
						6,−6	+51.72	+45.36
							−16.86	−15.72
							−52.56	−45.90

Die Anordnung dieser Tafel ist übrigens dieselbe wie die der bez. Tafeln der Abhandlung (II). Die drei Zeilen jedes Arguments enthalten der Reihenfolge nach die Coefficienten von

$$(i-i'\mu)\varepsilon - U$$
$$-\eta + (i+1-i'\mu)\varepsilon - U$$
$$\eta + (i-1-i'\mu)\varepsilon - U$$

so dass diese schliesslich sich zu einem und demselben Argument vereinigen. Die von $i'=1$ abhängigen Glieder habe ich weggelassen, weil sie so klein sind, dass sie keine merkliche Wirkung äussern können.

38.

Für das zweite Glied des Ausdrucks (15) werde ich zuerst das Product von $n\delta z$ mit $\frac{a}{r}$ berechnen. Die Substitution des in unserm Beispiel (§. 7 (I)) angewandten Werthes von φ in die Reihe

$$\frac{a}{r} - 1 = \frac{2\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{2\beta}{\cos\varphi}\cos\varepsilon + \frac{2\beta^2}{\cos\varphi}\cos 2\varepsilon + \frac{2\beta^3}{\cos\varphi}\cos 3\varepsilon + \ldots$$

wo $\beta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ist, giebt

$$\frac{a}{r} - 1 = (7.5586) + 2(8.62997)\cos\varepsilon + 2(7.2584)\cos 2\varepsilon + 2(5.8868)\cos 3\varepsilon + 2(4.516)\cos 4\varepsilon + \text{etc.}$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten sind. Es ist vonVortheil, das Product $\left(\frac{a}{r}-1\right)n\delta z$ zu berechnen und dazu $n\delta z$ zu addiren um $\frac{an\delta z}{r}$ zu erhalten, und darum habe ich jenen Ausdruck hier angesetzt. Bezeichnet man diesen mit

$$\frac{a}{r} - 1 = \alpha_0 + 2\alpha_1\cos\varepsilon + 2\alpha_2\cos 2\varepsilon + \ldots$$

und setzt

$$n\delta z = \Sigma' A_s^{(i)} \sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\} + \Sigma' A_c^{(i)} \cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\}$$

so wird

$$\left(\frac{a}{r}-1\right)n\delta z = \Sigma' \left\{\begin{matrix} \alpha_0 A_s^{(i)} + \alpha_1 A_s^{(i-1)} + \alpha_2 A^{(i-2)} + \ldots \\ + \alpha_1 A_s^{(i+1)} + \alpha_2 A^{(i+2)} + \ldots \end{matrix}\right\} \sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\}$$

$$+ \Sigma' \left\{\begin{matrix} \alpha_0 A_c^{(i)} + \alpha_1 A_c^{(i-1)} + \alpha_2 A_c^{(i-2)} + \ldots \\ + \alpha_1 A_c^{(i+1)} + \alpha_2 A_c^{(i+2)} + \ldots \end{matrix}\right\} \cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\}$$

wo keine Ausnahme statt findet, weil in $n\delta z$ kein constantes Glied enthalten ist. Die einfachste Art dieses Product, so wie die übrigen, die

weiter unten erklärt werden sollen, zu berechnen, besteht darin, dass man die Logarithmen der Coefficienten des Factors $n\delta z$ auf den oberen Rand eines in Columnen von passender Breite eingetheilten Blattes Papiers, und die des Factors $\frac{a}{r} - 1$ auf den unteren Rand eines anderen Stückes Papiers schreibt. Legt man hierauf um die Logarithmen zu addiren dieses Papier an jenes, so erkennt man sogleich aus den ersten Stellen der Summe der Logarithmen, ob das betreffende partielle Product die numerische Grenze, die man festgesetzt hat, überschreitet oder nicht, und also ob es berücksichtigt werden muss oder nicht. Die Zahlen der Logarithmen der partiellen Producte schreibt man darau auf ein anderes Blatt Papiers der obigen Formel gemäss in die betreffenden Columnen, worauf man die Glieder, aus welchen jeder Coefficient des Products zusammengesetzt ist, addirt.

Im §. 6 (II) ist nicht nur der hier anzuwendende numerische Werth von $n\delta z$, sondern es sind auch die von ν, $\frac{u}{\cos i}$, etc. gegeben, und es ist dort, wie im Endresultat und zur Bestimmung der willkührlichen Constanten erforderlich ist, ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen ε durch nt eliminirt. Man kann bei der Berechnung der von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte abhängigen Glieder diese Form beibehalten, denn es ist nicht schwierig die Integrale derselben anzugeben, allein mit Beibehaltung von ε statt nt in den genannten Gliedern werden diese Integrale weit einfacher, und da man nach den Integrationen wieder ε durch nt eliminiren kann und diese Elimination sich mit der Ausnahme von wenigen Gliedern auf die blose Substitution von nt für ε reducirt, so ist es vortheilhafter, die Form, die ε ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen enthält, anzuwenden. Nur das Glied im Ausdruck von nz, welches die mittlere Bewegung ist, muss in der Form $(n)t$ belassen werden.

Im Art. 61 (II) wurde für die Egeria gefunden

$$\begin{aligned} nz = \quad & 19^{0}33'27''{,}9 && + 858''{,}2946\,t \\ & + 808''{,}60 \sin\varepsilon && - 664''{,}63 \cos\varepsilon \\ & - 0''{,}79882\,nt \sin\varepsilon && - 2''{,}58626\,nt \cos\varepsilon \\ & + \text{etc.} && + \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn wir hievon die beiden ersten Glieder ablösen, so bekommen wir den in der Berechnung der Störungen zweiter Ordnung anzuwendenden Ausdruck von $n\delta z$. Es wird also

$$
\begin{aligned}
n\delta z = &+ 808''.60 \sin\varepsilon && - 664''.63 \cos\varepsilon \\
&- 0''.79882\, nt \sin\varepsilon && - 2.58626\, nt \cos\varepsilon \\
&- 19.61 \sin 2\varepsilon && + 14.86 \cos 2\varepsilon \\
&+ 0.01701\, nt \sin 2\varepsilon && + 0.05487\, nt \cos 2\varepsilon \\
&+ 0.11 \sin 3\varepsilon && - 0.08 \cos 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Führt man hier ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen ε statt nt durch die Gleichung $nt = \varepsilon - e \sin\varepsilon$ ein, so wird

$$
\begin{aligned}
n\delta z = &- 0''.79882\, \varepsilon \sin\varepsilon && - 2''.58626\, \varepsilon \cos\varepsilon \\
&+ 0.01701\, \varepsilon \sin 2\varepsilon && + 0.05487\, \varepsilon \cos 2\varepsilon \\
& && + 0.03 \\
&+ 808''.60 \sin\varepsilon && - 664.63 \cos\varepsilon \\
&- 19.50 \sin 2\varepsilon && + 14.83 \cos 2\varepsilon \\
&+ 0.11 \sin 3\varepsilon && - 0.08 \cos 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

wo die etc. Zeichen sich auf die im Art. 59 (II) gegebenen Glieder von $n\delta z$ beziehen, die von $i' = 1$, $i' = 2$, etc. abhängen.

Mit bloser Rücksichtnahme auf die Jupiterstörungen ergab sich hieraus

$$\frac{a n \delta z}{r}$$

$i, -i'$	sin	cos	$i, -i'$	sin	cos	$i, -i'$	sin	cos
0,0		$-0''.22044\,\varepsilon$	−1,−2	−0″.12	+0″.66	3,−4	+6″.53	−16″.94
1,0	$-0''.79954\,\varepsilon$	$-2.59798\,\varepsilon$	0,−2	+3.17	+6.42	4,−4	+1.68	+4.03
2,0	$-0.01694\,\varepsilon$	$-0.05545\,\varepsilon$	1,−2	−183.06	−165.49	5,−4	+0.17	+0.14
3,0	$-0.00072\,\varepsilon$	$-0.00235\,\varepsilon$	2,−2	−196.23	−140.01	1,−5	+0.30	+0.65
0,0		−56″.59	3,−2	−4.28	−2.47	2,−5	+17.55	+2.70
1,0	+809″.23	−667.61	4,−2	+0.11	−0.03	3,−5	+1.35	−13.01
2,0	+14.86	−13.52	−1,−3	−1.33	−1.22	4,−5	+2.78	+1.84
3,0	+0.63	−0.57	0,−3	−40.84	−34.51	5,−5	−1.19	+0.10
−2,−1	+0.15	+0.04	1,−3	−542.47	−621.75	6,−5	−0.09	+0.03
−1,−1	−3.44	+5.09	2,−3	+705.19	−26.45	1,−6	+1.03	−0.04
0,−1	+17.60	−14.42	3,−3	+32.39	−14.50	2,−6	+18.89	+2.19
1,−1	+40.23	−115.51	4,−3	+0.97	−0.53	3,−6	−2.30	+13.61
2,−1	+2.20	−2.23	0,−4	−0.25	−0,13	4,−6	+1.50	+0.78
3,−1	+0.02	−0.89	1,−4	−1.08	+0.44	5,−6	−0.80	+0.60
			2,−4	+30,47	−4.18	6,−6	+0.08	−0.36

wo ich sowohl statt des constanten, wie statt des ε proportionalen Gliedes das Doppelte derselben angesetzt habe, weil dieses für die nachherige Anwendung von Vortheil ist. Man kann die Richtigkeit dieses Products auf einfache Weise dadurch controliren, dass man es mit $1 - e \cos\varepsilon$

multiplicirt, wodurch man $n\delta z$ wieder bekommen muss. Weiter wie bis zu den Gliedern, in welchen $i'=6$ ist, zu gehen hielt ich nicht für nöthig, und die weiteren Rechnungen zeigten auch, dass dieses in diesem Beispiel hinreichend ist. Die Saturn- und mehr noch die Marsstörungen sind so klein, dass sie bei den Quadraten der störenden Massen nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

In den von $i'=0$ abhängigen Gliedern von nz, v, etc., die im Art. 61 (II) gegeben sind und hier angewandt werden müssen, ist auch auf Saturn und Mars mit Rücksicht genommen worden, und wenn man will, dass in den folgenden Rechnungen die Bedingungsgleichungen so genau wie möglich erfüllt sein sollen, so muss man auch in den Gliedern der Hülfsgrössen, in welchen $i'=0$ ist, wenigstens die Saturnstörungen mit zuziehen. Dieses soll hier im Folgenden geschehen.

39.

Zufolge der Gleichung (63) (I) ist

$$A=\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)-T\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

und im Art. 75 (I) ist das Verfahren entwickelt, durch welches man überhaupt von den hier vorkommenden Functionen den partiellen Differentialquotienten nach ε erhält. Wenn wieder überhaupt F irgend eine dieser Functionen bedeutet, und

$$F=\Sigma'[i,i',c]\sin(i,i')+\Sigma'[i,i',s]\cos(i,i')$$

ist, wo, gleichwie im Folgenden, zur Abkürzung (i,i') statt $(i-i'\mu)\varepsilon-U$ geschrieben worden ist, so wird

$$\left(\frac{dF}{d\varepsilon}\right)=\Sigma'\{i,i',c\}\cos(i,i')-\Sigma'\{i,i',s\}\sin(i,i')$$

wo

$$(17)\qquad \begin{cases}\{i,i',c\}=i[i,i',c]-i'\lambda\{[i-1,i',c]+[i+1,i',c]\}\\ \{i,i',s\}=i[i,i',s]-i'\lambda\{[i-1,i',s]+[i+1,i',s]\}\end{cases}$$

und wieder $\lambda=\frac{1}{2}e\mu$ ist. Die Anwendung dieser Ausdrücke ist zu einfach, als dass sie noch besonders erläutert zu werden brauchte; ich führe blos an, dass in der Berechnung von $\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)$ aus den Coefficienten der Tafel des Art. 57 (II) nach diesen Ausdrücken, man dieselben, gleichwie bei der Erklärung der Berechnung von $\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)$ gesagt wurde, auf jede der drei Gattungen von Gliedern in T besonders anwenden muss.

Um die im vor. § erklärte Bedingungsgleichung anwenden zu können, muss man auch $\left(\frac{d\overline{T}}{d\varepsilon}\right)$ berechnen, wo wie immer $\overline{T}$ die Function bezeichnet, die aus T hervorgeht, wenn man darin η in ε verwandelt. Durch die Berechnung dieses Differentialquotienten kann man die von $\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)$ vermittelst der schon im vor. § vorkommenden Gleichung

$$\left(\frac{d\overline{T}}{d\varepsilon}\right) = \left(\frac{\overline{dT}}{d\varepsilon}\right) + \left(\frac{\overline{dT}}{d\eta}\right) \tag{18}$$

leicht controliren. Hat man sich der Richtigkeit der Rechnung auf andere Art versichert, so kann man ausschliesslich durch die vorstehende Gleichung $\left(\frac{d\overline{T}}{d\varepsilon}\right)$ berechnen. In der Bezeichnung der Abhandlung (II) und des vor. § ist

$$\begin{aligned} T = &-\Sigma F(i,i',c)\sin(i,i') &&+\Sigma F(i,i',s)\cos(i,i') \\ &-\Sigma G(i,i',c)\sin\{-\eta+(i,i')\} &&+\Sigma G(i,i',s)\cos\{-\eta+(i,i')\} \\ &-\Sigma H(i,i',c)\sin\{\ \eta+(i,i')\} &&+\Sigma H(i,i',s)\cos\{\ \eta+(i,i')\} \end{aligned} \tag{19}$$

Hat man nun durch die Anwendung der Ausdrücke (17) hieraus

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right) = &-\Sigma A(i,i',c)\cos(i,i') &&-\Sigma A(i,i',s)\sin(i,i') \\ &-\Sigma B(i,i',c)\cos\{-\eta+(i,i')\} &&-\Sigma B(i,i',s)\sin\{-\eta+(i,i')\} \\ &-\Sigma C(i,i',c)\cos\{\ \eta+(i,i')\} &&-\Sigma C(i,i',s)\sin\{\ \eta+(i,i')\} \end{aligned}$$

erhalten, und setzt

$$\left(\frac{d\overline{T}}{d\varepsilon}\right) = -\Sigma D(i,i',c)\cos(i,i') - \Sigma D(i,i',s)\sin(i,i')$$

so giebt die Gleichung (18)

$$\begin{aligned} D(i,i') = &A(i,i') + B(i+1,i') + C(i-1,i') \\ &- G(i+1,i') + H(i-1,i') \end{aligned}$$

wo ich die Indices c und s weggelassen habe, weil die Gleichung ohne Aenderung für beide gilt. Für die Reihe

$$\frac{ae\sin\varepsilon}{r} = 2\beta\sin\varepsilon + 2\beta^2\sin 2\varepsilon + 2\beta^3\sin 3\varepsilon + \ldots$$

ergab sich in unserm Beispiel der folgende Werth

$$\begin{aligned} \frac{ae\sin\varepsilon}{r} = &2(8{,}62840)\sin\varepsilon + 2(7{,}2568)\sin 2\varepsilon \\ &+ 2(5{,}8852)\sin 3\varepsilon + 2(4{,}514)\sin 4\varepsilon \end{aligned}$$

und mit diesen numerischen Werthen der Coefficienten wird

$$\begin{aligned} T\frac{ae\sin\varepsilon}{r} = &\Sigma'\left\{\begin{matrix} \beta F(i-1,i',c) + \beta^2 F(i-2,i',c) + \text{etc.} \\ -\beta F(i+1,i',c) - \beta^2 F(i+2,i',c) - \text{etc.} \end{matrix}\right\}\cos(i,i') \\ &+\Sigma'\left\{\begin{matrix} \beta F(i-1,i',s) + \beta^2 F(i-2,i',s) + \text{etc.} \\ -\beta F(i+1,i',s) - \beta^2 F(i+2,i',s) - \text{etc.} \end{matrix}\right\}\sin(i,i') \end{aligned} \tag{20}$$

$$+\Sigma'\begin{Bmatrix}\beta G(i-1,i',c)+\beta^2 G(i-2,i',c)+\text{etc.}\\ -\beta G(i+1,i',c)-\beta^2 G(i+2,i',c)-\text{etc.}\end{Bmatrix}\cos\{-\eta+(i,i')\}$$

$$+\Sigma'\begin{Bmatrix}\beta G(i-1,i',s)-\beta^2 G(i-2,i',s)+\text{etc.}\\ -\beta G(i+1,i',s)-\beta^2 G(i+2,i',s)-\text{etc.}\end{Bmatrix}\sin\{-\eta+(i,i')\}$$

$$+\Sigma'\begin{Bmatrix}\beta H(i-1,i',c)+\beta^2 H(i-2,i',c)+\text{etc.}\\ -\beta H(i+1,i',c)+\beta^2 H(i+2,i',c)-\text{etc.}\end{Bmatrix}\cos\{\eta+(i,i')\}$$

$$+\Sigma'\begin{Bmatrix}\beta H(i-1,i',c)+\beta^2 H(i-2,i',s)+\text{etc.}\\ -\beta H(i+1,i',s)-\beta^2 H(i+2,i',s)-\text{etc.}\end{Bmatrix}\sin\{\eta+(i,i')\}$$

40.

Da zufolge der Gleichungen (64) (I) und (69) (I)

$$B=V+X$$
$$C=2\{T+X+\overline{T}\}$$

ist, so sind noch die Hülfsgrössen V und X zu berechnen, während $\overline{T}$ durch T gegeben ist, und dem Vorhergehenden zufolge

$$T=-\Sigma'\{F(i,i',c)+G(i+1,i',c)+H(i-1,i',c)\}\sin(i,i')$$
$$+\Sigma'\{F(i,i',s)+G(i+1,i',s)+H(i-1,i',s)\}\cos(i,i')$$

ist. Für unser Beispiel sind die Coefficienten von $\overline{T}$ schon in der Tafel für T des Art. 57 (II) angegeben. Die Function V wird zufolge (65) (I) aus den Coefficienten von

$$\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)\text{ und }\left\{ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)+ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\}$$

auf dieselbe Art berechnet, wie T aus denen von

$$a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)\text{ und }ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

nemlich durch die Ausdrücke (15) (II). Sei der Ausdruck für $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$, wie er für unser Beispiel im Art. 84 (I) angegeben ist, der folgende

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)=\Sigma P(i,i',c)\cos(i,i')+\Sigma P(i,i',s)\sin(i,i')$$

dann muss man in (17)

$$P(i,i'c)\text{ statt }[i,i',c],\text{ und }P(i,i',s)\text{ statt }[i,i',s]$$

setzen, wodurch man

$$\left(\frac{d\ ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)=-\Sigma\{i,i'c\}\sin(i,i')+\Sigma\{i,i',s\}\cos(i,i')$$

erhält. Nennt man ferner den Ausdruck für $ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)+ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$, so wie er für unser Beispiel in Art. 84 (I) angegeben ist,

$$ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)+ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)=\Sigma'\left\{\{i,i',c\}\right\}\cos(i,i')+\Sigma'\left\{\left\{i,i',s\right\}\right\}\sin(i,i')$$

und substituirt

$$\{i,i',c\} \text{ für } b(i,i',c) \text{ und } \left\{\{i,i',c\}\right\} \text{ für } c(i,i',c)$$

in die (15) (II), so wie

$$\{i,i',s\} \text{ für } b(i,i',s) \text{ und } \left\{\{i,i',s\}\right\} \text{ für } c(i,i',s)$$

in die analogen Ausdrücke, so bekommt man V in derselben Form, die für T unter (19) angegeben wurde. Die Coefficienten der Sinusse bekommt man mit umgekehrtem, und die der Cosinusse mit wahrem Zeichen.

41.

Die Berechnung von X ist der von T und V ähnlich, nur haben hier die Multiplicatoren andere Werthe. Führt man in die unter (67) (I) gegebenen Ausdrücke von M' und N' die imaginären Exponentialfunctionen ein, die im §. 4 (II) auch angewandt wurden, so wird

$$M'=\frac{1}{\cos^2\varphi}\Big\{-2e^2+ey+e\frac{1}{y}-\tfrac{1}{2}e^2vy-\tfrac{1}{2}e^2\frac{1}{vy}$$
$$+ev+e\frac{1}{v}-(1-\tfrac{1}{2}e^2)\frac{v}{y}-(1-\tfrac{1}{2}e^2)\frac{y}{v}\Big\}$$

$$N'\sqrt{-1}=\frac{1}{\cos^2\varphi}\Big\{ey-e\frac{1}{y}-\tfrac{1}{2}e^2vy+\tfrac{1}{2}e^2\frac{1}{vy}+(1-\tfrac{1}{2}e^2)\frac{v}{y}-(1-\tfrac{1}{2}e^2)\frac{y}{v}\Big\}$$

und wegen (66) (I) ergiebt sich

$$2X\,d\varepsilon=\frac{dy}{y}\Big\{E_0+E_1y+E_1\frac{1}{y}+\frac{1}{v}\Big[F_{-1}\frac{1}{y}+F_0+F_1y\Big]$$
$$+v\Big[F_{-1}y+F_0+F_1\frac{1}{y}\Big]\Big\}\,ay\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$$
$$+\frac{dy}{y}\Big\{G_1y-G_1\frac{1}{y}+\frac{1}{v}\Big[H_{-1}\frac{1}{y}+H_1y\Big]$$
$$-v\Big[H_{-1}y+H_1\frac{1}{y}\Big]\Big\}\,ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

wo

$$E_0=-\frac{2e^2}{\cos^2\varphi},\quad E_1=\frac{e}{\cos^2\varphi}$$
$$F_{-1}=-\frac{e^2}{2\cos^2\varphi},\quad F_0=\frac{e}{\cos^2\varphi},\quad F_1=-\frac{2-e^2}{2\cos^2\varphi}$$
$$G_1=-\frac{e}{\cos^2\varphi},\quad H_{-1}=-\frac{e^2}{2\cos^2\varphi},\quad H_1=\frac{2-e^2}{2\cos^2\varphi}$$

ist. Nach der Substitution der im §. 4 (II) angegebenen Entwickelungen von $ay\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$ und $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ bekommt man

$$2X\,ds = \frac{dy}{y}\,\Sigma\Big\{J(i,i',c) + \frac{1}{v}K(i,i',c) + vL(i,i',c)\Big\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$
$$-\sqrt{-1}.\frac{dy}{y}\,\Sigma\Big\{J(i,i',s) + \frac{1}{v}K(i,i',s) + vL(i,i',s)\Big\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

oder nach dem Uebergang zum Reellen

$$\begin{aligned} X = &-\Sigma J(i,i',c)\sin(i,i') &&+\Sigma J(i,i',s)\cos(i,i')\\ &-\Sigma K(i,i',c)\sin\{-\eta+(i,i')\} &&+\Sigma K(i,i',s)\cos\{-\eta+(i,i')\}\\ &-\Sigma L(i,i',c)\sin\{\ \eta+(i,i')\} &&+\Sigma L(i,i',s)\cos\{\ \eta+(i,i')\} \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} (21)\qquad J(i,i') = &E_0 b(i,i') &&+E_1 b(i-1,i') &&+E_1 b(i+1,i')\\ &&&+G_1 c(i-1,i') &&-G_1 c(i+1,i')\\ K(i,i') = &F_{-1} b(i+1,i') &&+F_0 b(i,i') &&+F_1 b(i-1,i')\\ &&&+H_{-1} c(i+1,i') &&+H_1 c(i-1,i')\\ L(i,i') = &F_{-1} b(i-1,i') &&+F_0 b(i,i') &&+F_1 b(i+1,i')\\ &&&-H_{-1} c(i-1,i') &&-H_1 c(i+1,i') \end{aligned}$$

und ich die Indices c und s weggelassen habe, um anzudeuten, dass diese Ausdrücke unverändert für jeden derselben Geltung haben. Die b und c Coefficienten sind hier dieselben, die im §. 4 (II) vorkommen, und bei der Berechnung der J, K und L Coefficienten treten hier ähnliche Vereinfachungen ein wie dort. Auch brauchen hier die J Coefficienten nicht durch die obige Formel berechnet zu werden, sondern man kann sie auf einfachere Art aus den K und L Coefficienten erhalten, nachdem man die numerischen Werthe dieser durch die obigen Formeln berechnet hat.

Da nach der Verwandelung von η in ε

$$\overline{X} = -\frac{2r}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right);\quad \overline{T} = \frac{r}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

wird, so wird nothwendig

$$J(i,i') + K(i+1,i') + L(i-1,i') = -2\{F(i,i') + G(i+1,i') + H(i-1,i')\}$$

wo wieder aus derselben Ursache wie oben die Indices c und s weggelassen worden sind. Setzt man also

$$\Pi(i,i') = F(i,i') + G(i+1,i') + H(i-1,i')$$

wo also die Π Coefficienten die von $\overline{T}$ sind, so wird

$$J(i,i') = -\{K(i+1,i') + L(i-1,i') + 2\Pi(i,i')\}$$

welche zur Berechnung der J Coefficienten dient. Wenn man will, so kann man diese Gleichung zur Controle anwenden, und die J Coefficienten ausserdem direct durch die Formel (21) berechnen. Einfacher

ist es jedoch, dieselben aus der vorstehenden Formel zu berechnen und die Berechnung der K und L Coefficienten dadurch zu controliren, dass man die Summen der b und c Coefficienten mit einführt, wie im §. 4 (II) auseinandergesetzt wurde.

42.

Da zufolge (72) (I)

$$D = Ma^2\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon\, dZ}\right) + N\left\{a''r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\, dZ}\right) + a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\right\}$$

$$E = Ma^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

ist, so müssen hier vor allen Dingen die Coefficienten von $a^2\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon\, dZ}\right)$ berechnet werden. Da man diese aber auf dieselbe Art aus denen von $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ erhält, wie die Coefficienten von $\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)$ aus denen von $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ erhalten wurden, so kann ich auf die im Vorhergehenden enthaltene Auseinandersetzung dieser Rechnung verweisen.

Setzt man hierauf

$$a^2\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon\, dZ}\right) = \Sigma R(i,i',c)\cos(i,i') - \Sigma R(i,i',s)\sin(i,i')$$

und

$$a''r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\, dZ}\right) + a''\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \Sigma S(i,i',c)\sin(i,i') + \Sigma S(i,i',s)\cos(i,i')$$

und substituirt beides für die Indices c und s

$$R(i,i') \text{ für } b(i,i') \text{ und } S(i,i') \text{ für } c(i,i')$$

in die Ausdrücke (15) (II) und (17) (II), so ergiebt sich D in folgender Form

$$\begin{aligned} D = {} & \Sigma F(i,i',c)\cos(i,i') - \Sigma F(i,i',s)\sin(i,i') \\ & + \Sigma G(i,i',c)\cos\{-\eta+(i,i')\} - \Sigma G(i,i',s)\sin\{-\eta+(i,i')\} \\ & + \Sigma H(i,i',c)\cos\{\eta-(i,i')\} - \Sigma H(i,i',s)\sin\{\eta+(i,i')\} \end{aligned}$$

Setzt man endlich

$$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \Sigma T(i,i',c)\sin(i,i') + \Sigma T(i,i',s)\cos(i,i')$$

und beides für die Indices c und s

$$T(i,i') \text{ für } b(i,i') \text{ und die Null für } c(i,i')$$

in die Ausdrücke (15) (II) und (17) (II), so ergiebt sich

$$\begin{aligned} E = {} & \Sigma F(i,i'c)\sin(i,i') + \Sigma F(i,i',s)\cos(i,i') \\ & + \Sigma G(i,i',c)\sin\{-\eta+(i,i')\} + \Sigma G(i,i',s)\cos\{-\eta+(i,i')\} \\ & + \Sigma H(i,i',c)\sin\{\eta+(i,i')\} + \Sigma H(i,i',s)\cos\{\eta+(i,i')\} \end{aligned}$$

Man kann auch für die beiden letzten Glieder des Ausdrucks (15) ein anderes Verfahren anwenden. Man berechne sofort die drei Producte

$$a^2\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon\, dZ}\right)\frac{u}{\cos i}\;;\quad \left\{a^2 r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\, dZ}\right)+a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\right\}\frac{u}{\cos i}\;;\quad a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\frac{u_1}{\cos i}$$

und setze hierauf

$$a^2\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon\, dZ}\right)\frac{u}{\cos i}+a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\frac{u_1}{\cos i}=$$
$$-\Sigma U(i,i',c)\sin(i,i')+\Sigma U(i,i',s)\cos(i,i')$$

und

$$\left\{a^2 r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\, dZ}\right)+a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\right\}\frac{u}{\cos i}=$$
$$\Sigma V(i,i',c)\cos(i,i')+\Sigma V(i,i',s)\sin(i,i')$$

Substituirt man dann

$$U(i,i') \text{ für } b(i,i') \text{ und } V(i,i') \text{ für } c(i,i')$$

in die Ausdrücke (15) (II) und (17) (II), so bekommt man

$$D\frac{u}{\cos i}+E\frac{u_1}{\cos i}=$$
$$-\Sigma F(i,i',c)\sin(i,i')+\Sigma F(i,i',s)\cos(i,i')$$
$$-\Sigma G(i,i',c)\sin\{-\eta+(i,i')\}+\Sigma G(i,i',s)\cos\{-\eta+(i,i')\}$$
$$-\Sigma H(i,i',c)\sin\{\eta+(i,i')\}+\Sigma H(i,i',s)\cos\{\eta+(i,i')\}$$

Dieses zweite Verfahren scheint auf den ersten Anblick etwas kürzer zu sein wie das erste, allein es ist in der That unbequemer und minder zweckmässig. Die Controlirung der Rechnung wird schwieriger, etwa begangene und nachher sich zeigende Rechnungsfehler sind schwerer aufzufinden und mühsamer zu berichtigen, auch muss man bei der Anwendung desselben wegen der Säcularänderungen und der kleinen Divisoren mehr Glieder mit mehr wie der gewöhnlichen Anzahl von Decimalen berechnen. Ich habe mich durch die Anwendung desselben von diesen Nachtheilen überzeugt, und daher schliesslich das erste Verfahren vorgezogen.

43.

Ich werde nun für unser Beispiel die numerischen Werthe der im Vorhergehenden erklärten Hülfsgrössen geben.

	$\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{di}\right)}{d\varepsilon}\right)$		$a^2\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon dz}\right)$	
i,i'	−sin	cos	cos	−sin
0,0		0	0	
1,0	−2″.036	−0″.557	−2″.698	−11″.350
2,0	−6.170	−2.249	+1.270	+0.922
3,0	+0.538	+0.822	+0.696	+1.218
4,0	+0.342	+0.192	−0.222	−0.064
−3,−1	+0.18	+0.24	−0.01	−0.33
−2,−1	+1.13	+0.30	+0.91	+0.77
−1,−1	−1.46	−2.06	+0.59	+1.80
0,−1	+0.04	+0.14	+0.05	+0.06
1,−1	−4.00	−11.82	−3.13	−2.14
2,−1	+1.12	−0.54	+16.60	+2.08
3,−1	−0.34	+7.41	−0.35	+0.54
4,−1	+0.38	−0.41	−1.22	+0.27
−2,−2	+0.18	−0.10	+0.32	+0.10
−1,−2	0.00	−0.75	−0.51	+0.44
0,−2	−0.18	+0.16	−0.31	−0.29
1,−2	+7.06	−6.92	−11.14	+10.37
2,−2	−64.55	+45.77	+4.67	−2.79
3,−2	−5.09	+0.44	−5.51	+12.09
4,−2	+6.44	−1.79	−0.35	+0.32
5,−2	−0.13	−0.15	+0.08	−0.97
−1,−3	−0.05	−0.12	−0.12	+0.19
0,−3	+0.02	+0.05	+0.04	−0.16
1,−3	+0.09	−1.16	−0.95	+4.16
2,−3	−22.99	−1.18	−7.22	−16.04
3,−3	+53.84	+41.29	+0.19	+5.05
4,−3	+3.28	+5.99	−6.75	−5.96
5,−3	−2.89	−4.31	−0.42	−0.45
6,−3	−0.11	−0.09	+0.64	+0.25
0,−4	+0.02	+0.04	+0.01	−0.04
1,−4	−0.22	−0.67	−0.07	+0.74
2,−4	−3.64	−0.16	−5.36	−3.49
3,−4	+8.74	+24.95	+14.30	−1.32
4,−4	+16.90	−45.29	−3.79	−1.43
5,−4	+4.36	−5.09	+4.72	−2.95
6,−4	−2.23	+2.87	+0.52	−0.32
1,−5	−0.01	−0.20		
2,−5	−1.05	+0.44		
3,−5	+0.60	+5.36		
4,−5	+19.06	−13.83		
5,−5	−30.85	−2.06		
6,−5	−5.20	−1.99		
7,−5	+2.21	+0.77		
1,−6	0.00	−0.05		
2,−6	−0.34	+0.10		
3,−6	+0.56	+1.25		
4,−6	+5.68	−2.07		
5,−6	−14.97	−10.92		
6,−6	+3.92	+18.01		
7,−6	−0.03	+4.27		

	$\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)$		$T\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$		V	
i,i'	−cos	−sin	cos	sin	−sin	cos
0, 0, 0	0		−0″.142			−0″.22
−1, 1, 0	−27″.200	+0″.068	+0.054	−0″.055	−64″.76	+0.22
0, 1, 0	+1.415	+0.367	−0.262	−0.098	+2.33	+1.30
−1, 2, 0	+3.338	+0.766	−1.107	+0.049	+3.76	+1.33
1, 0, 0	0	0	+1.461	+0.115	−4.33	−2.81
2, 0	+12.298	+4.480	+0.075	+0.037	+18.79	+6.95
	−3.090	−1.182	+0.023	+0.014	−0.45	−0.22
	−7.230	−2.622	−0.083	−0.062	−24.77	−9.18
3, 0	−1.017	−1.578	+0.262	+0.096	−1.59	−2.47
	−0.128	+0.176	−0.043	−0.047	−0.27	−0.04
	+1.016	+1.328	−0.311	−0.113	+2.38	+3.32
−2, −1	+1.64	+0.23	−0.05	−0.07	−3.20	−0.64
	−1.11	−0.22	+0.10	+0.14	+4.84	+1.26
	+0.15	+0.36	−0.03	−0.04	−0.70	−0.59
−1, −1	−1.18	−1.68	−0.02	+0.02	+4.92	+6.59
	+0.02	+0.01	+0.14	+0.03	−10.50	−13.93
	−1.19	−1.83	−0.11	−0.09	+3.59	+4.87
0, −1	−0.08	−0.19	−0.11	−0.40	−1.43	−3.65
	−2.13	−0.67	−0.15	−0.33	−5.09	−1.15
	−2.86	−2.46	+0.30	+0.86	+7.87	+8.17
1, −1	+3.94	+11.02	+0.06	−0.09	+11.89	+35.25
	+2.71	+9.11	−0.12	0.00	+4.67	+15.48
	−0.07	−0.03	+0.03	+0.15	−20.45	−62.33
2, −1	−3.80	+2.31	+0.16	+0.70	−3.21	+3.40
	+1.94	−2.61	+0.06	+0.14	+1.61	−1.89
	+1.91	−0.87	−0.26	−1.07	+2.56	−3.82
3, −1	+0.85	−16.83	−0.06	+0.06	+1.15	−22.39
	−0.26	+5.02	+0.03	−0.03	−0.23	+3.54
	−0.68	+12.53	+0.06	−0.07	−1.39	+26.42
−1, −2	−0.05	−0.48	−0.02	+0.02	+0.25	+1.94
	+0.07	−0.06	+0.10	−0.12	−0.12	−5.22
	+0.15	−1.00	−0.06	+0.08	−0.38	+2.85
0, −2	+0.41	−0.36	+0.43	−0.36	+1.98	−2.18
	−2.74	+3.08	−0.19	+0.06	−8.67	+11.07
	−1.36	+1.77	−0.50	+0.51	+5.07	−7.03
1, −2	−16.64	+13.60	−3.79	+2.66	−30.31	+27.39
	+12.38	−7.34	+1.06	−0.70	+12.23	−6.29
	+2.71	−1.89	+3.97	−2.83	+34.26	−34.65
2, −2	+179.93	−127.30	−0.77	+0.49	+193.64	−137.62
	−82.20	+58.17	+0.32	−0.13	−53.82	+38.71
	−92.84	+65.84	+0.79	−0.57	−204.36	+144.98
3, −2	+10.55	+2.21	+3.96	−2.72	+14.01	+0.08
	−6.85	+0.26	−1.20	+0.83	−5.34	−0.24
	−3.91	−3.66	−4.09	+2.80	−12.49	−0.79
4, −2	−15.96	+4.38	+0.35	−0.11	−19.59	+5.35
	+4.99	−1.36	−0.13	+0.04	+4.27	−1.20
	+13.14	−3.56	−0.30	+0.08	+22.03	−5.91

0, −3	+0″.11	−0″.07	+0″.06	−0″.06	−0″.21	−0″.45
	−1.10	+0.45	−0.11	−0.01	−4.15	+1.81
	−0.89	+0.27	0.00	+0.09	+4.52	−1.01
1, −3	−3.77	+1.43	−1.14	+0.08	−3 94	+3.11
	+6.28	+0.52	+0.34	+0.02	+10.36	+2.20
	+1.32	+0.01	+1.24	−0.08	−2.66	−6.10
2, −3	+60.33	+0.81	+2.09	+1.75	+76.51	+9.02
	−29.81	−2.21	−0.57	−0.52	−24.82	−5.20
	−32.94	−1.53	−2 19	−1.81	−82.22	−10.47
3, −3	−155.77	−118.60	+1.31	+0.16	−162.28	−123.39
	+65.14	+49.86	−0.44	−0.09	+49.59	+37.45
	+106.79	+80.27	−1.35	−0.16	+167.28	+126.75
4, −3	−5.36	−14.74	−2.20	−1.78	−8.15	−17.00
	+3.25	+7.16	+0.69	+0.55	+2.66	+5.96
	+1.71	+9.25	+2.26	+1.81	+7.08	+16.05
5, −3	+7.58	+10.96	−0.17	−0.25	+8.77	+13.19
	−2.44	−3.31	+0.06	+0.09	−2.13	−3.18
	−6.53	−9.67	+0.15	+0.23	−9.63	−14.57
1, −4	−0.51	+0.32	−0.18	−0.02	+0.06	+2.03
	+1.33	+0.97	+0.05	+0.06	+2.12	+2.33
	+0.27	+0.05	+0.20	−0.01	−2.11	−5.05
2, −4	+9.60	+4.11	+0.35	+0.89	+12.02	+4.17
	−4.70	−5.72	−0.08	−0.28	−4.02	−7.92
	−5.28	−2.09	−0.37	−0.95	−12.73	−0.10
3, −4	−23.74	−67.99	+0.72	−1.35	−24.27	−81.12
	+9.24	+30.67	−0.23	+0.38	+7.68	+27.45
	+15,75	+47.70	−0.74	+1.40	+23.37	+84.88
4, −4	−48.89	+133.74	−0.23	−1.04	−49.86	+136.50
	+19.69	−53.26	+0.06	+0.36	+15.57	−43.07
	+36.57	−102.53	+0.24	+1.07	+50.34	−139.34
5, −4	−11.79	+11.36	−0.58	+1.42	−12.74	+13.86
	+5.14	−5.23	+0.18	−0.45	+4.48	−4.60
	+8.72	−7.28	+0.59	−1.45	+12.28	−12.94
6, −4	+6.01	−7.82	−0.13	+0.17	+6.86	−8.79
	−1.87	+2.52	+0.05	−0.06	−1.79	+2.29
	−5.48	+7.03	+0.12	−0.16	−7.47	+9.54
2, −5	+1.63	+0.64	+0.03	+0.19	+3.24	−0.54
	−0.02	−1.72	+0.02	−0.07	+0.52	−2.61
	−1.10	−0.16	−0.04	−0.20	−4.90	+2.81
3, −5	+0.73	−15.60	+0.54	−0.43	+0.92	−17.97
	−2.96	+7.79	−0.18	+0.12	−4.38	+7.31
	−0.18	+10.79	−0.57	+0.45	+1.35	+17.91
4, −5	−52.67	+41.06	−0.78	−0.26	−61.37	+41.61
	+22.57	−16.49	+0.22	+0.10	+21.12	−13.30
	+41.05	−31.31	+0.81	+0.26	+63.50	−42.26
5, −5	+92.37	+5.25	−0.64	+0.38	+92.87	+5.36
	−35.66	−2.20	+0.22	−0.12	−29.75	−1.66
	−75.17	−3.52	+0.65	−0.39	−94.29	−4.93
6, −5	+12.98	+5.93	+0.79	+0.08	+14.65	+6.01
	−5.50	−2.44	−0.25	−0.03	−4.92	−1.99
	−9.62	−4.83	−0.81	−0.08	−13.98	−6.05

7,—5	—6″29	—2″18	+0″13	+0″05	—6″85	—2″41
	+2.08	+0.69	—0.05	—0.02	+1.95	+0.64
	+5.79	+2.04	—0.13	—0.04	+7.32	+2.66
2,—6	+0.39	+0.12	+0.01	+0.04	+1.15	—0.05
	+0.11	—0.36	+0.01	—0.01	+0.13	—0.61
	—0.32	—0.04	—0.02	—0.04	—1.74	+0.51
3,—6	+0.30	—2.93	+0.16	—0.07	—0.87	—4.02
	—1.50	+1.06	—0.06	0.00	—2.02	+0.28
	+0.15	+2.20	—0.17	+0.09	+2.63	+5.26
4,—6	—16.94	+4.71	—0.37	—0.27	—19.10	+4.69
	+8.20	—0.43	+0.11	+0.09	+8.08	+0.56
	+12.96	—3.86	+0.38	+0.28	+18.75	—5.79
5,—6	+44.09	+30.03	—0.09	+0.44	+45.81	+35.10
	—17.38	—12.49	+0.04	—0.13	—15.13	—12.28
	—35.96	—24.84	+0.08	—0.46	—46.54	—36.07
6,—6	—12.70	—54.29	+0.36	+0.32	—12.42	—54.06
	+4.70	+20.44	—0.12	—0.11	+3.98	+17.45
	+11.29	+45.85	—0.37	—0.33	+13.02	+54.65
7,—6	+0.81	—11.08	—0.07	—0.37	+0.25	—12.09
	—0.42	+4.41	+0.02	+0.12	—0.08	+3.93
	—0.73	+8.89	+0.07	+0.38	—0.36	+11.70

	X		*D*		*E*	
i, *i'*	—sin	cos	cos	—sin	sin	cos
0,0,0		—0″12	—1″188			—15″048
—1,1,0	+26″21	—0.01	+1.188	—14″603	+0″233	+10.878
0,1,0	—2.76	—0.16	+8.372	+43.192	+8.173	+44.231
—1,2,0	—1.25	—0.46	+2.654	+14.788	—5.506	—29.495
1,0,0	+3.00	+0.72	—14.001	—72.071	—5.443	—29.867
2,0	+0.13	+0.08	—3.584	—1.931	—2.132	—2.606
	—1.06	—0.38	—0.718	—1.757	+1.362	+1.499
	+5.15	+1.85	+5.345	+3.773	+1.613	+2.791
3,0	+0.11	+0.05	—2.16	—3.74	—0.64	—1.16
	+0.08	+0.11	+0.23	+0.09	+0.45	+0.80
	—0.46	—0.51	+2.70	+4.96	+0.38	+0.71
—2,—1	+0.11	+0.05	—2.87	—2.56	+1.28	+0.95
	—0.91	—0.19	+4.46	+3.61	—0.78	—0.48
	+0.29	+0.11	—0.55	—0.04	—0.87	—0.67
—1,—1	+0.32	+0.19	—0.16	—4.45	+2.82	+5.98
	+1.89	+2.62	+2.11	+9.66	—2.48	—4.35
	—1.18	—1.51	—3.29	—4.36	—1.72	—3.90
0,—1	—0.63	—1.53	—0.89	—0.22	—25.99	—14.79
	+2.46	+1.45	—31.47	—18.08	+17.57	+9.99
	—2.61	—1.92	+33.14	+18.40	+17.35	+9.98
1,—1	—0.10	—0.11	+10.78	+5.99	+10.12	+6.70
	—2.60	—8.17	+4.42	+3.11	—7.22	—4.47
	+5.28	+15.56	—19.72	—10.80	—7.24	—4.80
2,—1	+0.22	+1.06	—49.68	—6.02	—25.19	—3.27
	—0.12	+0.07	+1.15	+0.16	+16.77	+2.14
	—1.29	+0.28	+65.00	+7.72	+17.04	+2.34

3, −1	+0″.01	−0″.03	+0″.93	−1″.58	+0″.92	−0″.47
	−0.02	+0.62	+0.64	+0.08	−0.47	+0.32
	+0.24	−4.39	−1.79	+2.00	−1.20	+0.23
−1, −2	+0.14	−0.17	+2.12	−1.51	−1.03	+1.18
	−0.09	+1.05	−3.90	+3.21	+0.45	−0.70
	+0.03	−0.63	+0.68	−1.08	+0.75	−0.81
0, −2	+0.80	−0.87	−1.63	+3.22	−9.61	+3.27
	+2.08	−2.44	−8.29	−1.09	+7.21	−2.92
	−1.39	+1.87	+12.17	−4.77	+6.23	−2.01
1, −2	−5.49	+3.97	+33.93	−31.72	+33.53	−31.20
	+0.31	−1.58	+10.66	−9.38	−22.51	+20.90
	−9.50	+9.27	−56 23	+52.07	−22.56	+20.87
2, −2	−0.25	+0.05	−14.41	+9.82	−7.55	+4.22
	−2.38	+1.72	−0.48	−0.65	+5.00	−2.96
	+62.65	−44.32	+19.96	−13.40	+5.80	−3.49
3, −2	+0.47	−0.21	+16.47	−36.29	+5.67	−12.20
	−0.11	+0.12	−2.05	+4.77	−3.73	+8.11
	+1.25	+1.20	−19.86	+43.63	−3.97	+8.25
4, −2	+0.01	−0.02	+0.96	−0.90	+0.15	+0.09
	+0.30	−0.08	−0.20	+0.72	−0.13	+0.01
	−3.06	+0.84	−1.02	+0.44	+0.03	−0.35
0, −3	0.00	−0.15	−0.32	+1.58	−1.50	−0.25
	+0.96	−0.36	−1.67	−3.39	+1.08	−0.13
	−0.84	+0.28	+2.22	+0.56	+0.99	+0.24
1, −3	−1.80	+0.08	+1.57	−15.36	+3.01	−12.14
	−1.62	−0.76	+2.50	−2.03	−1.75	+8.68
	−0.02	+1.64	−3.74	+24.42	−2.10	+7.99
2, −3	+3 17	+2.37	+21.89	+48.90	+10.86	+24.25
	−0.79	+0.08	−0.86	−1.38	−7.27	−16.25
	+20.08	−0.45	−28.47	−64.34	−7.17	−16.45
3, −3	+0.11	+0.17	−1.60	−16.10	−0.42	−5.44
	+0.81	+0.67	+0.22	+1.76	+0.35	+3.63
	−35.74	−27.06	+2.59	+20.33	+0.51	+4.18
4, −3	−0.17	−0.21	+20.21	+17.90	+5.09	+4.58
	+0.13	+0.07	−3.81	−3.23	−3.39	−3.02
	−0.40	−2.02	−23.11	−20.65	−3.41	−3.18
5, −3	−0.01	−0.01	+1.19	+1.25	+0.16	+0.18
	−0.08	−0.15	−0.45	−0.35	−0.14	−0.15
	+1.13	+1.68	−1.08	−1.25	+0.02	−0.01
1, −4	−0.26	−0.01				
	−0.48	−0.57				
	+0.30	+0.81				
2, −4	+0.53	+1.33				
	−0.16	+0.94				
	+3.16	−0.01				
3, −4	+0.70	−2.01				
	+0.15	+0.34				
	−5.61	−14.99				
4, −4	+0.11	−0.14				
	+0.16	−0.33				
	−8.26	+22.86				

5, −4	−0″.07	+0″.10
	0.00	−0.09
	−1.43	+1.24
6, −4	−0.01	+0.02
	−0.05	+0.05
	+0.76	−0.98
2, −5	+0.05	+0.29
	−0.27	+0.40
	+0.78	−0.31
3, −5	+0.77	−0.62
	+0.47	−0.07
	−0.53	−3.22
4, −5	−1.10	−0.05
	+0.13	−0.09
	−8.67	+6.98
5, −5	−0.13	−0.05
	−0.11	−0.03
	+12.58	+0.65
6, −5	+0.06	+0.01
	−0.05	+0.01
	+1.30	+0.64
7, −5	0.00	+0.01
	+0.03	+0.01
	−0.66	−0.24
2, −6	+0.03	+0.07
	−0.10	+0.08
	+0.22	−0.08
3, −6	+0.23	−0.11
	+0.28	+0.09
	−0.29	−0.69
4, −6	−0.54	−0.33
	−0.09	−0.23
	−2.58	+1.09
5, −6	+0.14	+0.52
	−0.06	−0.05
	+5.93	+3.95
6, −6	−0.02	+0.10
	−0.01	+0.04
	−1.46	−6.15
7, −6	0.00	−0.05
	+0.02	+0.04
	+0.07	−0.99

Die Anordnung dieser Tafeln ist dieselbe wie die der vorhergehenden, es sind nemlich bei jedem Argumente die drei Glieder angesetzt, die nach der Verwandelung von η_i in ε sich zu Einem Gliede vereinigen; statt der constanten Glieder selbst ist das Doppelte derselben angesetzt. In den Functionen $\left(\begin{matrix} d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \\ d\varepsilon \end{matrix}\right)$, $\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)$, $T\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$, V und X sind in den Gliedern, welche zu $i' = 0$ gehören, die vom Saturn bewirkten Glieder mit aufgenommen worden.

44.

Für die im Art. 47 (I) entwickelte zur Controle anzuwendende Bedingungsgleichung haben wir

$$\frac{d\delta\frac{h_0}{h}}{d\varepsilon} = \left(\frac{d\overline{T}}{d\lambda}\right)\delta\lambda + A'\frac{a n \delta\varepsilon}{r} + B'\nu + D'\frac{u'}{\cos i} + E'\frac{u_1}{\cos i}$$

wo

$$A' = \left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right) - \overline{T}\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

$$B' = \overline{V},\ D' = \overline{D},\ E' = E$$

Aus den im Vorhergehenden schon gegebenen Hülfsgrössen fanden sich nach schon erklärten Regeln leicht die folgenden.

	$\left(\frac{d\overline{T}}{d\lambda}\right)$		$\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)$		$\overline{T}\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$	
i, i'	−sin	cos	−cos	−sin	cos	sin
0,0			0		−0″.034	
1,0			+0″.503	−0″.050	+0.092	+0″.036
2,0			−4.222	−1.552	+0.015	−0.011
3,0			+0.411	+0.546	−0.092	−0.034
−2,−1			−0.51	−0.02	+0.02	+0.03
−1,−1			+0.51	+0.63	+0.01	−0.04
0,−1			+0.03	+0.06	+0.04	+0.13
1,−1			−1.31	−3.63	−0.03	+0.06
2,−1			+1.21	−1.38	−0.04	−0.23
3,−1			−0.35	+5.72	+0.03	−0.04
−1,−2			+0.06	+0.10	+0.02	−0.02
0,−2	−14″.76	+11″.42	−0.22	+0.18	−0.26	+0.21
1,−2	+58.52	−41.14	+8.25	−6.47	+1.24	−0.87
2,−2	+16.30	−10.58	−60.22	+42.74	+0.34	−0.21
3,−2	−62.78	+43.28	−1.56	−2.30	−1.33	+0.91
4,−2			+5.53	−1.46	−0.08	+0.01
0,−3	−5.31	+1.41	−0.08	+0.02	−0.05	+0.02
1,−3	+33.48	+3.36	+2.22	−0.44	+0.44	+0.02
2,−3	−47.10	−40.77	−23.31	−2.55	−0.67	−0.58
3,−3	−34.32	−6.24	+52.72	+39.32	−0.48	−0.09
4,−3	+53.82	+41.61	+0.13	+3.77	+0.75	+0.58
5,−3			−2.62	−3.85	+0.04	+0.07
1,−4			+0.33	−0.05	+0.07	+0.03
2,−4	−8.64	−33.84	−3.68	−2.75	−0.10	−0.34
3,−4	−23.08	+40.24	+7.01	+25.72	−0.25	+0.43
4,−4	+6.52	+35.84	+15.79	−45.24	+0.07	+0.39
5,−4	+17.40	−46.56	+3.53	−2.48	+0.19	−0.48
6,−4			−2.18	+2.76	+0.04	−0.05
2,−5			−0.54	−0.53	+0.01	−0.08
3,−5	−25.50	+16.15	−1.40	+6.14	−0.21	+0.14
4,−5	+29.10	+11.20	+19.77	−13.80	+0.25	+0.10
5,−5	+27.40	−15.45	−31.15	−1.15	+0.23	−0.13
6,−5	−32.45	−1.95	−3.48	−1.97	−0.27	−0.03
7,−5			+2.26	+0.79	−0.05	−0.01

2,−6	+0″72	−2″22	−0″14	−0″10	0″00	−0″01
3,−6	−10.02	+1.38	−0.47	+1.13	−0.07	+0.02
4,−6	+17.34	+15.48	+6.71	−0.90	+0.12	+0.10
5,−6	+5.16	−19.62	−15.24	−11.30	+0.03	−0.15
6,−6	−17.70	−16.26	+4.75	+18.19	−0.13	−0.12
7,−6			−0.40	+3.24	+0.02	+0.13

i,i'	$\bar{V}$		D		E	
	−sin	cos	cos	−sin	sin	cos
0,0		+0″22	+1″188			+6″708
1,0	+1″76	−9.18	−2.975	−14″091	−2″776	−15.131
2,0	−6.43	−2.45	+1.043	+0.178	+0.852	+1.684
3,0	+0.52	+0.81	+0.77	+1.31	+0.18	+0.35
−2,−1	+0.94	+0.03	+1.04	+1.01	−0.37	−0.20
−1,−1	−1.99	−2.47	−1.01	+0.85	−1.38	−2.27
0,−1	+1.35	+3.37	+0.78	+0.10	+8.93	+5.18
1,−1	−3.89	−11.60	−4.52	−1.70	−4.34	−2.57
2,−1	+0.96	−2.31	+16.47	+1.86	+8.62	+1.21
3,−1	−0.47	+7.57	−0.22	+0.50	−0.75	+0.08
−1,−2	−0.25	−0.43	−1.10	+0.62	+0.17	−0.33
0,−2	−1.62	+1.86	+2.25	−2.64	+3.83	−1.66
1,−2	+16.18	−13.55	−12.64	+10.97	−11.54	+10.57
2,−2	−64.54	+46.07	+5.07	−4.23	+3.25	−2.23
3,−2	−3.82	−0.95	−5.44	+12.11	−2.03	+4.16
4,−2	+6.71	−1.76	−0.26	+0.26	+0.05	−0.25
0,−3	+0.16	+0.35	+0.23	−1.25	+0.57	−0.14
1,−3	+3.76	−0.79	+0.33	+7.03	−0.84	+4.53
2,−3	−30.53	−6.65	−7.44	−16.82	−3.58	−8.45
3,−3	+54.59	+40.81	+1.21	+5.99	+0.44	+2.37
4,−3	+1.59	+5.01	−6.71	−5.98	−1.71	−1.62
5,−3	−2.99	−4.56	−0.34	−0.35	+0.04	+0.02
1,−4	+0.37	−0.69				
2,−4	−4.73	−3.85				
3,−4	+6.78	+31.21				
4,−4	+16.05	−45.91				
5,−4	+4.02	−3.68				
6,−4	−2.40	+3.01				
2,−5	−1.14	−0.34				
3,−5	−2.11	+7.25				
4,−5	+23.25	−13.95				
5,−5	−31.17	−1.23				
6,−5	−4.25	−2.03				
7,−5	+2.42	+0.86				
2,−6	−0.46	−0.15				
3,−6	−0.26	+1.52				
4,−6	+7.73	−0.54				
5,−6	−15.86	−13.25				
6,−6	+4.58	+18.04				
7,−6	−0.19	+3.54				

Es ist hier wieder statt der constanten Glieder das Doppelte derselben angesetzt.

45.

Da im §. 8 (II) gezeigt worden ist, wie die in den Breitenstörungen enthaltenen, von D_2'' und E_2'' abhängigen Glieder für sich integrirt werden können, so haben wir hier nur den Ausdruck

$$\frac{d\delta_1 R_0}{d\varepsilon} = \left(\frac{dU}{d\lambda}\right)\delta\lambda + A''\frac{ar\delta z}{r} + B''\nu + C''\delta\frac{h}{h_0} + D_1''\frac{u}{\cos i} + E_1''\frac{u_1}{\cos i}$$

zu betrachten. Die Function $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ wird hier aus U ebenso berechnet wie $\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)$ aus T berechnet worden ist, nemlich durch Anwendung des Ausdrucks (16) auf U, und in

$$A'' = \left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right) - U\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

wird $\left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right)$ ebenfalls durch Anwendung der Ausdrücke (17) auf U erlangt, gleichwie $U\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$ durch (20) erhalten wird, nachdem darin die Coefficienten von U statt der von T substituirt worden sind. Zufolge (86) (I) ist

$$B'' = Y + U$$

und Y ist aus $a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ}\right)$ auf dieselbe Art zusammengesetzt wie U aus $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$. Substituirt man daher die Coefficienten von $a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ}\right)$ in die Ausdrücke (28) (II) und (30) (II), statt der dort enthaltenen d Coefficienten, so bekommt man $\frac{Y}{\cos i}$ in derselben Form wie der dort abgeleitete Ausdruck für $\frac{U}{\cos i}$. Da ferner

$$C'' = U$$

so ist $\frac{C''}{\cos i}$ unmittelbar gegeben. Geht man von dem Ausdruck (27) (II) zum Reellen über, so bekommt man

$$\begin{aligned}\frac{U}{\cos i} = {} & \Sigma' T(i,i',s)\cos(i,i') \qquad - \Sigma' T(i,i',c)\sin(i,i') \\ & + \Sigma' U(i,i',s)\cos\{-\eta+(i,i')\} - \Sigma' U(i,i',c)\sin\{-\eta+(i,i')\} \\ & + \Sigma' V(i,i',s)\cos\{\ \eta+(i,i')\} - \Sigma' V(i,i',c)\sin\{\ \eta+(i,i')\}\end{aligned}$$

in dieser Form bekommt man alle in diesem Artikel betrachteten Functionen.

46.

Es wurde ferner (88) (I)

$$\frac{D_1''}{\cos i} = PW;\quad \frac{E_1''}{\cos i} = PW_1$$

gesetzt, wo

$$P = e\sin\varepsilon - e\sin\eta + \sin(\eta-\varepsilon)$$

$$W = (1-e\cos\varepsilon)a''\left(\frac{d^2\Omega}{dZ^2}\right) + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos^2 q}\,a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) - \frac{1+e\cos\varepsilon}{\cos^2 q}\,ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

$$W_1 = -\frac{1-e\cos\varepsilon}{\cos^2 q}\,a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos^2 q}\,ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

ist, und es sind daher nun zuerst W und W_1 zu entwickeln. Diese Rechnung ist sehr einfach, denn man braucht nur die Coefficienten von $a^3\left(\frac{d^2\Omega}{dZ^2}\right)$ mit $\frac{1}{2}e$, die von $a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ mit $\frac{1}{\cos^2\varphi}-1$, oder $\mathrm{tg}^2\varphi$, und $\frac{e}{2\cos^2\varphi}$, und die von $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ mit $\frac{e}{2\cos^2\varphi}$ zu multipliciren, und darauf die Producte nach Maassgabe der vorstehenden Ausdrücke zu addiren. Setzt man zu dem Ende

$$a^3\left(\frac{d^2\Omega}{dZ^2}\right) = \Sigma' f(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma' f(i,i',s)\sin(i,i')$$

und wie früher

$$a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = -\Sigma' b(i,i',c)\sin(i,i') + \Sigma' b(i,i',s)\cos(i,i')$$

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \Sigma' c(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma' c(i,i',s)\sin(i,i')$$

so bekommt man

$$W = \Sigma' \left\{ \begin{array}{l} f(i,i',c) - c(i,i',c) - \frac{e}{2} f(i-1,i',c) + \frac{e}{2\cos^2\varphi} b(i-1,i',c) - \frac{e}{2\cos^2\varphi} b(i+1,i',c) \\ -\mathrm{tg}^2\varphi c(i,i',c) - \frac{e}{2} f(i+1,i',c) - \frac{e}{2\cos^2\varphi} c(i-1,i',c) - \frac{e}{2\cos^2\varphi} c(i+1,i',c) \end{array} \right\} \cos(i,i')$$

$$+ \Sigma' \left\{ \begin{array}{l} f(i,i',s) - c(i,i',s) - \frac{e}{2} f(i-1,i',s) + \frac{e}{2\cos^2\varphi} b(i-1,i',s) - \frac{e}{2\cos^2\varphi} b(i+1,i',s) \\ -\mathrm{tg}^2\varphi c(i,i',s) - \frac{e}{2} f(i+1,i',s) - \frac{e}{2\cos^2\varphi} c(i-1,i',s) - \frac{e}{2\cos^2\varphi} c(i+1,i',s) \end{array} \right\} \sin(i,i')$$

$$W_1 = \Sigma' \left\{ \begin{array}{l} b(i,i',c) - \frac{e}{2\cos^2\varphi} b(i-1,i',c) - \frac{e}{2\cos^2\varphi} b(i+1,i',c) \\ +\mathrm{tg}^2\varphi b(i,i',c) + \frac{e}{2\cos^2\varphi} c(i-1,i',c) - \frac{e}{2\cos^2\varphi} c(i+1,i',c) \end{array} \right\} \sin(i,i')$$

$$- \Sigma' \left\{ \begin{array}{l} b(i,i',s) - \frac{e}{2\cos^2\varphi} b(i-1,i',s) - \frac{e}{2\cos^2\varphi} b(i+1,i',s) \\ +\mathrm{tg}^2\varphi b(i,i',s) + \frac{e}{2\cos^2\varphi} c(i-1,i',s) - \frac{e}{2\cos^2\varphi} c(i+1,i',s) \end{array} \right\} \cos(i,i')$$

Bezeichnet man nun diese Coefficienten von W und W_1 mit $B(i,i',s)$, $B(i,i',c)$, $B_1(i,i',s)$ und $B_1(i,i',c)$, das heisst, setzt man hierauf

$$W = \Sigma B(i,i',s)\cos(i,i') + \Sigma B(i,i',c)\sin(i,i')$$

$$W_1 = \Sigma B_1(i,i',s)\sin(i,i') - \Sigma B_1(i,i',c)\cos(i,i')$$

wo man wieder statt der constanten Glieder selbst das Doppelte derselben ansetzen muss, dann ist durch den obigen Ausdruck für P leicht zu erkennen, dass

$$\begin{aligned} \frac{D_1''}{\cos i} = & -\Sigma E(i,i',s)\sin(i,i') + \Sigma E(i,i',c)\cos(i,i') \\ & -\Sigma F(i,i',s)\sin\{-\eta+(i,i')\} + \Sigma F(i,i',c)\cos\{-\eta+(i,i')\} \\ & -\Sigma G(i,i',s)\sin\{\eta+(i,i')\} + \Sigma G(i,i',c)\cos\{\eta+(i,i')\} \\ \frac{E_1''}{\cos i} = & \Sigma E_1(i,i',s)\cos(i,i') + \Sigma E_1(i,i'c)\sin(i,i') \\ & +\Sigma F_1(i,i',s)\cos\{-\eta+(i,i')\} + \Sigma F_1(i,i',c)\sin\{-\eta+(i,i')\} \\ & +\Sigma G_1(i,i',s)\cos\{\eta+(i,i')\} + \Sigma G_1(i,i',c)\sin\{\eta+(i,i')\} \end{aligned}$$

wo allgemein $E(i,i') = \mathit{AB}(i-1,i') - \mathit{AB}(i+1,i')$

$F(i,i') = \mathit{AB}(i,i') + \frac{1}{2}B(i-1,i')$

$G(i,i') = -\mathit{AB}(i,i') - \frac{1}{2}B(i+1,i')$

und $\mathit{A} = -\frac{1}{2}e$ ist. Die E Coefficienten braucht man wieder nicht aus der vorstehenden Formel zu berechnen, da allgemein

$$E(i,i') = -F(i+1,i') - G(i-1,i')$$

ist. Diese Ausdrücke gelten sowohl für die Coefficienten der Sinusse wie für die Cosinusse beides in D_1'' und E_1''.

47.

Ich stelle jetzt die numerischen Werthe der im Vorstehenden erklärten Hülfsgrössen für unser Beispiel auf, welchen die Bemerkung voranzusenden ist, dass hier das Product $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)d\lambda$ gänzlich unmerklich ist und daher $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ nicht berechnet zu werden brauchte.

	$\frac{\left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right)}{\cos i}$		$\frac{U\frac{ae\sin\varepsilon}{r}}{\cos i}$		$\frac{Y}{\cos i}$	
i,i'	−sin	−cos	sin	cos	cos	−sin
0,0,0		0		+0″.014	−0″.48	
−1,1,0	+0″.146	+3″.328	+0″.116	−0.007	+0.24	+8″.29
0,1,0	+0.031	−0.185	−0.015	−0.027	+0.10	−0.47
−1,2,0	−2.788	−14.836	−0.008	+0.107	−2.96	−14.84
1,0,0	0	0	+0.023	−0.080	+2.86	+15.31
2,0	+0.250	+1.286	+0.002	−0.010	+0.29	+1.34
	+1.083	+1.542	−0.064	−0.316	+1.17	+1.31
	−0.486	−1.157	+0.061	+0.325	−1.46	−2.65
3,0	−0.11	−0.14	+0.01	+0.03	−0.12	−0.13
	+0.43	+0.78	+0.01	+0.09	+0.51	+0.98
	−0.14	−0.30	−0.02	−0.04	−0.39	−0.85
−2,−1	+0.09	+0.18	−0.02	−0.01	−0.13	−0.25
	+0.18	+0.08	+0.03	+0.05	−0.83	−0.43
	−0.64	−0.47	−0.01	−0.04	+0.96	+0.68
−1,−1	−0.38	−0.22	0.00	0.00	+1.12	+0.65
	−0.07	−0.04	−0.19	−0.11	−2.58	−3.40
	−0.95	−1.99	+0.20	+0.11	+1.46	+2.75
0,−1	−0.01	0.00	+0.02	+0.08	−0.37	−0.01
	+4.54	+2.62	+0.87	+0.46	+12.71	+7.24
	+4.34	+2.53	−0.89	−0.53	−12.34	−7.23
1,−1	−0.01	−0.17	+0.01	0.00	−0.02	−0.45
	−4.44	−2.44	0.00	+0.09	−6.94	−2.96
	+0.13	+0.05	−0.01	−0.08	+6.96	+3.41

2, −1	+0″.28	+0″.21	+0″.02	−0″.07	+0″.45	+0″.24
	+12.69	+1.66	−0.90	−0.51	+12.00	+1.40
	−4.40	−0.67	+0.89	+0.57	−12.45	−1.64
3, −1	−1.11	−0.13	+0.01	0.00	−1.08	−0.10
	−0.85	+0.26	+0.18	+0.02	−0.59	+0.33
	+1.19	−0.04	−0.18	−0.03	+1.67	−0.23
−1, −2	−0.13	+0.04	+0.02	−0.02	+0.40	−0.09
	−0.06	+0.03	−0.08	+0.03	+0.38	−0.69
	+0.37	−0.39	+0.06	−0.02	−0.78	+0.78
0, −2	0.00	0.00	+0.01	0.00	−1.04	+0.95
	+2.32	−1.20	+0.25	−0.28	+5.31	−2.01
	+1.49	−0.44	−0.26	+0.30	−4.27	+1.06
1, −2	−0.03	−0.02	−0.04	+0.03	+0.01	−0.19
	−11.66	+10.58	+0.03	0.00	−12.00	+10.66
	+0.10	−0.06	+0.01	−0.02	+11.99	−10.47
2, −2	+0.80	−0.54	0.00	0.00	+0.68	−0.22
	+4.48	−3.14	−0.21	+0.13	+4.84	−4.13
	−2.03	+1.46	+0.20	−0.13	−5.52	+4.35
3, −2	−0.36	+0.20	+0.02	0.00	−0.39	+0.27
	−3.84	+8.16	+0.05	−0.03	−3.60	+7.74
	+2.19	−4.24	−0.07	+0.03	+3.99	−8.01
4, −2	+0.33	−0.73	0.00	0.00	+0.31	−0.71
	−0.04	−0.22	−0.04	+0.09	−0.13	−0.07
	−0.24	+0.70	+0.05	−0.09	−0.18	+0.78
0, −3	+0.01	+0.02	+0.01	+0.01	−0.07	+0.51
	+0.31	−0.17	+0.01	−0.09	+0.81	+0.10
	+0.23	+0.12	−0.02	+0.08	−0.74	−0.61
1, −3	−0.17	−0.35	0.00	+0.01	−0.49	−1.08
	−0.59	+5.02	+0.09	+0.17	−0.24	+6.53
	−0.07	−0.19	−0.08	−0.18	+0.73	−5.45
2, −3	+0.10	−0.18	−0.01	−0.02	+0.13	−0.12
	−5.40	−12.59	−0.02	+0.06	−5.15	−12.48
	+1.74	+4.39	+0.03	−0.03	+5.02	+12.60
3, −3	+0.24	+0.85	0.00	0.00	+0.10	+0.72
	+0.83	+4.36	−0.04	−0.15	+1.30	+4.61
	−0.63	−2.86	+0.03	+0.14	−1.40	−5.33
4, −3	−0.04	−0.34	0.00	+0.01	−0.09	−0.37
	−4.21	−3.88	+0.01	+0.04	−3.96	−3.63
	+2.57	+2.61	−0.01	−0.06	+4.05	+4.00
5, −3	+0.39	+0.34	0.00	0.00	+0.36	+0.32
	−0.09	−0.11	−0.04	−0.03	−0.15	−0.18
	−0.26	−0.21	+0.04	+0.04	−0.21	−0.14
1, −4	−0.14	−0.08	−0.01	0.00	−0.45	−0.25
	+0.20	+0.91	+0.07	+0.04	+0.03	+1.28
	−0.07	−0.05	−0.06	−0.04	+0.42	−1.03
2, −4	+0.42	−0.09	0.00	0.00	+0.84	−0.14
	−4.87	−2.59	−0.11	+0.03	−5.75	−2.52
	+1.51	+0.92	+0.11	−0.02	+4.91	+2.66
3, −4	+0.21	+0.18	+0.02	0.00	+0.16	+0.18
	+10.00	−0.66	−0.04	−0.03	+9.77	−0.53
	−5.20	+0.18	+0.03	+0.03	−9.93	+0.35

4,−4	−0″.66	−0″.03	0″.00	0″.00	−0″.59	−0″.09
	−3.15	−0.67	+0.09	0.00	−3.27	−0.43
	+2.51	+0.41	−0.09	0.00	+3.86	+0.52
5,−4	+0.26	+0.06	0.00	0.00	+0.28	+0.03
	+2.92	−1.71	−0.03	−0.01	+2.58	−1.60
	−2.17	+1.09	+0.03	+0.01	−2.86	+1.57

Ferner ergab sich

	$\frac{W}{\cos i}$		$\frac{W_1}{\cos i}$	
i,i'	cos	sin	sin	−cos
0,0	−88″.279			+0″.062
1,0	+3.232	+2″.774	+0″.396	−0.079
2,0	+11.067	+4.067	−2.028	−0.759
3,0	−0.754	−1.283	+0.053	+0.152
−2,−1	+2.80	+0.76	+0.24	−0.01
−1,−1	−8.16	−10.98	−0.48	−0.61
0,−1	−8.64	−4.67	+0.31	+0.82
1,−1	+14.85	+47.02	−1.26	−3.65
2,−1	+0.73	+1.14	+0.53	−0.78
3,−1	+0.31	−8.16	−0.09	+1.86
−1,−2	−0.10	−4.27	−0.05	−0.11
0,−2	−9.36	+11.93	−0.49	+0.50
1,−2	−4.74	+11.33	+6.05	−4.91
2,−2	+47.91	−33.26	−29.84	+21.07
3,−2	+3.24	−1.88	−2.02	+0.33
4,−2	−5.05	+1.32	+1.29	−0.35
0,−3	−4.99	+1.90	−0.01	+0.09
1,−3	+10.41	+5.02	+1.28	−0.49
2,−3	+14.56	−1.45	−10.46	−0.47
3,−3	−24.35	−19.50	+17.00	+13.17
4,−3	−2.55	−2.41	+0.91	+1.61
5,−3	+1.67	+2.60	−0.49	−0.69

und hieraus

	$\frac{D'_1}{\cos i}$		$\frac{E'_1}{\cos i}$	
i,i'	−sin	cos	cos	sin
0,0,0		+0″.236	+0″.034	
−1,1,0	−44″.277	−0.118	−0.017	+0″.034
0,1,0	+4.217	+0.173	−0.086	−0.035
−1,2,0	+1.146	+1.214	+0.284	−0.008
1,0,0	−5.363	−1.387	−0.198	+0.043
2,0	−0.169	−0.172	−0.015	+0.068
	+5.566	+2.088	−1.016	−0.445
	−5.397	−1.916	+1.031	+0.377
3,0	−0.47	−0.17	+0.08	+0.03
	−0.38	−0.64	+0.03	+0.08
	+0.85	+0.81	−0.11	−0.11

−2, −1	−0″.35	−0″.47	−0″.02	−0″.03
	+1.75	+0.85	+0.14	+0.02
	−1.40	−0.38	−0.12	+0.01
−1, −1	−0.49	−0.52	0.00	+0.03
	−3.71	−5.29	−0.25	−0.34
	+4.20	+5.81	+0.25	+0.31
0, −1	+0.98	+2.47	−0.03	−0.13
	−4.95	−4.34	+0.21	+0.57
	+3.97	+1.87	−0.18	−0.44
1, −1	+0.40	+0.25	+0.01	−0.06
	+7.40	+23.46	−0.65	−1.80
	−7.80	−23.71	+0.64	+1.86
2, −1	−0.62	−2.35	+0.05	+0.24
	+0.36	+0.92	+0.27	−0.47
	+0.26	+1.43	−0.32	+0.23
3, −1	−0.03	−0.05	−0.02	+0.03
	+0.16	−4.08	−0.05	+0.93
	−0.13	+4.13	+0.07	−0.96
−1, −2	−0.40	+0.51	−0.02	+0.02
	+0.35	−2.65	−0.01	−0.08
	+0.05	+2.14	+0.03	+0.06
0, −2	−0.20	+0.66	+0.26	−0.21
	−4.48	+5.49	−0.51	+0.46
	+4.68	−6.15	+0.25	−0.25
1, −2	+2.43	−1.92	−1.25	+0.88
	−4.40	+7.08	+4.30	−3.36
	+1.97	−5.16	−3.05	+2.48
2, −2	+0.34	−0.56	−0.35	+0.22
	+23.82	−16.55	−14.83	+10.53
	−24.16	−17.11	+15.18	−10.75
3, −2	−2.25	+1.47	+1.32	−0.91
	+1.84	−1.00	−1.06	+0.18
	+0.41	−0.47	−0.26	+0.73
4, −2	−0.14	+0.08	+0.09	−0.01
	−2.53	+0.66	+0.64	−0.18
	+2.67	−0.74	−0.73	+0.19
0, −3	+0.45	+0.21	+0.05	−0.02
	−2.95	+0.75	−0.06	+0.07
	+2.50	−0.96	+0.01	−0.05
1, −3	+0.83	−0.14	−0.44	−0.02
	+4.59	+2.57	+1.08	−0.23
	−5.42	−2.43	−0.64	+0.25
2, −3	−1.49	−1.04	+0.67	+0.38
	+8.32	+0.10	−5.95	−0.80
	−6.83	+0.94	+5.28	+0.22
3, −3	−0.73	−0.04	+0.48	+0.09
	−12.07	−9.65	+8.46	+6.52
	+12.80	+9.69	−8.94	−6.61
4, −3	+1.11	+0.94	−0.74	−0.59
	−1.35	−1.32	+0.48	+0.84
	+0.24	+0.38	+0.26	−0.25
5, −3	+0.11	+0.11	−0.04	−0.07
	+0.84	+1.30	−0.25	−0.35
	−0.95	−1.41	+0.29	+0.42

48.

Ausser den im Vorhergehenden angeführten Bedingungsgleichungen findet bei allen Hülfsgrössen für die Breitenstörungen noch die folgende statt. Seien in irgend einer derselben

$$P \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i')$$
$$+ Q \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \{-\eta+(i,i')\}$$
$$+ R \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \{\eta+(i,i')\}$$

irgend drei Glieder, in welchen die Indices i und i' dieselben Werthe haben, dann ist

$$P = -e(Q+R)$$

welche Gleichung davon herrührt, dass diese Functionen ursprünglich die Form

$$K(\cos\eta - e) + L\sin\eta$$

haben.

Im Vorstehenden habe ich alle zur Berechnung der vom Quadrat der störenden Kraft abhängigen Glieder erforderlichen Hülfsgrössen angegeben, obgleich mehrere derselben hätten weggelassen werden können, da sie auf das Resultat nur sehr geringen Einfluss äussern. Ich habe aber alle angeführt, um zu zeigen, wie man in einem extremen Falle zu verfahren hat. Auch hätte ich nicht nöthig gehabt sie in dieser Ausdehnung zu berechnen, sondern hätte fast allenthalben an dem untern Ende einer jeden Abtheilung in Bezug auf den Index i' wenigstens Ein Glied weglassen können, es ist indessen jedenfalls angemessener, sofort eine zu grosse wie eine zu kleine Anzahl von Gliedern berechnet zu haben, da das nachherige Berechnen von Gliedern, im Falle, dass man zuerst eine zu geringe Anzahl davon berechnet haben sollte, nicht angenehm ist. Uebrigens hat die Berechnung dieser Hülfsgrössen in der denselben im Vorstehenden gegebenen Ausdehnung nur eine Arbeit von wenigen Tagen in Anspruch genommen, da die Formeln, nach welchen sie berechnet worden, so einfach und gleichförmig sind.

§. 5. Berechnung der für die vom Quadrat der störenden Masse abhängigen Glieder erforderlichen Producte.

49.

In der grössten Anzahl der zu berechnenden Producte besteht der eine Factor aus einer von η abhängigen Function, während der andere kein η enthält. Ausserdem sind einige Producte erforderlich, in welchen jeder der beiden Factoren von η unabhängig ist; Producte, in welchen beide Factoren von η abhängig wären, kommen gar nicht vor. Betrachten wir die erstgenannte Gattung von Producten etwas näher. Wegen der Abhängigkeit des einen Factors derselben von η besteht dieser, wie man im Vorhergehenden gesehen hat, aus drei verschiedenen Gattungen von Gliedern, nemlich aus solchen, die kein η enthalten, aus solchen, in welchen unter dem Sinus- und Cosinuszeichen $-\eta$, und aus solchen, wo $+\eta$ vorkommt. Bei der Berechnung dieser Producte könnte man jede dieser Gattungen von Gliedern besonders behandeln, oder mit andern Worten jedes Product in drei Theile zerlegen, und würde dieses auf folgende Weise ausführen können. Seien z. B. im Factor A von $\frac{an\delta z}{r}$

$$\begin{aligned}&\alpha_s \sin(i,i') && + \alpha_c \cos(i,i')\\ &+\beta_s \sin\{-\eta+(i,i')\} && + \beta_c \cos\{-\eta+(i,i')\}\\ &+\gamma_s \sin\{\ \eta+(i,i')\} && + \gamma_c \cos\{\ \eta+(i,i')\}\end{aligned}$$

irgend drei Glieder, in welchen die Indices i und i' dieselben Werthe haben, dann zerlegt man diese Function in die drei Elemente, welche sie zufolge des §. 4 enthält, indem man erstens die Glieder heraushebt, die von η unabhängig sind, zweitens in den übrigen Gliedern $\eta = 0$, und drittens in denselben $\eta = 90^0$ macht. Setzt man daher

$$\begin{aligned}\Xi_1 = &\quad \Sigma\alpha_s \sin(i,i') && + \Sigma\alpha_c \cos(i,i')\\ \Upsilon = &\quad \Sigma(\beta_s+\gamma_s)\sin(i,i') && + \Sigma(\beta_c+\gamma_c)\cos(i,i')\\ \Psi = &-\Sigma(\beta_s-\gamma_s)\cos(i,i') && + \Sigma(\beta_c-\gamma_c)\sin(i,i')\end{aligned}$$

so kann man statt des Products $A\frac{an\delta z}{r}$ die drei Producte

$$\Xi_1 \frac{an\delta z}{r};\quad \Upsilon\frac{an\delta z}{r};\quad \Psi\frac{an\delta z}{r}$$

rechnen, die von η unabhängig sind. Durch die Analyse des §. 4 überzeugt man sich leicht, dass in der That die hier Ξ_1, Υ und Ψ genannten Functionen bez. die Coefficienten von $\frac{an\delta z}{r}$ in den Differentialen der Variationen der dort $\Xi + \frac{1}{2}e\Upsilon$, Υ und Ψ genannten Elemente sind.

Sei durch Berechnung dieser drei Producte erhalten worden

$$\Xi_1 \frac{an\delta z}{r} = \Sigma f_s \sin(i,i') + \Sigma f_c \cos(i,i')$$
$$\Upsilon \frac{an\delta z}{r} = \Sigma g_s \sin(i,i') + \Sigma g_c \cos(i,i')$$
$$\Psi \frac{an\delta z}{r} = \Sigma h_s \cos(i,i') + \Sigma h_c \sin(i,i')$$

so wird

$$A \frac{an\delta z}{r} = \Sigma f_s \sin(i,i') + \Sigma f_c \cos(i,i')$$
$$+\tfrac{1}{2}\Sigma(g_s - h_s)\sin\{-\eta+(i,i')\} + \tfrac{1}{2}\Sigma(g_c+h_c)\cos\{-\eta+(i,i')\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\Sigma(g_s+h_s)\sin\{\eta+(i,i')\} + \tfrac{1}{2}\Sigma(g_c-h_c)\cos\{\eta+(i,i')\}$$

und auf diese Weise kann man mit jedem der übrigen ähnlichen Producte verfahren.

50.

Das eben beschriebene Verfahren wende ich indess nicht an, sondern ziehe vor, die Producte ungetheilt zu berechnen. Ich ordne daher die betreffenden Factoren nicht nach den Werthen des Index i, sondern so wie im vor. § in den numerischen Angaben derselben geschehen ist, nemlich so, dass die Glieder

$$(i,i') \text{ oder } \qquad (i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-c\mu)$$
$$-\eta+(i+1,i') \ldots -\eta+(i+1-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-c\mu)$$
$$\eta+(i-1,i') \ldots +\eta+(i-1-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-c\mu)$$

die sich nachher nach der Verwandelung von η in ε zu Einem Gliede vereinigen, unmittelbar auf einander folgen. Die Berechnung des Products geht auf diese Art schneller und sicherer von statten und lässt sich leicht controliren. In einigen Producten, und zwar in

$$C\delta\frac{h}{h_0};\ B''\nu;\ C''\delta\frac{h}{h_0};\ D''_1\frac{u}{\cos i};\ E''_1\frac{u_1}{\cos i}$$

ist die Summe der Coefficienten von je drei der vorbenannten Glieder gleich Null, und da diese Eigenschaft auf das Product übergeht, so giebt sie unmittelbar ein Mittel zur Aufsuchung und Berichtigung der etwa bei der Berechnung des Products begangenen Rechnungsfehler. Die übrigen Producte besitzen diese Eigenschaft nicht, aber dadurch, dass ich die Summe von je dreien der oben genannten Glieder nehme, und diese nachher auch mit dem betreffenden zweiten Factor multiplicire, erlange ich für die richtige Berechnung dieser Producte auch eine sichere Controle.

51.

Die Zeichen der Coefficienten der Hülfsgrössen sind im vor. § so gelassen worden, wie die Formeln ohne Unterschied zwischen den Cosinussen und Sinussen zu machen sie unmittelbar geben. Bei der Anwendung derselben zur Bildung der Producte müssen von einigen derselben, um wieder eine Gleichförmigkeit in der Zusammensetzung der Coefficienten der verschiedenen Producte zu erhalten, die Zeichen geändert werden. Hieraus kann keine Quelle des Irrthums entstehen, da man diese Zeichenwechsel bei allen bez. Coefficienten auf ein Mal vornehmen kann.

Ich werde nun in jedem Factor nur Ein Argument betrachten, da die Formeln für dieses sich auf alle ausdehnen lassen. Unter dem Kreisbogen, welcher dieses Argument bildet, soll

$$l\eta + (i - i'\mu)\varepsilon - i''(c' - c\mu)$$

verstanden werden, so dass, wenn man l nur die drei folgenden Werthe beilegt,

$$l = 0,\ l = -1,\ l = +1$$

dieses Argument alle drei Gattungen von Gliedern in sich begreift. Der Kürze wegen werde ich dieses Argument wieder nicht ganz ausschreiben, sondern wie vorher, aber mit Hinzufügung von l, nur die Indices davon angeben, und also unter den Bezeichnungen $\cos(l, i, i'')$ und $\sin(l, i, i'')$ wieder den Cosinus und Sinus des obigen Arguments verstehen. Sei nun

$$\begin{aligned}
A &= \ \ A_c \cos(l,i,i'') - A_s \sin(l,i,i'') \\
B &= -B_s \sin(l,i,i'') + B_c \cos(l,i,i'') \\
C &= -C_s \sin(l,i,i'') + C_c \cos(l,i,i'') \\
D &= \ \ D_c \cos(l,i,i'') - D_s \sin(l,i,i'') \\
E &= -E_s \sin(l,i,i'') + E_c \cos(l,i,i''
\end{aligned}$$

woraus ersichtlich ist, dass nur dem A_c und E_s in Bezug auf die Zeichen, die sie im vor. § haben, die entgegengesetzten Zeichen gegeben worden sind. Uebrigens sollen die vorstehenden Coefficienten in Secunden, und von den constanten Gliedern das Doppelte, welches in allen Tafeln des vor. § schon angesetzt ist, verstanden werden. Von den zweiten Factoren setze ich das folgende Argument an:

$$\frac{an\delta z}{r} = 2a_s \sin(k,k') + 2a_c \cos(k,k'$$
$$\nu = 2b_c \cos(k,k') + 2b_s \sin(k,k')$$
$$\delta\frac{h}{h_0} = 2c_c \cos(k,k') + 2c_s \sin(k,k')$$
$$\frac{u}{\cos i} = 2d_s \sin(k,k') + 2d_c \cos(k,k')$$
$$\frac{u_1}{\cos i} = 2e_c \cos(k,k') + 2e_s \sin(k,k')$$

wo die Coefficienten in Theilen des Radius ausgedrückt sein sollen, damit man die des Products in Secunden bekomme. Nachdem man also von den in Secunden ausgedrückten Coefficienten dieser Grössen das constante Glied verdoppelt hat, muss man alle Coefficienten ohne Ausnahme mit $2(206265'')$ dividiren, um die vorstehenden mit a_s, a_c, b_c etc. bezeichneten Coefficienten zu erhalten. Aus den im Vorstehenden betrachteten Gliedern bekommt man nun

$$A\frac{an\delta z}{r} = -(A_s a_c \mp A_c a_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k') + (A_c a_c \pm A_s a_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k')$$
$$B\nu = -(B_s b_c \mp B_c b_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k') - (B_c b_c \pm B_s b_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k')$$
$$C\delta\frac{h}{h_0} = -(C_s c_c \mp C_c c_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k') + (C_c c_c \pm C_s c_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k')$$
$$D\frac{u}{\cos i} = -(D_s d_c \mp D_c d_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k') + (D_c d_c \pm D_s d_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k')$$
$$E\frac{u_1}{\cos i} = -(E_s e_c \mp E_c e_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k') + (E_c e_c \pm E_s e_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k')$$

Sei ferner

$$\left(\frac{\overline{dW_0}}{d\eta}\right) = F_s \sin(i,i'') + F_c \cos(i,i'')$$

wo zufolge des §. 4 (II)

$$F_s = \left\{\frac{G(i+1,i'',c)}{i+1-i''\mu} - \frac{H(i-1,i'',c)}{i-1-i''\mu}\right\}$$
$$F_c = -\left\{\frac{G(i+1,i'',s)}{i+1-i''\mu} - \frac{H(i-1,i'',s)}{i-1-i''\mu}\right\}$$

ist, und betrachten wir in ν auch das folgende Glied

$$\nu = V_c \cos(i,i'') + V_s \sin(i,i'')$$

Diese geben

$$\left(\frac{\overline{dW_0}}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r} = (F_c a_c \mp F_s a_s)\cos(i\pm k, i''\pm k') + (F_s a_c \pm F_c a_s)\sin(i\pm k, i''\pm k')$$
$$\nu^2 = (V_c b_c \mp V_s b_s)\cos(i\pm k, i''\pm k') + (V_s b_c \pm V_c b_s)\sin(i\pm k, i''\pm k')$$

Sei ferner

$$\left(\frac{\overline{d^2W_0}}{d\eta^2}\right) = -G_c \cos(i,i'') + G_s \sin(i,i'')$$

wo in Bezeichnungen des §. 4 (II)

$$G_c = \left\{\frac{G(i+1,i',c)}{i+1-i'\mu} + \frac{H(i-1,i',c)}{i-1-i'\mu}\right\}$$
$$G_s = -\left\{\frac{G(i+1,i',s)}{i+1-i'\mu} + \frac{H(i-1,i',s)}{i-1-i'\mu}\right\}$$

ist, dann wird

$$\left(\frac{\overline{d^2W_0}}{d\eta^2}\right)\frac{an\delta z}{r} = (G_s a_c \mp G_c a_s)\sin(i \pm k, i' \pm k') - (G_c a_c \pm G_s a_s)\cos(i \pm k, i' \pm k')$$

Dieses sind mit Ausnahme des Products

$$\left(\frac{\overline{dW_0}}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r} \cdot \frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

welches durch den Ausdruck (20) erhalten wird, nachdem man darin die Coefficienten von $\left(\frac{\overline{dW_0}}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}$ statt der F Coefficienten substituirt hat, alle für die Störungen der Länge und des Radius erforderlichen Producte. Alle sind, wie man sieht, auf gleiche Art zusammengesetzt, und die Vorzeichen der Glieder sind so, wie für die Integrationen am einfachsten ist. Wenn man die Logarithmen von A_c und A_s in dieser Folge neben einander auf den oberen Rand eines Blattes Papiers, und die von a_s und a_c in dieser Folge auf den unteren Rand eines anderen Blattes Papiers geschrieben hat, so bekommt man die Logarithmen der partiellen Producte in folgender Anordnung

$$\log A_c a_s,\ \log A_s a_s$$
$$\log A_c a_c,\ \log A_s a_c$$

nennt man die dazu gehörigen Zahlen beziehungsweise

$$(3),(4)$$
$$(2),(1)$$

dann wird

$$A\frac{an\delta z}{r} = -\{(1)-(3)\}\sin(l,i+k,i'+k') + \{(2)+(4)\}\cos(l,i+k,i'+k')$$
$$-\{(1)+(3)\}\sin(l,i-k,i'-k') + \{(2)-(4)\}\cos(l,i-k,i'-k')$$

Schreibt man wieder die Logarithmen von B_s, B_c und b_c, b_s in dieser Folge hin, so erhält man die partiellen Producte in folgender Anordnung:

$$\log B_s b_c,\ \log B_c b_c$$
$$\log B_s b_s,\ \log B_c b_s$$

und nennt man die Zahlen dann beziehungsweise

$$(1),(2)$$
$$(4),(3)$$

dann wird wieder

$$(22)\quad Bv = -\{(1)-(3)\}\sin(l,i+k,i'+k') + \{(2)+(4)\}\cos(l,i+k,i'+k')$$
$$-\{(1)+(3)\}\sin(l,i-k,i'-k') + \{(2)-(4)\}\cos(l,i-k,i'-k')$$

Geht man die vorstehenden Producte durch, so zeigt sich, dass man, um die in der vorstehenden Gleichung für die Bildung der Coefficienten des Products enthaltene Regel in allen Producten anwenden zu können, in den Producten

$$A\frac{an\delta z}{r}\ ;\ D\frac{u}{\cos i}\ ;\ \left(\frac{d\overline{W}_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}\ ;\ \left(\frac{d^2\overline{W}_0}{d\eta^2}\right)\frac{an\delta z}{r}$$

die Bezeichnung

$$\begin{matrix}(3),(4)\\(2),(1)\end{matrix}$$

der partiellen Producte, und in den Producten

$$B\nu;\ C\delta\frac{h}{h_0}\ ;\ E\frac{u_1}{\cos i}\ ;\ \nu^2$$

die Bezeichnung

$$\begin{matrix}(1),(2)\\(4),(3)\end{matrix}$$

anwenden muss. Die obigen Formeln gelten für alle Glieder, nur muss man, wenn man den einfachen Werth des constanten Gliedes des Products haben will, von dem partiellen Product der constanten Glieder der beiden Factoren die Hälfte nehmen.

Wenn $k'>i'$ ist, so bekommt man durch diese Formeln Glieder, in welchen der mit $\mu\varepsilon$ multiplicirte Index das Pluszeichen hat, während wir bisher diesem nur das Minuszeichen zugetheilt haben. Es zieht aber gar keine Vermehrung der Arbeit mit sich, wenn man diese Glieder im Product für sich ansetzt, denn nachdem man alle Glieder des Products berechnet, und die Glieder, aus welchen jeder Coefficient desselben zusammengesetzt ist, addirt hat, kann man die genannten Glieder durch Umkehrung der Zeichen aller Indices und des Coefficienten des Sinus mit den analogen vereinigen, in welchen $\mu\varepsilon$ mit einer negativen Zahl multiplicirt ist.

Die Berechnung des Quadrats ν^2 ist einer wesentlichen Abkürzung fähig, denn da sich alle partiellen Producte, mit Ausnahme derjenigen, die aus den Gliedern entstehen, in welchen $i=k$ und zugleich $i'=k'$ ist, wiederholen, so braucht man nur die Hälfte derselben zu berechnen und zu verdoppeln.

Die vorstehenden Formeln haben auch für die Berechnung der zur mehrerwähnten Bedingungsgleichung gehörigen Producte Geltung. Man braucht nur die Coefficienten von A', B', D', E' bez. statt der von A, B, D, E darin zu substituiren. Auch das Product $2\nu.\delta\frac{h}{h_0}$, welches wir zu

dem Zwecke weiter unten brauchen werden, wird der Formel für ν^2 analog berechnet, indem man in dem einen Ausdruck für r die Coefficienten von $\delta\frac{h}{h_0}$ und in dem andern die von 2ν substituirt. Es versteht sich von selbst, dass hienach die eben erwähnte Abkürzung nicht stattfindet, da $\nu.\delta\frac{h}{h_0}$ kein Quadrat ist.

52.

Für die Berechnung der zu den Breitenstörungen erforderlichen Producte setze ich

$$\begin{aligned}
A'' &= -A'_s \sin(l,i,i') + A'_c \cos(l,i,i')\\
B'' &= \;\; B'_c \cos(l,i,i') - B'_s \sin(l,i,i')\\
C'' &= \;\; C'_c \cos(l,i,i') - C'_s \sin(l,i,i')\\
D'' &= -D'_s \sin(l,i,i') + D'_c \cos(l,i,i')\\
E'' &= \;\; E'_c \cos(l,i,i') - E'_s \sin(l,i,i')
\end{aligned}$$

woraus ersichtlich ist, dass hier die den Coefficienten A'_c und E'_s im vor. § gegebenen Zeichen umgeändert werden müssen. Nimmt man nun die Coefficienten a_s, a_c, b_c etc. in der ihnen im vor. Art. gegebenen Bedeutung wieder auf, so wird

$$\begin{aligned}
A''\tfrac{an\delta z}{r} &= (A'_c a_c \pm A'_s a_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k') - (A'_s a_c \mp A'_c a_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k')\\
B''\nu &= (B'_c b_c \pm B'_s b_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k') - (B'_s b_c \mp B'_c b_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k')\\
C''\delta\tfrac{h}{h_0} &= (C'_c c_c \pm C'_s c_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k') - (C'_s c_c \mp C'_c c_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k')\\
D''\tfrac{u}{\cos i} &= (D'_c d_c \pm D'_s d_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k') - (D'_s d_c \mp D_c d_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k')\\
E''\tfrac{u_1}{\cos i} &= (E'_c e_c \pm E'_s e_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k') - (E'_s e_c \mp E'_c e_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k')
\end{aligned}$$

Setzen wir ferner

$$\left(\tfrac{dR_0}{d\eta}\right) = R_c \cos(i,i') + R_s \sin(i,i')$$

wo in der Bezeichnung des §. 4 (II)

$$\begin{aligned}
R_c &= -\left\{\tfrac{U(i+1,i',c)}{i+1-i'\mu} - \tfrac{V(i-1,i',c)}{i-1-i'\mu}\right\}\\
R_s &= \;\;\left\{\tfrac{U(i+1,i',s)}{i+1-i'\mu} - \tfrac{V(i-1,i',s)}{i-1-i'\mu}\right\}
\end{aligned}$$

ist, und R_c mit $2''.206265''$) e_c, so wie R_s mit $2''.206265''$) e_s identisch ist, dann wird

$$\left(\tfrac{dR_0}{d\eta}\right)\tfrac{an\delta z}{r} = (R_s a_c \pm R_c a_s)\sin(i\pm k, i'\pm k') + (R_c a_c \mp R_s a_s)\cos(i\pm k, i'\pm k')$$

womit alle für die von dem Quadrat der störenden Kraft abhängigen, und in dem Hauptttheil der Breitenstörungen vorkommenden, Producte aufgestellt sind. Zieht man hieraus das folgende allgemeine Schema für die Coefficienten irgend eines dieser Producte

$$\left.\begin{aligned}&\{(1)+(3)\}\cos(l, i+k, i'+k') - \{(2)-(4)\}\sin(l, i+k, i'+k')\\ +&\{(1)-(3)\}\cos(l, i-k, i'-k') - \{(2)+(4)\}\sin(l, i-k, i'-k')\end{aligned}\right\} \quad (23.$$

so muss man für die partiellen Producte von

$$A''\frac{an\delta z}{r}\ ;\ D''\frac{u}{\cos i}\ ;\ \left(\frac{dR_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}$$

die Bezeichnung

$$\begin{matrix}3) & 4)\\ 2) & 1)\end{matrix}$$

und für die partiellen Producte von

$$B''\nu\ ;\ C''\delta\frac{h}{h_0}\ ;\ E''\frac{u_1}{\cos i}$$

die Bezeichnung

$$\begin{matrix}1) & 2)\\ 4) & 3)\end{matrix}$$

anwenden. Uebrigens gelten die Bemerkungen des vor. Art. auch für diese Producte.

53.

Das Verfahren, welches ich anwende, um nach den im vor. und vorvor. Art. entwickelten Schemas die Producte vollständig zu berechnen, ist mit sehr weniger Abänderung dasselbe, welches ich schon in meiner Abhandlung über die Störungen des Jupiters und Saturns angewandt habe.

Ich lasse das Papier, welches zur Rechnung dienen soll, und wozu ich halbe Bogen (Folioblätter) nehme, so mit horizontalen und senkrechten Linien überziehen, dass dadurch Rechtecke gebildet werden, deren jedes zwei Logarithmen, den einen unter den andern, aufnehmen kann. Auf meinen Folioblättern befinden sich 26 Columnen, von welchen die beiden äussersten, die etwas schmäler sind, wie die übrigen, zur Aufnahme der Indices des zweiten Factors dienen; die Anzahl der horizontalen Linien ist 40. Oben am Rande des Blattes schreibe ich über je zwei Columnen die Indices der Argumente des Factors A oder B etc., wobei ich dieselbe Reihenfolge anwende, wie in den Tafeln des vor. § z. B. über 6 aufeinander folgende Columnen

0,1,—2 —1,2,—2 1,0,—2

oder auch nur über die beiden ersten dieser Columnen die Indices der beiden ersten Coefficienten z. B. 1,—2, da die Indices der 4 folgenden Coefficienten daraus von selbst hervorgehen. Unter die Indices kommen die Logarithmen der Coefficienten A_c, A_s etc. zu stehen, wogegen die Coefficienten a_s, a_c etc. auf den untern Rand eines andern Blattes Papiers geschrieben werden. Durch das Anlegen dieses Blattes an jenes addire ich die Logarithmen der Coefficienten der beiden Factoren, wodurch ich die Logarithmen der in dem vor. Art. bezeichneten partiellen Producte bekomme; zugleich schreibe ich die Indices der Coefficienten des zweiten Factors in die äusserste Columne links oder rechts oder beides. Bei dieser Addition der Logarithmen kann sogleich aus den ersten Stellen derselben erkannt werden, ob das bez. partielle Product die numerische Grenze, die man im Voraus festgesetzt haben muss, übersteigt oder nicht, in welchem letzteren Falle das bez. Rechteck leer bleibt, oder höchstens darin durch ein einfaches Zeichen angedeutet wird, dass das Product nicht übersehen worden ist. Wenn man auf diese Art die Logarithmen aller Glieder, die die festgesetzte numerische Grenze übersteigen, erhalten hat, so werden die dazu gehörigen Zahlen auf ein anderes Papier nach Vorschrift der Formeln (22) oder (23) sogleich in die Columnen eingetragen, die der Summe oder der Differenz der Argumente der beiden Factoren zugehören, wobei wieder dieselbe Reihenfolge der Argumente anzuwenden ist. Die Glieder, aus welchen auf diese Art jeder Coefficient des Products zusammengesetzt ist, werden schliesslich addirt.

Es ist dienlich beim Aufschlagen der Zahlen der partiellen Producte abtheilungsweise nach den Coefficienten von $\mu\varepsilon$ im Product fort zu schreiten, nemlich erst die zu $0\mu\varepsilon$, dann die zu $-\mu\varepsilon$, dann die zu $+\mu\varepsilon$, etc. gehörigen Zahlen vorzunehmen. Wenn man sich stets an die Formeln (22) oder (23) hält, und also nie i und i' von k und k' abzieht, so wird man die Coefficienten der verschiedenen Abtheilungen des Products durch folgende Combinationen erhalten. Die Coefficienten der Glieder, in welchen

$0\mu\varepsilon$ vorkommt, durch
$i'=0,\ k'=0$ u. d. Add. u. Subtr.
$i'=1,\ k'=1$
$i'=2,\ k'=2$ } und durch Subtraction.
etc.

Hiebei wird sich dann ereignen, dass man auch Argumente bekommt, in welchen ε mit einer negativen Zahl multiplicirt ist, und diese werden nach der Beendigung der Rechnung denen, in welchen die Coefficienten von η und ε das entgegengesetzte Zeichen haben, einverleibt. Ferner erhält man die Coefficienten der Glieder

$-\mu\varepsilon$ durch	$+\mu\varepsilon$ durch
$i'=0,\ k'=1$, u. d. Add.	$i'=0,\ k'=1$
$i'=1,\ k'=0$ u. d. Add. u. Subtr.	$i'=1,\ k'=2$
$i'=2,\ k'=1$	$i'=2,\ k'=3$ u. d. Subtr.
$i'=3,\ k'=2$ u. d. Subtr.	etc.
etc.	

$-2\mu\varepsilon$ durch	$+2\mu\varepsilon$ durch
$i'=0,\ k'=2$	$i'=0,\ k'=2$
$i'=1,\ k'=1$ u. d. Add.	$i'=1,\ k'=3$
$i'=2,\ k'=0$ u. d. Add. u. Subtr.	$i'=2,\ k'=4$ u. d. Subtr.
$i'=3,\ k'=1$	etc.
$i'=4,\ k'=2$ u. d. Subtr.	
etc.	

$-3\mu\varepsilon$ durch	$+3\mu\varepsilon$ durch
$i'=0,\ k'=3$	$i'=0,\ k'=3$
$i'=1,\ k'=2$ u. d. Add.	$i'=1,\ k'=4$
$i'=2,\ k'=1$	$i'=2,\ k'=5$ u. d. Subtr.
$i'=3,\ k'=0$ u. d. Add. u. Subtr.	etc.
$i'=4,\ k'=1$	
$i'=5,\ k'=2$ u. d. Subtr.	
etc.	

u. s. w. Es ist noch hiebei zu bemerken, dass zufolge der Formeln (22) und (23) von den vier partiellen Producten, die jedes Paar der Argumente der Factoren giebt, immer Drei dasselbe und Eins das entgegengesetzte Zeichen erhalten, dass nemlich immer entweder Drei das +, und Eins das —Zeichen, oder Drei das —, und Eins das +Zeichen bekommen; die Zeichen der vier Producte selbst mögen beschaffen sein wie sie wollen. Ferner ist immer für je vier zusammengehörige partielle Producte, abgesehen von den Zeichen,

$$\frac{(1)}{(4)} = \frac{(2)}{(3)} \quad \text{oder} \quad \frac{(1)}{(2)} = \frac{(4)}{(3)}$$

Diese beiden Eigenschaften können dienen um Zeichenirrungen zu vermeiden und um Fehler in den Producten zu erkennen.

Ich habe bisher immer als allgemeine Grenze der aufzunehmenden Glieder 0″.001 angenommen, und vermittelst dieser Grenze ist es leicht anzugeben, welche Glieder in jedem der beiden Factoren überhaupt angewandt werden müssen. Es sind aber jedesmal Glieder vorhanden, deren Coefficienten im Product mit einer grösseren Anzahl von Decimalstellen angegeben werden müssen; diese sind diejenigen, aus welchen die Säcularänderungen hervorgehen, und diejenigen, welche bei den Integrationen kleine Divisoren bekommen. Die Säcularänderungen entstehen aus den Gliedern der Producte, die mit den Argumenten

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} -\eta+\varepsilon \Big\{ \text{ und } \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} \eta$$

multiplicirt sind, sowie aus den Gliedern der Factoren $\frac{an\delta z}{r}$, ν, etc., die in der ersten Annäherung schon mit ε multiplicirt sind, und wenn i_1 und i'_1 die Werthe von i und i' in den Producten sind, die einem kleinen Divisor angehören, so erhalten bei den Integrationen die mit

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} -\eta+(i_1-i'_1\mu)\varepsilon-U'$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} \quad (i_1-i'_1\mu)\varepsilon-U\Big\{$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} -\eta+(i_1+1-i'_1\mu)\varepsilon-U'$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} \ \eta+(i_1-1-i'_1\mu)\varepsilon-U'$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} \ \eta+(i_1-i'_1\mu)\varepsilon-U'$$

multiplicirten Glieder vorzugsweise diesen Divisor, und zwar bekommt das zweite dieser Glieder das Quadrat, und die übrigen die erste Potenz desselben. Strenge genommen bekommen auch die mit

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} \quad (i_1-1-i'_1\mu)\varepsilon-U\Big\{$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} \ \eta+(i_1-2-i'_1\mu)\varepsilon-U\Big\{$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} \quad (i_1+1-i'_1\mu)\varepsilon-U'$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} -\eta+(i_1+2-i'_1\mu)\varepsilon-U\Big\{$$

multiplicirten Glieder die erste Potenz dieses Divisors, aber diese Glieder werden zugleich mit $\frac{1}{2}e$ multiplicirt, und dieser Umstand lähmt, wenigstens in den meisten Fällen, die Wirkung des kleinen Divisors.

Die Glieder, aus welchen die Säcularänderungen entstehen, habe ich immer bis auf 0″.00001 berechnet; bei denen, welche kleine Divisoren bekommen, muss sich die anzusetzende Zahl von Decimalen nach dem Divisor richten. In unserm Beispiel, wo die kleinsten Divisoren bei den

Argumenten 1,—3 und 2,—6 vorkommen, habe ich für den ersten die Coefficienten bis auf 0″.00001, und für den andern bis auf 0″.0001 anzusetzen für ausreichend gehalten.

In den Producten $\left(\frac{\overline{dW_0}}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}$, ν^2, etc. kommen auch ein paar Glieder vor, die mit ε^2 multiplicirt sind; diese habe ich mit zwei Decimalen mehr wie die anderen Säcularänderungen berechnet.

Um erkennen zu können, wie weit die im §. 7 (II) entwickelten Bedingungsgleichungen in der That durch die Rechnung erfüllt worden sind, habe ich in jedem Product auch das constante Glied bis auf 0″.00001 berechnet.

Es ist dienlich die Glieder, die mit mehr Decimalen wie allgemein anzusetzen sind, für sich zu behandeln, das heisst die Blätter, auf welchen die Logarithmen der partiellen Producte stehen, durchzugehen und nachzusehen, ob keins der hieher gehörigen partiellen Producte ausgelassen ist, und die zu diesen partiellen Producten gehörigen Zahlen abgesondert von denen, die zu den übrigen Argumenten gehören, aufzuschlagen und niederzuschreiben.

Die Producte $A\frac{an\delta z}{r}$ und $B\nu$ sind die grössten von Allen. In unserm Beispiel waren für die Logarithmen der partiellen Producte derselben 5 Folioblätter erforderlich, auf deren einen Seiten die Logarithmen des einen, und auf deren anderen Seiten die Logarithmen des anderen Products berechnet wurden. Es versteht sich aber hiebei von selbst, dass ein grosser Theil des Papiers wegen der Unmerklichkeit der bezüglichen partiellen Producte leer bleibt, und man kann dieses schon daraus beurtheilen, dass für die Zahlen dieser beiden Producte nur drei Folioblätter erforderlich waren.

54.

Ich führe jetzt die Producte für die Längenstörungen unsers Beispiels an, und setze zuerst die Glieder, die den Factor ε nicht enthalten, und darauf, die denselben enthalten, an, und die aus den in den Ausdrücken von $\frac{an\delta z}{r}$, ν, etc. enthaltenen mit ε multiplicirten Gliedern entstanden sind.

Da in unserm Beispiel $\delta\lambda$ sehr klein ist, so fügt das erste Product nur den Gliedern, die den kleinsten Divisor enthalten, ein Weniges hinzu, nemlich

	$\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\delta\lambda$	
i, i'	−sin	cos
1, −3	−0″.00014	——
	+0.00004	——
	+0.00015	——
2, −3	——	——
	——	——
	−0.00024	−0″.00020

Die übrigen Producte bekam ich wie folgt.

	$A\frac{an\delta z}{r}$		$B\nu$		$C\delta\frac{h}{h_0}$	
i, i'	−sin	cos	−sin	cos	−sin	cos
0,0,0		+0″.00157 −0.00245		−0″.00145 −0.00974		−0″.00002 −0.00001
−1,1,0	+0″.00767	+0.01910	−0″.00440	+0.01582	0″.00000	+0.00004
0,1,0	+0.475	+0.321	+0.156	+0.115	−0.006	−0.002
−1,2,0	−0.260	−0.192	−0.031	−0.004	+0.004	+0.002
1,0,0	−0.32231	−0.05021 −0.20202	−0.14059	−0.03957 −0.08547	+0.00274	−0.00004 −0.00004
2,0	+0.005	−0.349	+0.022	+0.037	−0.005	−0.007
	−0.003	+0.152	−0.007	−0.014		
	0.000	+0.243	−0.018	−0.026		
3,0	0.000	−0.061	−0.019	−0.027		
	0.000	+0.031	+0.002	+0.001		
	+0.002	+0.046	+0.020	+0.028		
−2,−1	−0.092	+0.003	−0.020	−0.008		
	+0.058	−0.001	+0.030	+0.009		
	+0.049	−0.004	−0.003	0.000		
−1,−1	−0.422	+0.120	+0.046	+0.005	−0.013	−0.004
	+0.225	−0.064	−0.028	−0.009	+0.007	+0.002
	+0.195	−0.054	−0.021	0.000	+0.007	+0.002
0,−1	+0.345	+0.202	+0.129	+0.099		
	−0.193	−0.111	−0.129	−0.076		
	−0.176	−0.100	+0.001	−0.019		
1,−1	+0.034	+0.089	−0.013	+0.023	−0.003	−0.005
	−0.008	−0.073	+0.012	−0.003	+0.002	+0.002
	−0.009	−0.060	+0.007	−0.022	+0.002	+0.002
2,−1	+0.143	−0.402	+0.072	−0.160	+0.002	+0.003
	−0.077	+0.199	−0.009	+0.037	−0.001	−0.002
	−0.117	+0.308	−0.078	+0.145	−0.001	−0.002
3,−1	−0.255	+0.058	+0.029	−0.028		
	+0.104	−0.022	−0.010	+0.009		
	+0.191	−0.053	−0.019	+0.024		
−1,−2	+0.003	+0.057	−0.003	+0.028		
	+0.001	−0.051	+0.002	−0.037		
	−0.004	−0.025	+0.001	+0.004		

0, −2	+0″.026	−0″.023	+0″.004	−0″.059		
	−0.014	+0.030	−0.009	+0.027		
	+0.006	+0.028	+0.003	+0.036		
1, −2	−0.131	+0.539	−0.066	+0.261	−0″.003	+0″.003
	+0.076	−0.274	+0.019	−0.048	+0.004	−0.001
	+0.076	−0.316	+0.045	−0.213	+0.001	−0.001
2, −2	+0.024	−0.068	+0.060	−0.001	+0.016	−0.011
	−0.004	+0.016	−0.025	+0.002	−0.008	+0.006
	−0.036	+0.052	−0.042	+0.003	−0.008	+0.006
3, −2	+0.207	+0.028	−0.378	−0.043		
	−0.119	−0.007	+0.115	+0.010		
	−0.018	−0.002	+0.285	+0.035		
4, −2	+0.112	+0.184	−0.031	−0.023		
	−0.049	−0.100	+0.014	+0.009		
	−0.085	−0.124	+0.021	+0.021		
0, −3	+0.047	−0.017	+0.023	−0.008	——	——
	−0.03653	+0.01276	−0.02812	+0.00799	+0.00015	+0.00025
	−0.019	+0.007	+0.005	+0.001	——	——
1, −3	−0.11750	+0.09942	−0.08546	+0.05362	−0.00100	+0.00020
	+0.10097	−0.08835	+0.03355	−0.01545	+0.00049	−0.00011
	+0.10870	−0.09523	+0.06305	−0.04051	+0.00049	−0.00008
2, −3	+0.500	−0.035	+0.269	−0.005	+0.008	——
	−0.266	+0.020	−0.059	−0.007	−0.004	——
	−0.39466	+0.02604	−0.24049	+0.01894	−0.00274	+0.00005
3, −3	+0.070	+0.084	−0.076	−0.079	−0.009	−0.007
	−0.051	−0.042	+0.023	+0.032	+0.004	+0.003
	−0.011	−0.040	+0.051	+0.059	+0.004	+0.003
4, −3	−0.037	−0.232	+0.043	+0.296		
	+0.022	+0.107	−0.019	−0.094		
	+0.025	+0.124	−0.031	−0.238		
5, −3	+0.081	−0.110	−0.012	+0.040		
	−0.033	+0.047	+0.004	−0.012		
	−0.069	+0.086	+0.009	−0.033		
1, −4	−0.027	+0.004	−0.019	−0.005		
	+0.023	−0.002	+0.015	+0.014		
	+0.017	−0.012	+0.005	−0.007		
2, −4	+0.127	+0.069	+0.086	+0.060	——	−0.002
	−0.092	−0.043	−0.031	−0.022	——	+0.001
	−0.112	−0.067	−0.069	−0.052	——	+0.002
3, −4	−0.116	−0.177	−0.075	−0.226	−0.007	+0.008
	+0.059	+0.083	+0.014	+0.060	+0.004	−0.004
	+0.096	+0.180	+0.071	+0.199	+0.004	−0.003
4, −4	+0.049	−0.098	−0.004	+0.004		
	−0.016	+0.040	+0.002	+0.001		
	−0.048	+0.087	+0.009	−0.006		
5, −4	−0.295	+0.136	+0.167	−0.070		
	+0.121	−0.060	−0.054	+0.027		
	+0.220	−0.109	−0.142	+0.056		
6, −4	−0.042	−0.004	+0.020	+0.001		
	+0.018	+0.001	−0.007	0.000		
	+0.028	+0.007	−0.016	−0.002		

1,−5	−0″.003	−0″.002	−0″.003	+0″.001		
	+0.002	−0.003	+0.002	+0.006		
	+0.001	−0.009	+0.002	−0.007		
2,−5	+0.022	0.000	+0.014	+0.015	−0″.002	+0″.003
	−0.017	+0.008	+0.003	−0.015	+0.001	−0.001
	−0.021	−0.013	−0.019	−0.005	+0.001	−0.001
3,−5	−0.069	+0.320	+0.046	−0.098	+0.007	−0.010
	+0.042	−0.161	−0.019	+0.032	−0.004	+0.005
	+0.020	−0.118	−0.033	+0.084	−0.004	+0.005
4,−5	+0.208	−0.073	−0.292	+0.199	+0.011	−0.002
	−0.109	+0.042	+0.093	−0.060	−0.005	+0.001
	−0.072	+0.002	+0.226	−0.161	−0.005	+0.001
5,−5	−0.053	−0.009	−0.007	+0.013	−0.007	——
	+0.017	+0.008	+0.001	−0.006	+0.003	——
	+0.059	+0.008	0.000	−0.014	+0.003	——
6,−5	+0.155	+0.160	−0.064	−0.092		
	−0.064	−0.067	+0.024	+0.030		
	−0.128	−0.131	+0.054	+0.080		
1,−6	——	——	——	——		
	+0.0011	−0.0009	+0.0007	+0.0007		
	——	——	——	——		
2,−6	+0.0036	+0.0009	+0.0027	+0.0042	−0.0004	+0.0003
	−0.0103	+0.0037	+0.0039	−0.0029	+0.0002	−0.0002
	−0.0073	−0.0047	−0.0073	−0.0022	+0.0002	−0.0002
3,−6	−0.052	+0.058	+0.014	−0.022	+0.004	−0.001
	+0.038	−0.031	−0.015	+0.004	−0.002	0.000
	+0.0228	−0.0198	−0.0066	+0.0208	−0.0016	+0.0007
4,−6	+0.408	−0.052	−0.131	−0.002	−0.007	0.001
	−0.179	+0.015	+0.044	+0.001	+0.003	+0.001
	−0.242	+0.032	+0.111	−0.001	+0.003	+0.001
5,−6	−0.151	−0.183	+0.202	+0.159	−0.004	−0.008
	+0.067	+0.080	−0.063	−0.054	+0.003	+0.003
	+0.097	+0.119	−0.170	−0.130	+0.003	+0.003
6,−6	−0.002	+0.043	+0.015	+0.008	+0.003	+0.005
	+0.002	−0.018	−0.005	−0.001	−0.002	−0.002
	−0.001	−0.048	−0.013	−0.001	−0.002	−0.002

	$-\varepsilon \sin$	$\varepsilon \cos$	$-\varepsilon \sin$	$\varepsilon \cos$	$-\varepsilon \sin$	$\varepsilon \cos$
0,0,0		+0.96		−0.02		0.00
−1,1,0	−0.28	+0.79	−1.19	+0.26	0.00	0.00
0,1,0	−1	+9	+4	+7	——	——
−1,2,0	+5.4	−19	+3.6	+12	——	——
1,0,0	+5.82	−22.09	+4.18	−18.96	−0.01	0.00
2,0	——	+1				
	——	+1				
	——	+1				
3,0	−5	+7	+4	−5		
	+1	−2	——	——		
	+3	−5	−4	+5		

−1, −1	——	+1	+2	−1		
	+1	−2	——	−2		
	+1	−2	−1	+3		
0, −1	−5	+4	−8	+6		
	−5	+4	−6	+4		
	+1	−1	+15	−11		
1, −1	−4	−2	−2	−1		
	+3	——	+1	+1		
	+2	−1	+4	−1		
2, −1	+3	−2	+23	−3		
	−10	+1	+1	——		
	−8	+2	−23	+12		
0, −2	−14	−10	−13	−8		
	+8	+7	+2	+3		
	+4	+3	+11	+6		
1, −2	+114	+87	+64	+48		
	−55	−43	−16	−11		
	−60	−46	−48	−36		
2, −2	+4	+3	+11	+17	+2	+1
	−4	+2	−2	−6	−1	−1
	−3	−5	−9	−12	−1	−1
3, −2	+39	+128	−28	−80		
	−19	−60	+8	+23		
	−18	−64	+22	+61		
0, −3	−2	−3	−1	−2		
	+0.94	+4.20	+0.35	+2.92		
	——	+2	+1	−1		
1, −3	+11.42	+37.13	+3.87	+26.15	+0.08	−0.03
	−4.70	−19.10	−0.61	−7.37	−0.04	+0.02
	−5.42	−21.51	−2.53	−21.83	−0.04	+0.02
2, −3	+45	−120	+25	−61	——	——
	−19	+53	−6	+17	——	——
	−30.41	+81.77	−21.15	+51.15	+0.34	+0.02
3, −3	+1	+23	+12	−31		
	+1	−12	−5	+11		
	−1	−11	−10	+23		
4, −3	+99	−67	−58	+43		
	−42	+29	+18	−13		
	−65	+44	+47	−35		

i,i'	$D\frac{u}{\cos i}$		$E\frac{u,}{\cos i}$	
	$-\sin$	cos	$-\sin$	cos
0,0,0		+0″.01077		−0″.01116
−1,1,0	−0″.03303	−0.01427	+0″.00003	+0.01507
0,1,0	+0.004	−0.002	+0.002	+0.005
−1,2,0	+0.007	+0.007	−0.001	−0.004
1,0,0	−0.01574	−0.00392	−0.00026	−0.00487
2,0	——	−0.012	——	−0.012
	——	−0.004	——	+0.008
	——	+0.020	——	+0.008
−2,−1	+0.001	−0.001	+0.001	−0.002
	−0.002	+0.002	−0.001	+0.001
	+0.001	−0.001	0.000	+0.001
−1,−1	−0.010	−0.008	−0.004	+0.005
	+0.021	+0.009	+0.003	−0.004
	−0.009	+0.003	+0.003	−0.004
0,−1	−0.001	+0.009	+0.004	−0.006
	−0.004	−0.011	−0.002	+0.003
	+0.005	+0.001	−0.002	+0.003
1,−1	+0.010	−0.006	−0.010	+0.015
	0.000	+0.027	+0.007	−0.010
	−0.011	−0.018	+0.006	−0.011
2,−1	+0.004	−0.002	+0.003	−0.004
	+0.001	−0.004	−0.002	+0.002
	−0.005	+0.006	−0.002	+0.003
3,−1	−0.013	+0.005	−0.007	+0.002
	0.000	0.000	+0.005	−0.001
	+0.017	−0.005	+0.004	−0.002
−1,−2	0.000	0.000	−0.003	−0.001
	+0.001	+0.002	+0.002	+0.001
	−0.003	−0.002	+0.002	0.000
0,−2	−0.008	−0.009	+0.008	+0.009
	−0.002	−0.005	−0.005	−0.007
	+0.012	+0.017	−0.005	−0.006
1,−2	+0.003	+0.005	−0.005	−0.002
	−0.002	0.000	+0.003	+0.002
	+0.001	−0.008	+0.004	+0.001
2,−2	+0.011	−0.007	+0.012	+0.010
	+0.003	+0.003	−0.008	−0.007
	−0.020	+0.006	−0.008	−0.006
3,−2	−0.004	−0.002	−0.002	−0.001
	0.000	0.000	+0.001	+0.001
	+0.007	+0.002	+0.002	+0.001
4,−2	+0.006	+0.009	+0.002	+0.003
	0.000	−0.001	−0.001	−0.002
	−0.007	−0.011	−0.001	−0.002
0,−3	−0.001	−0.004	+0.001	+0.003
	+0.00413	−0.00164	−0.00137	−0.00199
	0.000	+0.007	−0.001	−0.002

1, −3	+0″.00063	+0″.01274	−0″.00748	−0″.00752
	−0.02040	−0.00360	+0.00511	+0.00512
	+0.01982	−0.01317	+0.00501	+0.00503
2, −3	+0.006	+0.001	+0.004	+0.005
	+0.004	+0.002	−0.002	−0.004
	−0.01450	−0.00530	−0.00285	−0.00373
3, −3	−0.014	−0.017	−0.006	−0.013
	−0.002	−0.003	+0.004	+0.009
	+0.020	+0.026	+0.005	+0.009
4, −3	+0.001	+0.004	——	+0.001
	0.000	0.000	——	−0.001
	0.000	−0.005	——	−0.001
5, −3	+0.004	−0.006	+0.001	−0.001
	−0.001	+0.001	−0.001	+0.001
	−0.005	+0.007	−0.001	+0.001
2, −6	−0.0002	−0.0008	−0.0005	+0.0006
	+0.0005	+0.0008	+0.0003	−0.0004
	−0.0001	+0.0004	+0.0003	−0.0004
3, −6	+0.005	+0.002	+0.003	+0.001
	0.000	0.000	−0.002	−0.001
	−0.0075	−0.0030	−0.0020	−0.0002

	$-\varepsilon \sin$	$\varepsilon \cos$	$-\varepsilon \sin$	$\varepsilon \cos$
0,0,0		+85.11		−86.98
−1,1,0	−1.75	−112.97	−0.25	+116.73
0,1,0	+2	−5	−8	+35
−1,2,0	−2.6	+25	+6.1	−24
1,0,0	+2.35	−17.64	+5.34	−26.65
2,0	+33	−87	+30	−79
	+10	−27	−19	+52
	−54	+142	−19	+54
3,0	−8	+3	−5	+4
	−1	+3	+4	−3
	+11	−5	+4	−4
−1,−1	−4	+4	−42	+35
	+64	−51	+29	−24
	−58	+46	+28	−24
0,−1	−20	+23	+24	−26
	+2	−8	−19	+18
	+26	−23	−16	+18
1,−1	+91	−28	−101	+33
	−68	+23	+67	−23
	−52	+13	+67	−23
2,−1	+21	−7	+23	−9
	+8	−5	−16	+7
	−38	+13	−18	+7
0,−2	−72	−46	+72	+46
	−29	−21	−49	−31
	+125	+82	−49	−32

1, −2	+30	+6	−32	−14
	−15	−3	+24	+12
	−25	−4	+23	+11
2, −2	+11	+10	+69	+91
	+23	+30	−46	−62
	−36	−43	−46	−63
3, −2	−24	−27	−13	−11
	−1	+2	+9	+8
	+33	+35	+10	+9
0, −3	−8	−28	+10	+22
	−5.26	−2.92	−6.24	−15.94
	+15	+45	−7	−14
1, −3	−24.52	+97.27	+9.61	−49.84
	−3.02	+2.84	−6.38	+33.99
	+35.66	−132.21	−6.17	+33.62
2, −3	−7	−2	+3	+34
	+5	+8	— —	−25
	+6.61	−6.56	−1.75	−24.05
3, −3	+27	−45	+37	−53
	+4	−4	−24	+36
	−40	+66	−26	+36
4, −3	−11	+31	−3	+10
	+2	−4	+2	−7
	+15	−39	+2	−8

In den vorstehenden Producten habe ich von den constanten Gliedern das Einfache angesetzt, weil sie keinen Multiplicationen mehr unterliegen. Um das Hinschreiben der vielen Nullen zu vermeiden, habe ich alle mit ε multiplicirten Glieder in Einheiten von 0″.00001 angesetzt, und werde damit fortfahren. In den drei ersten Producten habe ich die constanten Glieder und die Coefficienten von $\cos\eta$ in zwei getrennten Theilen angesetzt, und zwar enthält der erste Theil die Werthe, die aus den Combinationen $i'=0$, $k'=0$, und der zweite Theil die Werthe, die aus den Combinationen $i'=1$, $k'=1$; $i'=2$, $k'=2$ etc. entstanden sind. Der zweite Theil enthält also die Glieder, die zufolge des ersten Satzes des §. 7 (II) im Verhältniss $\frac{1}{2}e:1$ mit einander stehen müssen, während der erste Theil, indem er die Glieder in sich fasst, die aus den in der ersten Annäherung den Integralen hinzugefügten Constanten entstanden sind, zufolge des dritten Satzes des §. 7 (II) dieser Relation nicht gnügen kann. Da zufolge des angezogenen Paragraphen die aus den den Breitenstörungen hinzugefügten Constanten entstehenden Glieder dieser Relation gnügen, so war diese Trennung in den beiden letzten Producten nicht nöthig.

In den drei letzten Producten sind die meisten Glieder, wie man sieht, ganz unerheblich, und ich hätte sie daher ohne Schaden des Endresultats weglassen können. Da aber dieses das erste Mal ist, dass die vom Quadrat der störenden Kraft entstehenden Störungen eines der kleinen Planeten erscheinen, so wollte ich keines dieser Glieder weglassen.

55.

Addirt man nun die bez. Coefficienten der vorstehenden Producte, so bekommt man für das Differential von δW_0 die folgenden Coefficienten.

	$\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}$				
i, i'	−sin	cos	$i,\ i'$	−sin	cos
0,0,0		+0″.00010 −0.01259	−1,−2	−0″.003 +0.006	+0″.084 −0.085
−1,1,0	−0″.02973	+0.03576		−0.004	−0.023
0,1,0	+0.631	+0.437	0,−2	+0.030	−0.082
−1,2,0	−0.281	−0.191		−0.030	+0.045
1,0,0	−0.47589	−0.08982 −0.29632	1,−2	+0.016 −0.202	+0.075 +0.806
2,0	+0.022	−0.343		+0.100	−0.321
	−0.008	+0.146		+0.127	−0.537
	−0.016	+0.249	2,−2	+0.123	−0.077
3,0	−0.019	−0.088		−0.042	+0.020
	+0.002	+0.032		−0.114	+0.061
	+0.022	+0.074	3,−2	−0.177	−0.018
−2,−1	−0.110	−0.008		−0.003	+0.004
	+0.085	+0.011		+0.276	+0.036
	+0.047	−0.004	4,−2	+0.089	+0.173
−1,−1	−0.403	+0.118		−0.036	−0.094
	+0.228	−0.066		−0.072	−0.116
	+0.175	−0.053	0,−3	+0.070	−0.026
0,−1	+0.477	+0.304		−0.06174	+0.01737
	−0.328	−0.195		−0.015	+0.013
	−0.172	−0.115	1,−3	−0.21095	+0.15846
1,−1	+0.018	+0.116		+0.11976	−0.10239
	+0.013	−0.057		+0.19722	−0.14396
	−0.005	−0.109	2,−3	+0.784	−0.034
2,−1	+0.224	−0.565		−0.327	+0.011
	−0.088	+0.232		−0.65548	+0.03580
	−0.203	+0.460	3,−3	−0.035	−0.032
3,−1	−0.246	+0.037		−0.022	−0.001
	+0.099	−0.014		+0.069	+0.057
	+0.193	−0.036			

4, −3	+0″.007	+0″.069	3, −5	−0″.016	+0″.212
	+0.003	+0.012		+0.019	−0.124
	−0.006	−0.120		−0.017	−0.029
5, −3	+0.074	−0.077	4, −5	−0.073	+0.124
	−0.031	+0.037		−0.021	−0.017
	−0.066	+0.061		+0.149	−0.158
1, −4	−0.046	−0.001	5, −5	−0.067	+0.004
	+0.038	+0.012		+0.021	+0.002
	+0.022	−0.019		+0.062	−0.006
2, −4	+0.213	+0.127	6, −5	+0.091	+0.068
	−0.123	−0.066		−0.040	−0.037
	−0.181	−0.117		−0.074	−0.051
3, −4	−0.198	−0.395	1, −6	0.000	0.000
	+0.077	+0.139		+0.0018	−0.0002
	+0.171	+0.376		0.000	0.000
4, −4	+0.045	−0.094	2, −6	+0.0052	+0.0052
	−0.014	+0.041		−0.0054	+0.0010
	−0.039	+0.081		−0.0142	−0.0041
5, −4	−0.128	+0.066	3, −6	−0.026	+0.040
	+0.067	−0.033		+0.019	−0.028
	+0.078	−0.053		+0.0051	−0.0015
6, −4	−0.020	−0.003	4, −6	+0.270	−0.055
	+0.011	+0.001		−0.132	+0.017
	+0.012	+0.005		−0.128	+0.032
1, −5	−0.006	−0.001	5, −6	+0.047	−0.032
	+0.004	+0.003		+0.007	+0.029
	+0.003	−0.016		−0.070	−0.008
2, −5	+0.034	+0.018	6, −6	+0.016	+0.056
	−0.013	−0.008		−0.005	−0.021
	−0.039	−0.019		−0.016	−0.051

	$-\varepsilon \sin$	$\varepsilon \cos$		$-\varepsilon \sin$	$\varepsilon \cos$
0,0,0		−0.93	1, −1	−16	+2
−1,1,0	−3.47	+4.81		+3	+1
				+21	−12
0,1,0	−3	+46			
−1,2,0	+5.3	−6	2, −1	+70	−21
1,0,0	+17.68	−85.34		−17	+3
				−87	+34
2,0	+63	−165			
	−9	+26	0, −2	−27	−18
	−73	+197		−68	−42
				+91	+59
3,0	−14	+9			
	+4	−2	1, −2	+176	+127
	+14	−9		−62	−45
				−110	−75
−1, −1	−44	+39			
	+94	−79	2, −2	+95	+121
	−30	+23		−29	−36
				−94	−123
0, −1	−9	+7			
	−28	+18	3, −2	−26	+10
	+26	−17		−3	−27
				+47	+41

0, −3	−1	−11	3, −3	+77	−106
	−10.21	−11.74		−24	+31
	+9	+32		−77	+114
1, −3	+0.46	+110.68	4, −3	+27	+17
	−14.75	+10.38		−20	+5
	+21.50	−141.91		−1	−38
2, −3	+66	−149			
	−20	+53			
	−56.08	+102.33			

Vermöge des ersten Satzes des §. 7 (II) muss hier die Gleichung

$$-0''.01259+0''.29632\times\tfrac{1}{2}e=0$$

stattfinden, und die Substitution des numerischen Werthes von e in diese Gleichung giebt $-0''.00002$, welche Uebereinstimmung als sehr gut bezeichnet werden muss, da die Unrichtigkeiten der letzten Stelle der Zahlen in dieser Gleichung, deren Glieder aus dem Aggregat vieler Glieder bestehen, leicht eine Unrichtigkeit von einer grössern Anzahl von Einheiten in den letzten Stellen der obigen Zahlenwerthe hätte hervorbringen können. Um näher zu zeigen, wie hier die Fehler der letzten Stellen beschaffen sind, bemerke ich, dass der angeführte Satz für jede der Combinationen $i'=1$, $k'=1$; $i'=2$, $k'=2$, etc. und für die drei ersten Producte, sowie für die beiden letzten abgesondert stattfinden muss, und habe daher aus meinen Rechnungen die zu jeder derselben gehörigen Zahlenwerthe ausgezogen, die ich hier anführe. Die Zahlen der ersten Zeile sind im Ganzen aus den beiden letzten mit u und u_1 multiplicirten Producten, die der übrigen Zeilen für die beigesetzten Combinationen aus den drei ersten Producten entstanden.

für	soll sein		wird
	$-0''.00039$	$+0''.00879\times\frac{1}{2}e=0$	$=-0''.00002$
$i'=k'=1$,	-0.00003	$+0.00032\times\frac{1}{2}e=0$	$=-0.00002$
$i'=k'=2$,	-0.00057	$+0.01560\times\frac{1}{2}e=0$	$=+0.00009$
$i'=k'=3$,	-0.01168	$+0.27361\times\frac{1}{2}e=0$	$=-0.00007$
$i'=k'=4$,	-0.00007	$+0.00044\times\frac{1}{2}e=0$	$=-0.00005$
$i'=k'=5$,	$+0.00015$	$-0.00287\times\frac{1}{2}e=0$	$=+0.00003$
$i'=k'=6$,	0.00000	$+0.00043\times\frac{1}{2}e=0$	$=+0.00002$
Summe	$-0''.01259$	$+0''.29632\times\frac{1}{2}e=0$	$=-0''.00002$

wie oben.

Die Anwendung der im vor. § erklärten Controlen gab stets nur Unterschiede von höchstens zwei bis drei Einheiten der letzten Stelle, und ich halte nicht für nöthig, diese hier speciell anzuführen; ich mache

nur aufmerksam darauf, dass das Product $C\delta\frac{h}{h_0}$ gleich Null werden muss, wenn man darin η in ε verwandelt, und da ich die letzten Stellen immer unverändert so gelassen habe, wie die Rechnung sie mir gegeben hat, so ist aus der bez. Tafel des vor. Art. ohne Weiteres ersichtlich, wie die Controle für dieses Product mit der Rechnung übereinstimmt.

56.

Die für die Hauptprüfung der Rechnung zu berechnenden, im Art. 20 angegebenen Producte fanden sich wie folgt. Zuerst

	$\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\delta\lambda$	
$i,\ i'$	$-\sin$	$\cos$
1, −3	+0″.00005	0″.00000

und dann

	$A'\frac{an\delta z}{r}$		$B'\nu$		$D'\frac{u}{\cos i}+E'\frac{u_1}{\cos i}$	
i,i'	$-\sin$	$\cos$	$-\sin$	$\cos$	$-\sin$	$\cos$
0,0		+0″.00737		+0″.00714		+0″.00041
1,0	−0″.155	−0.117	−0″.055	−0.039	−0″.003	−0.003
2,0	+0.008	+0.123	−0.007	−0.013	0.000	+0.008
3,0	−0.002	+0.010	+0.007	+0.011	0.000	0.000
−2,−1	+0.020	−0.003	+0.008	+0.002	0.000	0.000
−1,−1	+0.141	−0.035	−0.014	−0.002	+0.001	+0.001
0,−1	−0.115	−0.068	−0.040	−0.030	0.000	−0.001
1,−1	−0.004	−0.037	+0.013	−0.013	+0.002	−0.003
2,−1	−0.056	+0.148	−0.024	+0.051	−0.001	+0.001
3,−1	+0.090	−0.024	−0.010	+0.006	+0.006	−0.001
−1,−2	−0.002	−0.015	0.000	−0.010	−0.001	0.000
0,−2	−0.010	+0.015	−0.003	+0.022	−0.001	−0.001
1,−2	+0.046	−0.182	+0.026	−0.087	+0.004	−0.002
2,−2	−0.009	+0.029	−0.027	−0.001	−0.010	−0.001
3,−2	−0.047	−0.005	+0.123	+0.014	+0.004	+0.001
4,−2	−0.033	−0.052	+0.009	+0.005	−0.001	−0.004
0,−3	−0.009	+0.001	−0.003	+0.004	+0.002	0.000
1,−3	+0.05078	−0.03383	+0.03623	−0.01864	+0.00269	−0.00140
2,−3	−0.170	+0.025	−0.086	+0.004	−0.005	−0.005
3,−3	−0.025	−0.033	+0.023	+0.031	+0.007	+0.011
4,−3	+0.023	+0.082	−0.021	−0.099	+0.001	−0.002
5,−3	−0.023	+0.039	+0.004	−0.009	−0.003	+0.003
1,−4	+0.012	0.000	+0.010	+0.002		
2,−4	−0.049	−0.029	−0.030	−0.028		
3,−4	+0.042	+0.060	+0.020	+0.072		

4, −4	−0″.026	+0″.037	+0″.004	+0″.002		
5, −4	+0.097	−0.046	−0.054	+0.021		
6, −4	+0.008	+0.004	−0.007	+0.001		
1, −5	+0.002	+0.002	0.000	0.000		
2, −5	−0.007	+0.001	−0.002	−0.010		
3, −5	+0.022	−0.108	−0.024	+0.039		
4, −5	+0.020	−0.037	+0.093	−0.066		
5, −5	+0.026	+0.009	+0.005	−0.004		
6, −5	−0.053	−0.054	+0.027	+0.028		
2, −6	−0.0019	+0.0002	−0.0005	−0.0020	+0″.0003	+0″.0002
3, −6	+0.024	−0.021	−0.005	+0.006	−0.004	−0.001
4, −6	−0.139	+0.012	+0.050	+0.003		
5, −6	+0.055	+0.062	−0.065	−0.049		
6, −6	−0.001	−0.022	−0.005	−0.001		

	$-\varepsilon \sin$	$\varepsilon \cos$	$-\varepsilon \sin$	$\varepsilon \cos$	$-\varepsilon \sin$	$\varepsilon \cos$
0,0		+0.31		+0.52		+1.88
1,0	——	−3	——	−2	+5	−14
2,0	——	——	——	——	−19	+55
3,0	+2	−3	−2	+2	+5	−2
−1, −1	——	——	−1	——	+17	−14
0, −1	+2	−2	+3	−2	−3	+2
1, −1	+1	+1	+2	−1	+4	−5
2, −1	−1	+1	−6	+1	−20	+6
0, −2	+7	+5	+5	+4	−2	−2
1, −2	−39	−30	−20	−16	+5	+8
2, −2	+1	+2	−4	−6	−25	−37
3, −2	−13	−43	+9	+26	+14	+16
0, −3	——	+2	——	+1	−1	+6
1, −3	−3.11	−14.77	−0.70	−10.25	+5.18	−14.33
2, −3	−14	+42	−8	+20	+6	−16
3, −3	+2	−10	−6	+10	−22	+36
4, −3	−33	+22	+19	−14	+7	+17

Die hier in den beiden letzten Columnen gegebenen Zahlen habe ich aus den bez. Tafeln für die Längenstörungen genommen, die Zahlen der übrigen Columnen mussten aber direct berechnet werden. Die Addition dieser Zahlengrössen giebt nun

$\frac{d\delta \frac{h_0}{h}}{d\varepsilon}$					
i, i'	$-\sin$	cos	$i, \quad i'$	$-\sin$	cos
0,0		+0″.01492	−2, −1	+0″.028	−0″.001
1,0	−0″.213	−0.159	−1, −1	+0.131	−0.036
2,0	+0.001	+0.118	0, −1	−0.155	−0.099
3,0	+0.005	+0.021	1, −1	+0.011	−0.053

2, −1	−0″.081	+0″.200	3, −4	+0″.062	+0″.132
3, −1	+0.086	−0.019	4, −4	−0.022	+0.039
−1, −2	−0.003	−0.025	5, −4	+0.043	−0.025
0, −2	−0.014	+0.036	6, −4	+0.001	+0.005
1, −2	+0.076	−0.271	1, −5	+0.002	+0.002
2, −2	−0.046	+0.027	2, −5	−0.009	−0.009
3, −2	+0.080	+0.010	3, −5	−0.002	−0.069
4, −2	−0.025	−0.051	4, −5	+0.113	−0.103
0, −3	−0.010	+0.005	5, −5	+0.031	+0.005
1, −3	+0.08975	−0.05387	6, −5	−0.026	−0.026
2, −3	−0.261	+0.024	2, −6	−0.0021	−0.0016
3, −3	+0.005	+0.009	3, −6	+0.015	−0.016
4, −3	+0.003	−0.019	4, −6	−0.089	+0.015
5, −3	−0.022	+0.033	5, −6	−0.010	+0.013
1, −4	+0.022	+0.002	6, −6	−0.006	−0.023
2, −4	−0.079	−0.057			

	−ε sin	ε cos		−ε sin	ε cos
0,0		+2.71	2, −2	−28	−41
1,0	+5	−19	3, −2	+10	−1
2,0	−19	+55	0, −3	−1	+9
3,0	+5	−3	1, −3	+1.37	−39.35
−1, −1	+16	−14	2, −3	−16	+46
0, −1	+2	−2	3, −3	−26	+36
1, −1	+7	−5	4, −3	−7	−9
2, −1	−27	+8			
0, −2	+10	+7			
1, −2	−54	−38			

57.

Ferner sind die folgenden noch zu den Längenstörungen, der Bedingungsgleichung und den Störungen des Radius gehörigen Producte berechnet worden.

	$\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{a n d z}{r}$		ν^2		$2\nu \cdot \delta \frac{h}{h_0}$	
i, i'	cos	sin	cos	sin	cos	sin
0,0	−4″.0753		+1″.0391		−0″.027	
1,0	+0.355	+1″.029	+0.235	+0″.133	−0.211	−0″.124
2,0	+0.628	+2.805	+0.154	+0.663	0.000	+0.002
3,0	+0.002	+0.049	−0.002	−0.004	−0.001	−0.003
−2, −1	−0.021	+0.015	+0.003	+0.002	+0.002	0.000
−1, −1	−0.765	+0.173	−0.035	−0.001	+0.012	+0.004
0, −1	+0.267	+0.272	−0.093	−0.057	−0.036	−0.032
1, −1	+0.334	+0.243	−0.063	−0.021	+0.043	+0.017
2, −1	−0.207	+0.516	−0.046	+0.083	+0.008	−0.021
3, −1	+0.040	+0.011	+0.002	+0.001	0.000	0.000

−1, −2	+0″.001	+0″.044	0″.000	+0″.020	0″.000	−0″.004
0, −2	+0.044	−0.794	−0.027	+0.134	+0.015	−0.071
1, −2	+0.334	−1.216	−0.098	+0.285	+0.005	+0.063
2, −2	−0.834	+0.090	−0.177	+0.018	+0.113	−0.022
3, −2	−1.459	−0.129	−0.346	−0.031	−0.075	−0.004
4, −2	−0.037	−0.020	0.000	0.000	0.000	0.000
0, −3	+0.038	−2.066	+0.055	−0.116	−0.062	+0.086
1, −3	−2.9365	+2.2401	+0.7303	−0.5866	−0.049	+0.026
2, −3	−2.375	+0.435	+0.242	+0.026	−0.179	−0.034
3, −3	+2.572	+2.212	+0.671	+0.554	−0.030	−0.020
4, −3	+0.081	+0.236	+0.006	+0.039	+0.005	+0.026
5, −3	−0.004	+0.042	0.000	0.000	0.000	0.000
0, −4	+0.043	+0.009	+0.002	−0.002	0.000	0.000
1, −4	−0.118	+0.014	+0.029	−0.004	−0.009	+0.001
2, −4	−0.187	−0.107	+0.036	+0.016	−0.002	+0.003
3, −4	+0.238	+0.207	+0.047	+0.048	−0.016	−0.023
4, −4	+0.021	−0.049	+0.007	−0.015	+0.002	−0.004
5, −4	+0.054	−0.028	+0.008	−0.005	+0.010	−0.006
6, −4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1, −5	−0.023	+0.039	+0.004	0.000	−0.002	0.000
2, −5	−0.014	−0.214	−0.007	+0.045	+0.014	−0.013
3, −5	−0.241	−0.337	−0.086	+0.096	+0.060	−0.062
4, −5	−0.942	+0.630	−0.211	+0.154	−0.041	+0.030
5, −5	−0.035	+0.011	−0.004	0.000	−0.004	−0.001
6, −5	−0.011	−0.015	−0.002	−0.002	−0.004	−0.003
1, −6	−0.021	−0.012	−0.001	−0.001	0.000	0.000
2, −6	−0.0493	+0.1071	+0.0081	−0.0227	−0.007	+0.007
3, −6	−0.877	+1.063	+0.078	−0.038	−0.065	+0.022
4, −6	+1.018	+0.019	+0.303	−0.010	−0.020	+0.003
5, −6	+0.118	+0.080	+0.020	+0.013	+0.015	+0.012
6, −6	+0.004	+0.011	0.000	0.000	0.000	0.000

	ε cos	ε sin	ε cos	ε sin	ε cos	ε sin
0,0	−524		+128		+4	
1,0	−81	+26	−22	+20	+27	−34
2,0	−1150	+756	−287	+189	——	——
3,0	−20	+10	——	−1	——	——
−1, −1	−5	+15½	+1	+1	−2	+1
0, −1	−83	+65	+20	−16	−3	+2
1, −1	−14	+13	−1	−2	+2	——
2, −1	−118	+5	−28	+1	+3	——
0, −2	−162	−99	+33	+21	−17	−11
1, −2	−308	−232	+70	+50	+13	+13
2, −2	−91	−188	−11	−38	+4	+22
3, −2	−124	−374	−28	−86	−6	−17
0, −3	−489	−213	−21	−25	+14	+22
1, −3	+235.3	+826.4	−69.4	−214.3	+4	+6
2, −3	−299	−363	−5	+23	+14	−33
3, −3	−288	+865	−69	+222	+3	−7
4, −3	−52	+50	−8	+6	−6	+5

	ε^2 cos	ε^2 sin	ε^2 cos	ε^2 sin	ε^2 cos	ε^2 sin
0,0	−1.78		+0.44		0.00	
1,0	−0.18	−0.04	+0.01	−0.04	−0.01	+0.04
2,0	−1.47	−1.01	−0.37	−0.25	0	0
3,0	−0.03	−0.02	0	0.	0	0

	$\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right)\frac{an\delta z}{r}$		$\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r} \cdot \frac{ae \sin \varepsilon}{r}$	
i,i'	sin	−cos	−sin	cos
0,0		−0″.04873		+0″.04859
1,0	−0″.447	−0.960	+0″.372	+0.121
2,0	−0.627	−2.832	0.000	−0.043
3,0	−0.004	−0.052	−0.028	−0.121
−2,−1	−0.030	+0.017	−0.033	+0.007
−1,−1	−0.842	+0.182	+0.012	+0.011
0,−1	−0.013	+0.059	+0.047	+0.004
1,−1	−0.264	−0.193	−0.019	+0.010
2,−1	+0.222	−0.539	−0.012	−0.010
3,−1	−0.054	−0.004	+0.009	−0.022
−1,−2	+0.001	+0.051	+0.002	−0.036
0,−2	+0.010	−0.627	+0.012	−0.054
1,−2	−0.082	+0.310	−0.040	+0.038
2,−2	+0.796	−0.113	−0.076	+0.048
3,−2	+1.525	+0.134	+0.033	−0.003
4,−2	+0.042	+0.028	+0.064	+0.005
0,−3	+0.099	−2.091	−0.128	+0.096
1,−3	−0.1037	+0.0739	−0.0979	+0.1103
2,−3	+2.324	−0.394	+0.233	+0.003
3,−3	−2.553	−2.187	+0.109	−0.012
4,−3	−0.082	−0.263	−0.105	−0.095
5,−3	+0.007	−0.016	−0.008	−0.014
0,−4	+0.043	+0.011	−0.005	+0.001
1,−4	−0.056	+0.016	−0.010	−0.005
2,−4	+0.149	+0.084	+0.015	+0.008
3,−4	−0.237	−0.186	+0.009	+0.003
4,−4	−0.017	+0.045	−0.008	−0.010
5,−4	−0.067	+0.035	−0.001	+0.002
6,−4	0.000	0.000	0.000	0.000
1,−5	−0.021	+0.050	−0.001	−0.010
2,−5	+0.023	+0.093	−0.011	−0.013
3,−5	+0.215	+0.414	−0.038	+0.036
4,−5	+0.959	−0.656	+0.009	+0.014
5,−5	+0.037	−0.011	+0.039	−0.027
6,−5	+0.016	+0.020	+0.003	−0.001
1,−6	−0.018	−0.013	−0.004	+0.007
2,−6	+0.0412	−0.0363	−0.0345	+0.0457
3,−6	+0.844	−1.046	+0.045	−0.004
4,−6	−0.973	−0.021	+0.042	−0.042
5,−6	−0.133	−0.098	−0.041	−0.003
6,−6	−0.004	−0.006	−0.007	−0.003

	$\varepsilon \sin$	$-\varepsilon \cos$	$-\varepsilon \sin$	$\varepsilon \cos$
0,0		+1.63		+2.47
1,0	+50	+5	−6	+32
2,0	+1150	−756	+3	−2
3,0	+20	−10	+49	−32
−1,−1	−7	+17	−4	+3
0,−1	−29	+23	−1	+1
1,−1	+9	−7	−1	−3
2,−1	+125	−5	+1	−1
0,−2	−121	−72	−13	−10
1,−2	+78	+64	+3	−4
2,−2	+85	+183	+8	−6
3,−2	+130	+393	+4	+8
0,−3	−494	−229	+10	+35
1,−3	+3.3	+43.1	+7.5	−4.8
2,−3	+297	+397	−22	+2
3,−3	+286	−860	+11	+16
4,−3	+56	−46	+12	−37

	$\varepsilon^2 \sin$	$-\varepsilon^2 \cos$	$-\varepsilon^2 \sin$	$\varepsilon^2 \cos$
0,0		+0.003		−0.004
1,0	+0.10	+0.04	+0.09	−0.04
2,0	+1.47	+1.01	+0.01	0.00
3,0	+0.03	+0.02	+0.06	+0.04

58.

Die für die Breitenstörungen erforderlichen Producte habe ich wie folgt gefunden.

	$\frac{A''}{\cos i} \frac{and\delta z}{r}$		$\frac{B''}{\cos i} \nu$		$\frac{C''}{\cos i} \delta \frac{h}{h_0}$	
i,i'	cos	−sin	cos	−sin	cos	−sin
0,0,0	−0″.00114		−0″.00052		−0″.00003	
−1,1,0	−0.00662	+0″.03331	+0.00056	+0″.07869	+0.00002	−0″.00072
0,1,0	+0.001	−0.003	+0.002	−0.005	——	——
−1,2,0	−0.020	−0.011	−0.006	−0.012	——	——
1,0,0	+0.01389	+0.01837	+0.00631	+0.01924	+0.00029	+0.00039
2,0	+0.001	+0.002	+0.001	+0.001		
	−0.014	−0.009	+0.024	+0.021		
	−0.017	−0.001	−0.024	−0.022		
3,0	+0.002	+0.002	0.000	0.000		
	−0.008	+0.001	−0.005	−0.002		
	+0.005	−0.002	+0.005	+0.002		

−2,−1	0″.000	0″.000	0″.000	−0″.002		
	−0.003	+0.009	−0.001	+0.008		
	+0.005	−0.012	+0.001	−0.006		
−1,−1	0.000	+0.002	0.000	0.000		
	−0.010	−0.026	−0.008	−0.026		
	+0.006	+0.019	+0.007	+0.023		
0,−1	−0.003	−0.001	−0.005	+0.001		
	+0.014	+0.017	+0.017	+0.010		
	−0.009	−0.038	−0.013	−0.009		
1,−1	−0.001	0.000	0.000	0.000		
	−0.035	−0.021	−0.066	−0.030		
	+0.053	+0.027	+0.066	+0.027		
2,−1	+0.003	+0.002	+0.004	+0.003		
	+0.007	−0.011	+0.012	0.000		
	−0.013	+0.001	−0.017	−0.005		
3,−1	0.000	+0.001	0.000	0.000		
	+0.011	−0.010	−0.018	+0.011		
	+0.003	+0.001	+0.018	−0.012		
−1,−2	+0.002	0.000	+0.003	0.000		
	−0.014	−0.006	−0.007	−0.002		
	+0.016	+0.013	+0.005	+0.002		
0,−2	0.000	0.000	0.000	0.000		
	+0.043	−0.001	+0.043	−0.005		
	−0.036	+0.004	−0.042	+0.003		
1,−2	−0.003	0.000	0.000	−0.001		
	0.000	−0.006	−0.014	+0.009		
	+0.023	+0.003	+0.017	−0.005		
2,−2	−0.001	0.000	0.000	0.000		
	−0.008	+0.035	+0.030	−0.043		
	−0.021	+0.009	−0.030	+0.042		
3,−2	−0.001	−0.002	−0.002	+0.002		
	−0.001	−0.009	−0.001	+0.007		
	−0.001	+0.005	+0.002	−0.008		
4,−2	0.000	0.000	0.000	0.000		
	−0.005	+0.017	−0.004	−0.014		
	−0.004	−0.010	+0.003	+0.014		
0,−3	0.000	+0.003	0.000	+0.003		
	+0.0103	−0.0108	+0.0085	−0.0105	+0.0003	−0.0006
	−0.029	+0.014	−0.007	+0.005		
1,−3	−0.0003	+0.0001	−0.0006	−0.0007	0.0000	0.0000
	−0.0062	+0.0271	−0.0102	+0.0425	−0.0002	+0.0001
	+0.0123	−0.0420	+0.0109	−0.0416	+0.0002	−0.0001
2,−3	+0.001	−0.003	+0.003	0.000		
	−0.006	+0.035	0.000	−0.018		
	−0.0056	+0.0076	−0.0012	+0.0195	+0.0003	−0.0004
3,−3	−0.001	+0.001	0.000	0.000		
	−0.040	−0.029	+0.026	+0.035		
	+0.011	−0.001	−0.026	−0.038		
4,−3	+0.001	+0.004	−0.001	−0.003		
	+0.006	+0.006	−0.003	−0.004		
	−0.016	+0.004	+0.004	+0.005		

5,−3	−0″.001	−0″.091	0″.000	0″.000		
	−0.014	−0.001	+0.009	0.000		
	+0.009	+0.001	−0.009	−0.001		
1,−6	0.000	0.000	——	0.000		
	−0.0003	−0.0006	——	−0.0002		
	0.000	0.000	——	0.000		
2,−6	−0.0003	+0.0008	+0.0001	−0.0004	0.0000	0.0000
	+0.0085	−0.0048	−0.0005	−0.0009	−0.0001	+0.0002
	+0.0002	+0.0005	+0.0004	+0.0014	+0.0001	−0.0002
3,−6	0.000	0.000	0.000	0.000		
	0.000	0.000	0.000	0.000		
	+0.0038	−0.0087	−0.0007	+0.0044	+0.0001	+0.0004

	ε cos	$-\varepsilon$ sin	ε cos	$-\varepsilon$ sin	ε cos	$-\varepsilon$ sin
0,0,0	−0.11		−0.20		0.00	
−1,1,0	−9	−1	——	−2	——	——
0,1,0	——	——	——	——	——	——
−1,2,0	+1	−1	−3	+1	——	——
1,0,0	+1.31	−0.36	+2.36	−0.40	−0.02	−0.13
2,0	——	——	——	——		
	−9	+5	+7	−3		
	——	——	−7	+3		
0,−3	——	——	——	——		
	+3.1	−1.0	+2.8	+1.1		
	——	——	−2	−1		
1,−3	−0.1	——	−0.2	——		
	−9.2	+0.8	−5.8	+1.0		
	+3.1	−0.4	+6.1	−0.9		
2,−3	——	——	——	——		
	+6	——	——	——		
	−2.0	0.0	+0.5	−0.5	0.0	−0.1
3,−3	——	——	——	——		
	−10	+9	+3	−2		
	+5	−4	−2	+2		
4,−3	——	——	——	——		
	+3	−1	−2	——		
	−2	——	+2	−1		

	$\frac{D''_1}{\cos i}$ $\frac{u}{\cos i}$		$\frac{E''_1}{\cos i}$ $\frac{u_1}{\cos i}$	
	cos	−sin	cos	−sin
0,0,0	+0″.00127		+0″.00009	
−1,1,0	−0.00125	−0″.00616	−0.00009	−0″.00200
0,1,0	0.000	0.000	0.000	0.000
−1,2,0	+0.013	+0.005	0.000	+0.002
1,0,0	−0.01472	−0.00561	−0.00106	−0.00256
2,0	−0.001	——		
	0.000	——		
	+0.001	——		

−2, −1	0″.000	0″.000		
	−0.001	+0.001		
	+0.001	−0.001		
−1, −1	0.000	−0.001		
	−0.001	+0.001		
	+0.001	0.000		
0, −1	0.000	0.000	0″.000	0″.000
	−0.004	−0.011	−0.003	−0.002
	+0.004	+0.011	+0.003	+0.002
1, −1	0.000	+0.001		
	+0.002	−0.001		
	−0.003	0.000		
2, −1	0.000	0.000		
	−0.002	+0.007		
	−0.002	−0.007		
−1, −2	0.000	0.000		
	−0.001	−0.001		
	+0.001	+0.002		
0, −2	+0.001	0.000	0.000	0.000
	−0.001	−0.002	−0.001	−0.001
	0.000	+0.001	+0.001	+0.001
1, −2	0.000	0.000	0.000	0.000
	+0.013	+0.001	+0.004	+0.003
	−0.013	−0.002	−0.004	−0.003
2, −2	−0.001	0.000	0.000	0.000
	+0.001	+0.002	−0.001	−0.001
	0.000	−0.001	+0.001	+0.001
3, −2	0.000	0.000	0.000	0.000
	−0.005	−0.005	+0.004	+0.003
	+0.005	+0.006	−0.004	−0.003
0, −3	0.000	0.000	0.000	0.000
	+0.0017	−0.0031	−0.0003	−0.0003
	−0.001	+0.002	0.000	0.000
1, −3	−0.0001	+0.0016	−0.0002	+0.0002
	+0.0025	−0.0035	+0.0016	−0.0002
	−0.0024	+0.0018	−0.0014	0.0000
2, −3	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.000	+0.014	−0.002	+0.002
	−0.0006	−0.0162	+0.0023	−0.0021
3, −3	0.000	−0.001		
	−0.002	−0.001		
	+0.002	+0.001		
4, −3	0.000	0.000	0.000	0.000
	−0.003	+0.003	−0.002	+0.002
	+0.003	−0.003	+0.002	−0.002
2, −6	0.0000	−0.0001	——	——
	+0.0001	+0.0009	——	——
	0.0000	−0.0008	——	——
3, −6	0.000	0.000		
	0.000	0.000		
	+0.0010	+0.0011	−0.0001	+0.0003

	ε cos	$-\varepsilon$ sin	ε cos	$-\varepsilon$ sin
0,0,0	+8.08		+0.17	
−1,1,0	−8.08	−0.25	−0.17	−0.27
0,1,0	——	——	——	——
−1,2,0	+96	−17	+2	−1
1,0,0	−95.20	+16.78	−2.07	+0.30
2,0	−8	+1		
	−2	+2		
	+10	−5		
3.0	——	——	——	——
	−10	+6	+2	−1
	+9	−6	−2	+1
0,−3	+2	——	+1	——
	+9.7	−3.4	−2.0	−0.8
	−11	+3	+1	——
1,−3	−3.9	+2.1	−1.6	+0.9
	+21.4	+2.7	+11.8	+0.6
	−17.4	−4.7	−10.2	−1.5
2,−3	−3	——	——	——
	−33	+21	−20	+9
	+37.2	−20.2	+20.6	−9.3
3,−3	+5	−4	——	——
	−19	+6	+10	−2
	+13	−1	−10	+2
4,−3	+1	——	−1	——
	+22	−24	−14	+15
	−23	+25	+15	−16

59.

Die Summe der vorstehenden Producte giebt:

	$\frac{1}{\cos i}\frac{d\delta_1 R_0}{d\varepsilon}$				
i,i'	cos	−sin	$i,\ i'$	cos	−sin
0,0,0	−0″.00033		−2,−1	0″.000	−0″.002
−1,1,0	−0.00854	+0″.10312		−0.005	+0.018
				+0.007	−0.019
0,1,0	−0.001	−0.008			
−1,2,0	−0.013	−0.016	−1,−1	0.000	+0.001
1,0,0	+0.00471	+0.02983		−0.019	−0.051
				+0.014	+0.042
2,0	+0.003	+0.003	0,−1	−0.008	0.000
	+0.010	+0.012		+0.024	+0.014
	−0.040	−0.023		−0.015	−0.034
3,0	+0.002	+0.002	1,−1	−0.001	+0.001
	−0.013	−0.001		−0.099	−0.052
	+0.010	0.000		+0.116	+0.054

2,—1	+0″.007	+0″.005	1,—3	—0″.0012	+0″.0012
	+0.017	—0.004		—0.0125	+0.0660
	—0.028	—0.011		+0.0196	—0.0819
3,—1	0.000	+0.001	2,—3	+0.004	—0.003
	—0.007	+0.001		—0.008	+0.033
	+0.021	—0.011		—0.0048	+0.0084
—1,—2	+0.005	0.000	3,—3	—0.001	0.000
	—0.022	—0.009		—0.016	+0.005
	+0.022	+0.017		—0.013	—0.038
0,—2	+0.001	0.000	4,—3	0.000	+0.001
	+0.084	—0.009		—0.002	+0.007
	—0.077	+0.009		—0.007	+0.004
1,—2	—0.003	—0.001	5,—3	—0.001	—0.001
	+0.003	+0.007		—0.005	—0.001
	+0.023	—0.007		0.000	0.000
2,—2	—0.002	0.000	1,—6	0.000	0.000
	+0.022	—0.007		—0.0003	—0.0008
	—0.050	+0.051		0.000	0.000
3,—2	—0.003	0.000	2,—6	—0.0002	+0.0003
	—0.003	—0.004		+0.0080	—0.0046
	+0.002	0.000		+0.0007	+0.0009
4,—2	0.000	0.000	3,—6	0.000	0.000
	—0.009	+0.003		0.000	0.000
	—0.001	+0.004		+0.0041	—0.0025
0,—3	0.000	+0.006			
	+0.0177	—0.0253			
	—0.037	+0.021			

	ε cos	$-\varepsilon$ sin		ε cos	$-\varepsilon$ sin
0,0,0	+7.94		0,—3	+3	——
—1,1,0	—17	—4		+13.6	—4.1
0,1,0	——	——		—12	+2
—1,2,0	+96	—18	1,—3	—5.8	+3.0
1,0,0	—93.62	+16.19		+18.2	+5.1
2,0	—8	+1		—18.4	—7.5
	—4	+4	2,—3	—3	——
	+3	—2		—47	+30
3,0	——	——		+56.3	—30.1
	—8	+5	3,—3	+5	—4
	+7	—5		—16	+11
				+6	—1
			4,—3	——	——
				+9	—10
				—8	+8

Endlich ist noch das folgende Product berechnet worden.

$$\frac{1}{\cos i}\left(\frac{dR_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}$$

i, i'	sin	cos	i, i'	sin	cos
0,0		+0″.371	2,−2	+0″.032	+0″.071
1,0	−0″.187	−0.031	3,−2	+0.040	+0.066
2,0	−0.238	+0.148	4,−2	−0.002	−0.006
3,0	−0.005	+0.003	0,−3	+0.161	+0.152
−2,−1	+0.003	+0.004	1,−3	−0.241	+0.282
−1,−1	+0.011	+0.034	2,−3	+0.098	+0.202
0,−1	−0.062	+0.030	3,−3	−0.502	−0.118
1,−1	−0.046	+0.009	4,−3	−0.012	−0.001
2,−1	−0.041	+0.033	1,−6	−0.014	−0.005
3,−1	−0.016	+0.010	2,−6	+0.007	+0.006
−1,−2	+0.015	+0.002	3,−6	−0.088	+0.176
0,−2	+0.068	+0.037	4,−6	−0.073	−0.152
1,−2	+0.048	+0.068	5,−6	−0.006	−0.011

	ε sin	ε cos		ε sin	ε cos
0,0		+1066	0,−3	+759	+1367
1,0	−14	+129	1,−3	−1260	−135
2,0	−1305	+1616	2,−3	+1168	+1014
3,0	−23	+31	3,−3	−1333	+287
			4,−3	−57	+39

	ε^2 sin	ε^2 cos
0,0		+5.22
1,0	+0.09	+0.53
2,0	+2.40	+4.68
3,0	+0.05	+0.10

Hiemit sind alle Producte berechnet, die in der Regel für die vom Quadrat der störenden Kraft abhängigen Glieder erfordert werden, indem das Quadrat der Saturnmasse, und mehr noch das der Marsmasse nur Unmerkliches würde geben können.

Da die aus dem Vorhergehenden sich ergebenden Breitenstörungen klein ausfallen werden, und ausserdem Controlen vorhanden sind, so habe ich nicht für nöthig gehalten, von der durch die Gleichung (101) (I) zu erlangenden Controle Gebrauch zu machen.

60.

Es ist noch der Producte zu erwähnen, die in dem zweiten Theil der Breitenstörungen zufolge des §. 8 (II) vorkommen, die zwar in der Regel unmerklich sind, aber in ganz einzelnen Fällen Merkliches geben könnten. Von dem Quadrat $\frac{u^2}{\cos^2 i}$ und dem Product $\frac{u}{\cos i} \cdot \frac{u_1}{\cos i}$ braucht wohl weiter nichts gesagt zu werden, da diese beiden Producte auf dieselbe Weise erhalten werden können, wie r^2 und $\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{and z}{r}$, deren Berechnung im Art. 51 erklärt wurde. Es ist daher nur noch das Differential der Γ genannten Function zu betrachten, welche auch in der Reduction der Länge auf die Fundamentalebene zufolge des §. 1 (I) vorkommt. Nach §. 8 (II) ist

$$\frac{d\Gamma}{d\varepsilon}\cos i = \frac{r}{a} \cdot \frac{u}{\cos i} \quad \frac{1}{2\cos\varphi}\, a^2 \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

setzen wir daher in demselben Sinne wie im Art. 27

$$\frac{1}{2\cos\varphi}\, a^2 \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = Z_s \sin(i,i) + Z_c \cos(i,i)$$

und wenden wieder den dort eingeführten Ausdruck für $\frac{u}{\cos i}$ an, so wird

$$\frac{u}{\cos i}\,\frac{1}{2\cos\varphi}\, a^2 \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = (Z_c d_c \mp Z_s d_s)\cos(i \pm k, i' \pm k') + (Z_s d_c \pm Z_c d_s)\sin(i \pm k, i' \pm k$$

Zählt man die partiellen Producte wie folgt

$$\begin{matrix}(3),(4)\\(2),(1)\end{matrix}$$

so bekommt man dieses Product durch folgendes Schema

$$\begin{aligned}&\{(1)-(3)\}\cos(i+k, i'+k') + \{(2)+(4)\}\sin(i+k, i'+k')\\ &+\{(1)+(3)\}\cos(i-k, i'-k') + \{(2)-(4)\}\sin(i-k, i'-k')\end{aligned}$$

welches dem Schema (22) analog ist. Wenn man nach der Ausführung dieser Multiplication irgend ein Glied dieses Products mit

$$Z\,(i, i')\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,i, i$$

bezeichnet, so ist das entsprechende Glied in

$$\frac{d\Gamma}{d\varepsilon}\cos i = \left\{Z(i,i') - \frac{e}{2}Z(i+1,i') - \frac{e}{2}Z(i-1,i')\right\}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,i, i'$$

Nehmen wir in unserm Beispiel blos auf das Glied, welches bei der Integration den kleinsten Divisor bekommt, und auf die Säcularänderungen Rücksicht, so wird

$\frac{dr}{d\varepsilon}\cos i$		
i, i'	cos	sin
0,0	+0".00244	0".0000
1,—3	+0.0048	
	ε cos	ε sin
0,0	0.00	
1,0	+1	—4
2,0	—5	+14

welches sehr unbedeutend ist, obgleich die Neigung der Egeriabahn ziemlich gross ist.

§. 6. Integration der im vor. § berechneten Glieder.

61.

Die im vor. § vorkommenden Glieder, welche ε nicht ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen enthalten, können ohne Ausnahme nach den in den §§. 4 und 5 (II) entwickelten Formeln integrirt werden, aber die, welche diesen Factor enthalten, verlangen besondere Vorschriften, da daraus in den Integralen theils ähnliche Glieder und theils solche hervorgehen, die den Factor nicht mehr haben. Lässt man einstweilen die willkührlichen Constanten weg, so findet man leicht allgemein

$$\int \varepsilon \sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\}\,d\varepsilon = -\frac{1}{i-i'\mu}\,\varepsilon\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon-U\} + \frac{1}{(i-i'\mu)^2}\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon-U\}$$

$$\int \varepsilon \cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\}\,d\varepsilon = \frac{1}{i-i'\mu}\,\varepsilon\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon-U\} + \frac{1}{(i-i'\mu)^2}\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon-U\}$$

wozu als Ausnahme das Integral

$$\int \varepsilon d\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon^2$$

gerechnet werden muss. Ferner wird

$$\int \varepsilon^2 \sin i\varepsilon\, d\varepsilon = -\frac{1}{i}\varepsilon^2\cos i\varepsilon + \frac{2}{i^2}\varepsilon\sin i\varepsilon + \frac{2}{i^3}\cos i\varepsilon$$

$$\int \varepsilon^2 \cos i\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1}{i}\varepsilon^2\sin i\varepsilon + \frac{2}{i^2}\varepsilon\cos i\varepsilon - \frac{2}{i^3}\sin i\varepsilon$$

wozu als Ausnahme $\int \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon^3$ gerechnet werden muss. Die Glieder der vorstehenden Integrale, in welchen der Factor ε in einer niedrigeren

Potenz vorkommt wie im Differential, bekommen in der Störungstheorie im Allgemeinen weit kleinere Coefficienten wie die ausserdem vorhandenen Glieder derselben Form, und können daher in den meisten Fällen übergangen werden, allein in gewissen Fällen, und namentlich in den Gliedern, die kleine Divisoren bekommen, können sie gross, und manchmal grösser werden wie jene; man darf sie daher in der allgemeinen Entwickelung der Integrale nicht übergehen.

62.

Bei der Entwickelung der Integrale der Glieder der Differentiale zweiter Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte betrachten wir zuerst wie im §. 4 (II) den allgemeinen Fall, von welchem $i''=0$ ausgeschlossen ist. Wenn man, so weit es geschehen kann, dieselben Bezeichnungen wie dort anwendet, und wieder zur Abkürzung

$$(i,i') = (i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c\mu)$$

setzt, so ist im vor. § das Differential von δW_0 in folgender Form erhalten worden

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} = &- \Sigma F(i,i',c)\sin(i,i') + \Sigma F(i,i',s)\cos(i,i') \\
&- \Sigma G(i,i',c)\sin(-\eta+(i,i')) + \Sigma G(i,i',s)\cos(-\eta+(i,i')) \\
&- \Sigma H(i,i',c)\sin(\eta+(i,i')) + \Sigma H(i,i',s)\cos(\eta+(i,i')) \\
&- \varepsilon\Sigma F'(i,i',c)\sin(i,i') + \varepsilon\Sigma F'(i,i',s)\cos(i,i') \\
&- \varepsilon\Sigma G'(i,i',c)\sin(-\eta+(i,i')) + \varepsilon\Sigma G'(i,i',s)\cos(-\eta+(i,i')) \\
&- \varepsilon\Sigma H'(i,i',c)\sin(\eta+(i,i')) + \varepsilon\Sigma H'(i,i',s)\cos(\eta+(i,i'))
\end{aligned}$$

Setzt man nun beides für die Indices c und s

$$F_1(i,i') = \frac{F(i,i')}{i-i'\mu};\ G_1(i,i') = \frac{G(i,i')}{i-i'\mu};\ H_1(i,i') = \frac{H(i,i')}{i-i'\mu}$$

$$F'_1(i,i') = \frac{F'(i,i')}{i-i'\mu};\ G'_1(i,i') = \frac{G'(i,i')}{i-i'\mu};\ H'_1(i,i') = \frac{H'(i,i')}{i-i'\mu}$$

und hierauf

$$\begin{aligned}
F_n(i,i',c) &= F_1(i,i',c) + \frac{F_1(i,i',s)}{i-i'\mu} \\
G_n(i,i',c) &= G_1(i,i',c) + \frac{G_1(i,i',s)}{i-i'\mu} \\
H_n(i,i',c) &= H_1(i,i',c) + \frac{H_1(i,i',s)}{i-i'\mu} \\
F_n(i,i',s) &= F_1(i,i',s) - \frac{F_1(i,i',c)}{i-i'\mu} \\
G_n(i,i',s) &= G_1(i,i',s) - \frac{G_1(i,i',c)}{i-i'\mu} \\
H_n(i,i',s) &= H_1(i,i',s) - \frac{H_1(i,i',c)}{i-i'\mu}
\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}
\delta W_0 = {} & \Sigma F_{''}(i,i'',c)\cos(i,i'') && + \Sigma F_{''}(i,i'',s)\sin(i,i'') \\
& + \Sigma G_{''}(i,i'',c)\cos(-\eta+(i,i'')) && + \Sigma G_{''}(i,i'',s)\sin(-\eta+(i,i'')) \\
& + \Sigma H_{''}(i,i'',c)\cos(\eta+(i,i'')) && + \Sigma H_{''}(i,i'',s)\sin(\eta+(i,i'')) \\
& + \varepsilon\Sigma F'_1(i,i'',c)\cos(i,i'') && + \varepsilon\Sigma F'_1(i,i'',s)\sin(i,i'') \\
& + \varepsilon\Sigma G'_1(i,i'',c)\cos(-\eta+(i,i'')) && + \varepsilon\Sigma G'_1(i,i'',s)\sin(-\eta+(i,i'')) \\
& + \varepsilon\Sigma H'_1(i,i'',c)\cos(\eta+(i,i'')) && + \varepsilon\Sigma H'_1(i,i'',s)\sin(\eta+(i,i''))
\end{aligned}$$

und setzt man ferner

$$\begin{aligned}
P(i,i'') &= F_{''}(i,i'') + G_{''}(i+1,i'') + H_{''}(i-1,i'') \\
P'(i,i'') &= F'_1(i,i'') + G'_1(i+1,i'') + H'_1(i-1,i'') \\
Q(i,i'') &= G_{''}(i+1,i'') - H_{''}(i-1,i'') \\
Q'(i,i'') &= G'_1(i+1,i'') - H'_1(i-1,i'')
\end{aligned}$$

wo wie immer das Weglassen der Indices c und s bedeuten soll, dass die Ausdrücke für jeden derselben besonders gelten, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\delta W_0 = {} & \Sigma P(i,i'',c)\cos(i,i'') + \Sigma P(i,i'',s)\sin(i,i'') \\
& + \varepsilon\Sigma P'(i,i'',c)\cos(i,i'') + \varepsilon\Sigma P'(i,i'',s)\sin(i,i'') \\
\left(\frac{d\delta W_0}{d\eta}\right) = {} & \Sigma Q(i,i'',c)\sin(i,i'') - \Sigma Q(i,i'',s)\cos(i,i'') \\
& + \varepsilon\Sigma Q'(i,i'',c)\sin(i,i'') - \varepsilon\Sigma Q'(i,i'',s)\cos(i,i'')
\end{aligned}$$

63.

Die Producte

$$\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}\ ;\ \nu^2\ ;\ \left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right)\frac{an\delta z}{r}\ ;\ \left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}\ ,\ \frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

sind im vor. § für unser Beispiel einzeln angegeben worden, bildet man nun aus den dort angegebenen Coefficienten die Summen, und setzt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r} + \nu^2 = {} & \Sigma J(i,i'',c)\cos(i,i'') + \Sigma J(i,i'',s)\sin(i,i'') \\
& + \varepsilon\Sigma J(i,i'',c)\cos(i,i'') + \varepsilon\Sigma J(i,i'',s)\sin(i,i'') \\
\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right)\frac{an\delta z}{r} - \left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}\ ,\ \frac{ae\sin\varepsilon}{r} = {} & \Sigma K(i,i'',c)\sin(i,i'') - \Sigma K(i,i'',s)\cos(i,i'') \\
& + \varepsilon\Sigma K'(i,i'',c)\sin(i,i'') - \varepsilon\Sigma K'(i,i'',s)\cos(i,i'')
\end{aligned}$$

und hierauf

$$\begin{aligned}
M(i,i'') &= P(i,i'') + J(i,i'') \\
M'(i,i'') &= P'(i,i'') + J'(i,i'') \\
N(i,i'') &= Q(i,i'') + K(i,i'') \\
N'(i,i'') &= Q'(i,i'') + K'(i,i'')
\end{aligned}$$

dann wird

$$\frac{d\delta z}{dt} = \Sigma M(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma M(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$+\varepsilon\Sigma M'(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma M'(i,i',s)\sin(i,i')$$

und

$$-2\frac{d\delta v}{d\varepsilon} = \Sigma N(i,i',c)\sin(i,i') - \Sigma N(i,i',s)\cos(i,i')$$
$$+\varepsilon\Sigma N'(i,i',c)\sin(i,i') - \varepsilon\Sigma N'(i,i',s)\cos(i,i')$$

Um die letztere zu integriren, setze man

$$S_1(i,i') = \frac{N(i,i')}{i-i'\mu}\,;\quad S'_1(i,i') = \frac{N'(i,i')}{i-i'\mu}$$

$$S_{''}(i,i',c) = S_1(i,i',c) + \frac{S'_1(i,i',s)}{i-i'\mu}$$

$$S_{''}(i,i',s) = S_1(i,i',s) - \frac{S'_1(i,i',c)}{i-i'\mu}$$

dann wird

$$2\delta\nu = \Sigma S_{''}(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma S_{''}(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$+\varepsilon\Sigma S'_1(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma S'_1(i,i',s)\sin(i,i')$$

64.

Wenn die Integrationen bis hieher ausgeführt sind, dann kann die in §. 3 analytisch entwickelte Bedingungsgleichung angewandt, und durch dieselbe geprüft werden, ob die vorangegangenen numerischen Rechnungen richtig ausgeführt worden sind. Unter den drei in (80), (81), (82) (I) angegebenen Formen dieser Gleichung habe ich in §. 3 die dritte benutzt, und werde auch diese hier anwenden, es liegt der Grund dafür darin, dass durch die Anwendung der zweiten Form das Quadrat ν^2 uncontrolirt bleiben würde, und dass das Product $2\nu\delta\frac{h_0}{h}$ aus weit wenigeren Gliedern besteht, wie das statt dessen in der ersten Form vorkommende Product $2\nu\frac{d\delta z}{dt}$, und also leichter zu berechnen ist, wie dieses. Die Gleichung (1) stelle ich jetzt für ihre Anwendung zur Controle der numerischen Rechnungen wie folgt,

$$\frac{d\delta z}{dt} + 2\delta\nu = \delta\frac{h_0}{h} + 2\nu\frac{\Delta n}{n} + 3\nu^2 + 2\nu\delta\frac{h}{h_0}$$

und für unser Beispiel sind die beiden letzten Glieder dieser Gleichung im vor. § schon berechnet worden. Setzen wir nun für das Differential von $\delta\frac{h_0}{h}$, welches für unser Beispiel im Art. 56 berechnet worden ist,

$$\frac{d\delta\frac{h_0}{h}}{d\varepsilon} = -\Sigma\Pi(i,i',c)\sin(i,i') + \Sigma\Pi(i,i',s)\cos(i,i')$$
$$-\varepsilon\Sigma\Pi'(i,i',c)\sin(i,i') + \varepsilon\Sigma\Pi'(i,i',s)\cos(i,i')$$

dann wird

$$\delta\frac{h_0}{h} = \Sigma\Pi_n(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma\Pi_n(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$+\varepsilon\Sigma\Pi_1'(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma\Pi_1'(i,i',s)\sin(i,i')$$

nachdem

$$\Pi_1(i,i') = \frac{\Pi(i,i')}{i-i'\mu};\quad \Pi_1'(i,i') = \frac{\Pi'(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$\Pi_n(i,i',c) = \Pi_1(i,i',c) + \frac{\Pi_1'(i,i',s)}{i-i'\mu}$$
$$\Pi_n(i,i',s) = \Pi_1(i,i',s) - \frac{\Pi_1'(i,i',c)}{i-i'\mu}$$

gesetzt worden ist. Sei nun

$$v^2 = \Sigma\Upsilon(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma\Upsilon(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$+\varepsilon\Sigma\Upsilon'(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma\Upsilon'(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$2v\delta\frac{h}{h_0} = \Sigma\Psi(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma\Psi(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$= \varepsilon\Sigma\Psi'(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma\Psi'(i,i',s)\sin(i,i')$$

und aus der Berechnung der Störungen erster Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte

$$2v = \Sigma S_0(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma S_0(i,i',s)\sin(i,i')$$

dann bekommen wir zufolge der angeführten Bedingungsgleichung mit Ausschluss einiger zu $i'=0$ gehörigen Glieder für jeden Werth von i und i' zur Prüfung der vorangegangenen numerischen Rechnungen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} M(i,i') + S_n(i,i') &= \Pi_n(i,i') + \tfrac{fn}{n}S_0(i,i') + 3\Upsilon(i,i') + \Psi(i,i') \\ M_1(i,i') + S_1'(i,i') &= \Pi_1'(i,i') \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

deren zweite der bei der Berechnung der Coefficienten der ersten Ordnung abgeleiteten Bedingungsgleichung völlig ähnlich ist.

65.

Nehmen wir hierauf den Ausdruck des Art. 63 für $\frac{d\delta z}{dt}$ wieder vor, und multiplicieren denselben mit $1-e\cos\varepsilon$. Setzen wir demzufolge

$$R(i,i') = M(i,i') - \tfrac{e}{2}M(i+1,i') - \tfrac{e}{2}M(i-1,i')$$
$$R'(i,i') = M'(i,i') - \tfrac{e}{2}M'(i+1,i') - \tfrac{e}{2}M'(i-1,i')$$

so wird

$$n\frac{d\delta z}{d\varepsilon} = \Sigma R(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma R(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$+\varepsilon\Sigma R_1'(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma R_1'(i,i',s)\sin(i,i')$$

und durch Anwendung der folgenden Ausdrücke

$$R_1(i,i') = \frac{R(i,i')}{i-i'\mu}\ ;\ R_1'(i,i') = \frac{R'(i,i')}{i-i'\mu}$$

$$R_{''}(i,i',c) = R_1(i,i',c) + \frac{R_1'(i,i',s)}{i-i'\mu}$$

$$R_{''}(i,i',s) = R_1(i,i',c) - \frac{R_1'(i,i',c)}{i-i'\mu}$$

ergiebt sich

$$\begin{aligned} n\delta z = {} & \Sigma R_{''}(i,i',c)\sin(i,i') - \Sigma R_{''}(i,i',s)\cos(i,i') \\ & + \varepsilon\Sigma R_1'(i,i',c)\sin(i,i') - \varepsilon\Sigma R_1'(i,i',s)\cos(i,i') \end{aligned}$$

womit die Störungen der Länge und des Radius erlangt sind.

66.

Die Integration der Breitenstörungen wird auf ganz ähnliche Weise ausgeführt, und ist noch etwas einfacher. Das Differential von $\delta_1 R_0$, so wie es im vor. § für unser Beispiel berechnet worden ist, stelle ich wie folgt dar,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos i}\frac{d\delta_1 R_0}{d\varepsilon} = {} & \Sigma T(i,i',s)\cos(i,i') && - \Sigma T(i,i',c)\sin(i,i') \\ & + \Sigma U(i,i',s)\cos(-\eta+(i,i')) && - \Sigma U(i,i',c)\sin(-\eta+(i,i')) \\ & + \Sigma V(i,i',s)\cos(\eta+(i,i')) && - \Sigma V(i,i',c)\sin(\eta+(i,i')) \\ & + \varepsilon\Sigma T'(i,i',s)\cos(i,i') && - \varepsilon\Sigma T'(i,i',c)\sin(i,i') \\ & + \varepsilon\Sigma U'(i,i',s)\cos(-\eta+(i,i')) && - \varepsilon\Sigma U'(i,i',c)\sin(-\eta+(i,i')) \\ & + \varepsilon\Sigma V'(i,i',s)\cos(\eta+(i,i')) && - \varepsilon\Sigma V'(i,i',c)\sin(\eta+(i,i')) \end{aligned}$$

Setzt man hier dem Vorhergehenden analog

$$T_1(i,i') = \frac{T(i,i')}{i-i'\mu}\ ;\ U_1(i,i') = \frac{U(i,i')}{i-i'\mu}\ ;\ V_1(i,i') = \frac{V(i,i')}{i-i'\mu}$$

$$T_1'(i,i') = \frac{T'(i,i')}{i-i'\mu}\ ;\ U_1'(i,i') = \frac{U'(i,i')}{i-i'\mu}\ ;\ V_1'(i,i') = \frac{U'(i,i')}{i-i'\mu}$$

$$T_{''}(i,i',s) = T_1(i,i',s) - \frac{T_1'(i,i',c)}{i-i'\mu}$$

$$U_{''}(i,i',s) = U_1(i,i',s) - \frac{U_1'(i,i',c)}{i-i'\mu}$$

$$V_{''}(i,i',s) = V_1(i,i',s) - \frac{V_1'(i,i',c)}{i-i'\mu}$$

$$T_{''}(i,i',c) = T_1(i,i',c) + \frac{T_1'(i,i',s)}{i-i'\mu}$$

$$U_{''}(i,i',c) = U_1(i,i',c) + \frac{U_1'(i,i',s)}{i-i'\mu}$$

$$V_{''}(i,i',c) = V_1(i,i',c) + \frac{V_1'(i,i',s)}{i-i'\mu}$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_1 R_0}{\cos i} = {} & \Sigma T_{''}(i,i',s)\sin(i,i') && + \Sigma T_{''}(i,i',c)\cos(i,i') \\
& + \Sigma U_{''}'(i,i',s)\sin(-\eta+(i,i')) && + \Sigma U_{''}(i,i',c)\cos(-\eta+(i,i')) \\
& + \Sigma V_{''}(i,i',s)\sin(\eta+(i,i')) && + \Sigma V_{''}(i,i',c)\cos(\eta+(i,i')) \\
& + \varepsilon\Sigma T_1'(i,i',s)\sin(i,i') && + \varepsilon\Sigma T_1'(i,i',c)\cos(i,i') \\
& + \varepsilon\Sigma U_1'(i,i',s)\sin(-\eta+(i,i')) && + \varepsilon\Sigma U_1'(i,i',c)\cos(-\eta+(i,i')) \\
& + \varepsilon\Sigma V_1'(i,i',s)\sin(\eta+(i,i')) && + \varepsilon\Sigma V_1'(i,i',c)\cos(\eta+(i,i'))
\end{aligned}$$

Sei ferner

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos i}\left(\frac{\delta R_0}{d\eta}\right)\frac{an\partial z}{r} = {} & \Sigma Y(i,i',s)\sin(i,i') + \Sigma Y(i,i',c)\cos(i,i') \\
& + \varepsilon\Sigma Y'(i,i',s)\sin(i,i') + \varepsilon\Sigma Y'(i,i',c)\cos(i,i')
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
W(i,i') &= T_{''}(i,i') + U_{''}(i+1,i') + V_{''}(i-1,i') + Y(i,i') \\
W'(i,i') &= T_1'(i,i') + U_1'(i+1,i') + V_1'(i-1,i') + Y_1'(i,i')
\end{aligned}$$

dann wird

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_1 u}{\cos i} = {} & \Sigma W(i,i',s)\sin(i,i') + \Sigma W(i,i',c)\cos(i,i') \\
& + \varepsilon\Sigma W'(i,i',s)\sin(i,i') + \varepsilon\Sigma W'(i,i',c)\cos(i,i')
\end{aligned}$$

womit der Haupttheil der Breitenstörungen zweiter Ordnung gegeben ist. Ueber den zweiten Theil dieser Störungen, nemlich über $\delta_2 u$, wird weiter unten das Nöthige gesagt werden.

67.

Gehen wir jetzt zu den Gliedern über, die von $i'=0$ abhängen und von welchen einige hier gleichwie in der ersten Annäherung auf besondere Formen führen. Lassen wir hier, wie dort schon geschah, zur Vereinfachung in der Bezeichnung der Coefficienten den zweiten Index, welcher immer Null ist, weg, so wird

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} = {} & && F(0.s) \\
& - G(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon) && + G(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon) \\
& - F(1.c)\sin\varepsilon && + F(1.s)\cos\varepsilon \\
& - G(2.c)\sin(-\eta+2\varepsilon) && + G(2.s)\cos(-\eta+2\varepsilon) \\
& - H(0.c)\sin\eta && + H(0.s)\cos\eta \\
& - F(2.c)\sin 2\varepsilon && + F(2.s)\cos 2\varepsilon \\
& - G(3.c)\sin(-\eta+3\varepsilon) && + G(3.s)\cos(-\eta+3\varepsilon) \\
& - H(1.c)\sin(\eta+\varepsilon && + H(1.s)\cos(\eta+\varepsilon) \\
& + \text{etc.} && + \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
 & +F'(0.s)\varepsilon \\
-G'(1.c)\varepsilon\sin(-\eta+\varepsilon) & +G'(1.s)\varepsilon\cos(-\eta+\varepsilon) \\
-F'(1.c)\varepsilon\sin\varepsilon & +F'(1.s)\varepsilon\cos\varepsilon \\
-G'(2.c)\varepsilon\sin(-\eta+2\varepsilon) & +G'(2.s)\varepsilon\cos(-\eta+2\varepsilon) \\
-H'(0.c)\varepsilon\sin\eta & +H'(0.s)\varepsilon\cos\eta \\
-F'(2.c)\varepsilon\sin 2\varepsilon & +F'(2.s)\varepsilon\cos 2\varepsilon \\
-G'(3.c)\varepsilon\sin(-\eta+3\varepsilon) & +G'(3.s)\varepsilon\cos(-\eta+3\varepsilon) \\
-H'(1.c)\varepsilon\sin(\eta+\varepsilon) & +H'(1.s)\varepsilon\cos(\eta+\varepsilon) \\
-\text{etc.} & +\text{etc.}
\end{array}
$$

Unter den Coefficienten $F(0.s)$ und $F'(0.s)$ soll hier der einfache Werth derselben verstanden werden, welcher auch in den bez. Tafeln des vor. § für unser Beispiel angesetzt worden ist. Macht man nun dem Vorhergehenden analog, aber mit Ausnahme des Werthes $i=0$,

$$F_1(i) = \tfrac{1}{i}F(i);\ G_1(i) = \tfrac{1}{i}G(i);\ H_1(i) = \tfrac{1}{i}H(i)$$

$$F_1'(i) = \tfrac{1}{i}F'(i);\ G_1'(i) = \tfrac{1}{i}G'(i);\ H_1'(i) = \tfrac{1}{i}H_1'(i)$$

$$F_n(i,c) = F_1(i.c) + \tfrac{1}{i}F_1'(i,s)$$

$$G_n(i,c) = G_1(i,c) + \tfrac{1}{i}G_1'(i,s)$$

$$H_n(i,c) = H_1(i,c) + \tfrac{1}{i}H_1'(i,s)$$

$$F_n(i,s) = F_1(i,s) - \tfrac{1}{i}F_1'(i,c)$$

$$G_n(i,s) = G_1(i,s) - \tfrac{1}{i}G_1'(i,c)$$

$$H_n(i,s) = H_1(i,s) - \tfrac{1}{i}H_1'(i,c)$$

so wird

$$
\begin{array}{lll}
\delta W_0 = & G_n(1.c)\cos(-\eta+\varepsilon) & +G_n(1.s)\sin(-\eta+\varepsilon) \\
 & +F_n(1.c)\cos\varepsilon & +F_n(1.s)\sin\varepsilon \\
 & +G_n(2.c)\cos(-\eta+2\varepsilon) & +G_n(2.s)\sin(-\eta+2\varepsilon) \\
 & +F''(2.c)\cos 2\varepsilon & +F_n(2.s)\sin 2\varepsilon \\
 & +G_n(3.c)\cos(-\eta+3\varepsilon) & +G_n(3.s)\sin(-\eta+3\varepsilon) \\
 & +H_n(1.c)\cos(\eta+\varepsilon) & +H_n(1.s)\sin(\eta+\varepsilon) \\
 & +\text{etc.} & +\text{etc.} \\
 & +F(0.s)\varepsilon & \\
 & +G_1'(1.c)\varepsilon\cos(-\eta+\varepsilon) & +G_1'(1.s)\varepsilon\sin(-\eta+\varepsilon)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
+ F_1'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon & + F_1'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\
+ G_1'(2.c)\varepsilon\cos(-\eta+2\varepsilon) & + G_1'(2.s)\varepsilon\sin(-\eta+2\varepsilon) \\
+ H(0.s)\varepsilon\cos\eta & - H(0.c)\varepsilon\sin\eta \\
+ F_1'(2.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon & + F_1'(2.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon \\
+ G_1'(3.c)\varepsilon\cos(-\eta+3\varepsilon) & + G_1'(3.s)\varepsilon\sin(-\eta+3\varepsilon) \\
+ H_1'(1.c)\varepsilon\cos(\eta+\varepsilon) & + H_1'(1.s)\varepsilon\sin(\eta+\varepsilon) \\
+ \text{etc.} & + \text{etc.} \\
+ \tfrac{1}{2}F'(0.s)\varepsilon^2 & \\
+ \tfrac{1}{2}H'(0.s)\varepsilon^2\cos\eta & - \tfrac{1}{2}H'(0.c)\varepsilon^2\sin\eta
\end{array}
$$

68.

Setzen wir hierauf

$$
\begin{array}{lll}
P(0.c) = G_n(1.c) & & \\
P(1.c) = F_n(1.c) & + G_n(2.c) & \\
P(2.c) = F_n(2.c) & + G_n(3.c) & + H_n(1.c) \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \\
P(1.s) = F_n(1.s) & + G_n(2.s) & \\
P(2.s) = F_n(2.s) & + G_n(3.s) & + H_n(1.s) \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \\
P'(0.c) = F(0.s) & + G_1'(1.c) & \\
P'(1.c) = F_1'(1.c) & + G_1'(2.c) & + H(0.s) \\
P'(2.c) = F_1'(2.c) & + G_1'(3.c) & + H_1'(1.c) \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \\
P'(1.s) = F_1'(1.s) & + G_1'(2.s) & - H(0.c) \\
P'(2.s) = F_1'(2.s) & + G_1'(3.s) & + H_1'(1.s) \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \\
Q(1.c) = G_n(2.c) & & \\
Q(2.c) = G_n(3.c) & - H_n(1.c) & \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \\
Q(0.s) = G_n(1.s) & & \\
Q(1.s) = G_n(2.s) & & \\
Q(2.s) = G_n(3.s) & - H_n(1.s) & \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \\
Q'(1.c) = G_1'(2.c) & - H(0.s) & \\
Q'(2.c) = G_1'(3.c) & - H_1'(1.c) & \\
\text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}
$$

$$\begin{aligned} Q'(0.s) &= G_1'(1.s) \\ Q'(1.s) &= G_1'(2.s) + H\,(0.c) \\ Q'(2.s) &= G_1'(3.s) - H_1'(1.s) \\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} \overline{\delta W_0} = \quad & P(0.c) \\ & + P(1.c)\cos\varepsilon \quad + P(1.s)\sin\varepsilon \\ & + P(2.c)\cos 2\varepsilon \quad + P(2.s)\sin 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\ & + P'(0.c)\varepsilon \\ & + P'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon \quad + P'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\ & + P'(2.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon \quad + P'(2.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\ & + \tfrac{1}{2}F'(0.s)\varepsilon^2 \\ & + \tfrac{1}{2}H'(0.s)\varepsilon^2\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}H'(0.c)\varepsilon^2\sin\varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\overline{\delta W_0}}{d\eta}\right) = \quad & - Q(0.s) \\ & + Q(1.c)\sin\varepsilon \quad - Q(1.s)\cos\varepsilon \\ & + Q(2.c)\sin 2\varepsilon \quad - Q(2.s)\cos 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad - \text{etc.} \\ & \qquad\qquad - Q'(0.s)\varepsilon \\ & + Q'(1.c)\varepsilon\sin\varepsilon \quad - Q'(1.s)\varepsilon\cos\varepsilon \\ & + Q'(2.c)\varepsilon\sin 2\varepsilon \quad - Q'(2.s)\varepsilon\cos\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad - \text{etc.} \\ & - \tfrac{1}{2}H'(0.s)\varepsilon^2\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}H'(0.c)\varepsilon^2\cos\varepsilon \end{aligned}$$

Setzt man ferner

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\overline{W_0}}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r} + \nu^2 = \quad & J\,(0.c) \\ & + J\,(1.c)\ \cos \quad + J\,(1.s)\ \sin\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\ & + J'(0.c)\varepsilon \\ & + J'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon \quad + J'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\ & + J''(0.c)\varepsilon^2 \\ & + J''(1.c)\varepsilon^2\cos\varepsilon \quad + J''(1.s)\varepsilon^2\sin\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^2\overline{W_0}}{d\eta^2}\right)\frac{an\delta z}{r} - \left(\frac{d\overline{W_0}}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}\cdot\frac{ae\sin\varepsilon}{r} =$$

$$\begin{aligned}
&&&-K(0.s)\\
&+K(1.c)\cos\varepsilon &&-K(1.s)\sin\varepsilon\\
&+\text{etc.} &&-\text{etc.}\\
&&&-K'(0.s)\varepsilon\\
&+K'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon &&-K'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon\\
&+\text{etc.} &&-\text{etc.}\\
&+K''(1.c)\varepsilon^2\cos\varepsilon &&-K''(1.s)\varepsilon^2\sin\varepsilon\\
&+\text{etc.} &&-\text{etc.}
\end{aligned}$$

wo in Folge des im Art. 32 bewiesenen Satzes das ε^2 proportionale Glied der letzten Function Null gesetzt worden ist, und setzt man hierauf

$$\begin{aligned}
M(i) &= P(i) &&+J(i)\\
M'(i) &= P'(i) &&+J'(i), \text{ ausgenommen } M'(0.c)\\
M''(1.c) &= \tfrac{1}{2}H'(0.s) &&+J''(1.c)\\
M''(2.c) &= &&J''(2.c)\\
&\text{etc.} &&\text{etc.}\\
M''(1.s) &= -\tfrac{1}{2}H'(0.c) &&+J''(1.s)\\
M''(2.s) &= &&J''(2.s)\\
&\text{etc.} &&\text{etc.}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
N(i) &= Q(i) &&+K(i)\\
N'(i) &= Q'(i) &&+K'(i)\\
N''(1.c) &= -\tfrac{1}{2}H'(0.s) &&+K''(1.c)\\
N''(2.c) &= &&K''(2.c)\\
&\text{etc.} &&\text{etc.}\\
N''(1.s) &= \tfrac{1}{2}H'(0.c) &&+K''(1.s)\\
N''(2.s) &= &&K''(2.s)\\
&\text{etc.} &&\text{etc.}
\end{aligned}$$

so bekommt man

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta z}{dt} = \quad & M(0.c)\\
&+M(1.c)\cos\varepsilon &&+M(1.s)\sin\varepsilon\\
&+M(2.c)\cos 2\varepsilon &&+M(2.s)\sin 2\varepsilon\\
&+\text{etc.} &&+\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ M'(0.c)\varepsilon \\
&+ M'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon \quad + M'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\
&+ M'(2.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon \quad + M'(2.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\
&+ M''(0.c)\varepsilon^2 \\
&+ M''(1.c)\varepsilon^2\cos\varepsilon \quad + M''(1.s)\varepsilon^2\sin\varepsilon \\
&+ M''(2.c)\varepsilon^2\cos 2\varepsilon \quad + M''(2.s)\varepsilon^2\sin 2\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad\qquad - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

wo noch die Zusammensetzung der Coefficienten $M'(0.c)$ und $M''(0.c)$ zu ermitteln ist, ferner wird

$$
\begin{aligned}
-2\frac{d\delta\nu}{d\varepsilon} = \quad & - N(0.s) \\
& + N(1.c)\sin\varepsilon \quad - N(1.s)\cos\varepsilon \\
& + N(2.c)\sin 2\varepsilon \quad - N(2.s)\cos 2\varepsilon \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad - \text{etc.} \\
& \qquad\qquad - N'(0.s)\varepsilon \\
& + N'(1.c)\varepsilon\sin\varepsilon \quad - N'(1.s)\varepsilon\cos\varepsilon \\
& + N'(2.c)\varepsilon\sin 2\varepsilon \quad - N'(2.s)\varepsilon\cos 2\varepsilon \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad - \text{etc.} \\
& + N''(1.c)\varepsilon^2\sin\varepsilon \quad - N''(1.s)\varepsilon^2\cos\varepsilon \\
& + N''(2.c)\varepsilon^2\sin 2\varepsilon \quad - N''(2.s)\varepsilon^2\cos 2\varepsilon \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

welche letztere sogleich integrirt werden kann.

69.

Setzt man

$$S_1(i) = \tfrac{1}{i}N(i);\ S_1'(i) = \tfrac{1}{i}N'(i);\ S_1''(i) = \tfrac{1}{i}N''(i)$$

mit der Ausnahme, dass

$$S_1(0) = 0;\ S_1'(0) = 0;\ S_1''(0.c) = \tfrac{1}{2}N'(0.s)$$

sein soll, ferner

$$
\begin{aligned}
S_{\prime\prime}'(i,c) &= S_1'(i,c) + \tfrac{2}{i}S_1''(i,s) \\
S_{\prime\prime}'(i,s) &= S_1'(i,s) - \tfrac{2}{i}S_1''(i,c) \\
S_{\prime\prime}(i,c) &= S_1(i,c) + \tfrac{1}{i}S_{\prime\prime}'(i,s) \\
S_{\prime\prime}(i,s) &= S_1(i,s) - \tfrac{1}{i}S_{\prime}'(i,c)
\end{aligned}
$$

ausgenommen $S_{\prime\prime}'(0.c) = N(0.s)$;

so wird

$$\begin{aligned}
2\delta v = {} & S_{\prime\prime}(1.c)\cos\varepsilon + S_{\prime\prime}(1.s)\sin\varepsilon \\
& + S_{\prime\prime}(2.c)\cos 2\varepsilon + S_{\prime\prime}(2.s)\sin 2\varepsilon \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\
& + S'_{\prime\prime}(0.c)\varepsilon \\
& + S'_{\prime\prime}(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon + S'_{\prime\prime}(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\
& + S'_{\prime\prime}(2.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon + S'_{\prime\prime}(2.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\
& + S''_{1}(0.c)\varepsilon^2 \\
& + S''_{1}(1.c)\varepsilon^2\cos\varepsilon + S''_{1}(1.s)\varepsilon^2\sin\varepsilon \\
& + S''_{1}(2.c)\varepsilon^2\cos 2\varepsilon + S''_{1}(2.s)\varepsilon^2\sin 2\varepsilon \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

wo nur noch ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen die Verwandlung von ε in nt zu bewirken ist, die zuletzt vorgenommen werden soll.

70.

Ehe wir weiter gehen können, muss untersucht werden, welche Bedingungen die im §. 7 (II) entwickelten Sätze zwischen den Coefficienten von $\frac{d\delta z}{dt}$ einführen. Es müssen die Ausdrücke von $M'(0.c)$ und $M'(0.c)$ demgemäss bestimmt, und in denselben die Grössen eliminirt werden, die einander strenge aufheben müssen, damit nicht die unvermeidlichen Fehler der letzten Decimalen der numerischen Rechnung diese Coefficienten unrichtig machen.

Wenn man δW_0 auf die Form

$$\Xi + \Upsilon\left(\cos\eta + \frac{e}{2}\right) + \Psi\sin\eta$$

bringt, und in der Function

$$\Xi + \left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r} + \nu^2$$

die den Theil von $\frac{d\delta z}{dt}$ ausmacht, welcher im §. 7 (II) in Betracht gezogen worden ist, ε ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= nt + e\sin\varepsilon \\
\varepsilon^2 &= n^2t^2 + 2ent\sin\varepsilon + e^2\sin^2\varepsilon
\end{aligned}$$

eliminirt, so muss zufolge des fünften Satzes in der so entstehenden Function der Coefficient von nt sich zu dem von $nt\cos\varepsilon$, und der Coefficient von n^2t^2 sich zu dem von $n^2t^2\cos\varepsilon$ wie $\frac{e}{2}$ zu 1 verhalten.

Aus dem Ausdruck für δW_0 des Art. 67 findet man leicht mit Weglassung der Glieder, die hier auf keinen Fall gebraucht werden,

$$\begin{aligned}\Xi = & \left\{ F'(0.s) - \tfrac{e}{2} H(0.s) \right\} \varepsilon \\ & + \left\{ F_1'(1.c) - \tfrac{e}{2} G_1'(1.c) - \tfrac{e}{2} H_1'(1.c) \right\} \varepsilon \cos \varepsilon \\ & + \left\{ F_1'(2.c) - \tfrac{e}{2} G_1'(2.c) - \tfrac{e}{2} H_1'(2.c) \right\} \varepsilon \cos 2\varepsilon \\ & + \text{ etc.} \\ & + \left\{ \tfrac{1}{2} F'(0.s) - \tfrac{e}{4} H'(0.s) \right\} \varepsilon^2\end{aligned}$$

wo man ohne Weiteres nt für ε und $n^2 t^2$ für ε^2 setzen darf. Ferner ist aus dem Vorhergehenden mit bloser Rücksicht auf die Glieder, die hier in Betracht kommen,

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{dW_0}{d\eta}\right)\tfrac{and\delta z}{r} + \nu^2 = & J'(0.c)\varepsilon + J'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon \\ & + J''(0.c)\varepsilon^2 + J''(1.c)\varepsilon^2\cos\varepsilon + J''(1.s)\varepsilon^2\sin\varepsilon + J''(2.c)\varepsilon^2\sin 2\varepsilon \\ = & \{J''(0.c) + eJ''(1.s)\}nt + \{J'(1.c) + eJ''(2.s)\}nt\cos\varepsilon \\ & + J''(0.c)n^2t^2 + J''(1.c)n^2t^2\cos\varepsilon\end{aligned}$$

nach der Elimination von ε und ε^2. In Folge des angeführten Satzes bekommen wir also die Bedingungsgleichungen

$$(25)\quad \begin{cases} 0 = F(0.s) - \tfrac{e}{2} H(0.s) + J'(0.c) + eJ''(1.s) \\ \quad - \tfrac{e}{4} F'(1.c) + \tfrac{e^2}{4} G'(1.c) + \tfrac{e^2}{4} H'(1.c) - \tfrac{e}{2} J'(1.c) - \tfrac{e^2}{2} J''(2.s) \\ 0 = F'(0.s) - \tfrac{e}{2} H'(0.s) + 2J''(0.c) - eJ''(1.c) \end{cases}$$

Zufolge der Auseinandersetzungen des Art. 68 bekommen wir zuerst für $M'(0.c)$ und $M''(0.c)$ die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} M'(0.c) &= P'(0.c) + J'(0.c) \\ M''(0.c) &= \tfrac{1}{2} F'(0.c) + J''(0.c) \end{aligned}$$

oder wenn wir den Ausdruck

$$P'(0.c) = F(0.s) + G_1'(1.c)$$

substituiren

$$M'(0.c) = F(0.s) + G_1'(1.c) + J'(0.c)$$

Eliminiren wir aus diesen Ausdrücken $F(0.s)$ und $F'(0.s)$ durch die Gleichungen (25), so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} M'(0.c) = \quad & G'(1.c) + \tfrac{e}{2} H(0.s) \\ & + \tfrac{e}{2} F'(1.c) - \tfrac{e^2}{4} G'(1.c) - \tfrac{e^2}{4} H'(1.c) \\ & + \tfrac{e}{2} J'(1.c) - e\, J''(1.s) + \tfrac{e^2}{2} J''(2.s) \\ M''(0.c) = \quad & \tfrac{e}{4} H'(0.s) + \tfrac{e}{2} J''(1.c) \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

wonach diese Coefficienten mit Sicherheit numerisch berechnet werden können.

71.

Um die Bedingungsgleichung des §. 3 auch auf die Glieder, welche hier entwickelt worden sind, anwenden zu können, sei

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\frac{h_0}{h}}{d\varepsilon} = \quad & \Pi(0.s) \\ & - \Pi(1.c)\sin\varepsilon + \Pi(1.s)\cos\varepsilon \\ & - \text{etc.} \qquad + \text{etc.} \\ & \qquad + \Pi'(0.s)\,\varepsilon \\ & - \Pi'(1.c)\varepsilon\sin\varepsilon + \Pi'(1.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon \\ & - \text{etc.} \qquad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man hier

$$\Pi_1(i) = \tfrac{1}{i}\Pi(i)\,;\ \Pi_1'(i) = \tfrac{1}{i}\Pi'(i)$$

ausgenommen

$$\Pi_1(0) = 0\,;\ \Pi_1'(0) = 0$$

ferner

$$\Pi_n(1.c) = \Pi_1(1.c) + \tfrac{1}{i}\Pi_1'(1.s)$$

$$\Pi_n(1.s) = \Pi_1(1.s) - \tfrac{1}{i}\Pi_1'(1.c)$$

so wird

$$\begin{aligned} \delta\tfrac{h_0}{h} = \quad & \Pi_n(1.c)\cos\varepsilon \quad + \Pi_n(1.s)\sin\varepsilon \\ & + \Pi_n(2.c)\cos 2\varepsilon \quad + \Pi_n(2.s)\sin 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad + \text{etc.} \\ & + \Pi(0.s)\,\varepsilon \\ & + \Pi_1'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon \quad + \Pi_1'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\ & + \Pi_1'(2.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon \quad + \Pi_1'(2.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad + \text{etc.} \\ & + \tfrac{1}{2}\Pi'(0.s)\,\varepsilon^2 \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun die bez. Coefficienten von ν^2 und $2\nu\delta\frac{h}{h_0}$ ebenso wie im Art. 64 und nehmen in ähnlicher Bezeichnung aus der der ersten Annäherung

$$\begin{aligned} 2\nu = \quad & S_0(1.c)\cos\varepsilon + S_0(1.s)\sin\varepsilon \\ & + S_0(2.c)\cos 2\varepsilon + S_0(2.s)\sin 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\ & + S_0'(0.c)\,\varepsilon \\ & + S_0'(1.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon + S_0'(1.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon \end{aligned}$$

dann entstehen vermöge der im Art. 64 angeführten Bedingungsgleichung die folgenden

$$M(i) + S_{''}(i) = \Pi_{''}(i) + \frac{\Delta n}{n} S_0(i) + 3\,\Upsilon(i) + \Psi(i)$$

wo der Werth $i=0$ ausgeschlossen werden muss. Ferner

$$M'(0.c) + N(0.s) = \Pi(0.s) + \frac{\Delta n}{n} S_0'(0.c) + 3\Upsilon'(0.c) + \Psi'(0.c)$$

$$M'(1.c) + S_{''}'(1.c) = \Pi_{'}'(1.c) + \frac{\Delta n}{n} S_0'(1.c) + 3\Upsilon'(1.c) + \Psi'(1.c)$$

$$M'(1.s) + S_{''}'(1.s) = \Pi_{'}'(1.s) + \frac{\Delta n}{n} S_0'(1.s) + 3\Upsilon'(1.s) + \Psi'(1.s)$$

und für grössere Werthe von i allgemein

$$M'(i) + S_{''}'(i) = \Pi_{'}'(i) + 3\Upsilon'(i) + \Psi'(i)$$

ferner

$$\begin{aligned} M''(0.c) + \tfrac{1}{2}N'(0.s) &= \tfrac{1}{2}\Pi'(0.s) + 3\Upsilon''(0.c) + \Psi''(0.c) \\ M''(1.c) + S_{'}''(1.c) &= 3\Upsilon''(1.c) + \Psi''(1.c) \\ M''(2.c) + S_{'}''(2.c) &= 3\Upsilon''(2.c) \\ M''(3.c) + S_{'}''(3.c) &= 0 \\ &\text{etc.} \\ M''(1.s) + S_{'}''(1.s) &= 3\Upsilon''(1.s) + \Psi''(1.s) \\ M''(2.s) + S_{'}''(2.s) &= 3\Upsilon''(2.s) \\ M''(3.s) + S_{'}''(3.s) &= 0 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Von der Gleichung zwischen den constanten Gliedern, die hier, gleichwie im §. 3 weggelassen worden ist, wird weiter unten die Rede sein.

72.

Nachdem man sich durch die im Vorhergehenden entwickelten Bedingungsgleichungen von der richtigen Ausführung der numerischen Rechnungen überzeugt hat, kann man zum Integral, welches $n\delta z$ giebt, übergehen. Für die hier zu betrachtenden Glieder desselben setze man

$$R(0.c) = M(0.c) - \tfrac{e}{2} M(1.c)$$

$$R(1.c) = M(1.c) - \tfrac{e}{2} M(2.c) - e\,M(0.c)$$

$$R(1.s) = M(1.s) - \tfrac{e}{2} M(2.s)$$

und für grössere Werthe von i allgemein

$$R(i) = M(i) - \tfrac{e}{2} M(i+1) - \tfrac{e}{2} M(i-1)$$

ferner

$$R'(0.c) = M'(0.c) - \tfrac{e}{2} M'(1.c)$$

$$R'(1.c) = M'(1.c) - \tfrac{e}{2} M'(2.c) - e\,M'(0.c)$$

$$R'(1.s) = M'(1.s) - \tfrac{e}{2} M'(2.s)$$

und für grössere Werthe von i allgemein

$$R'(i) = M'(i) - \tfrac{e}{2} M'(i+1) - \tfrac{e}{2} M'(i-1)$$

ferner

$$R''(0.c) = M''(0.c) - \tfrac{e}{2} M''(1.c) = 0$$

$$R''(1.c) = M''(1.c) - \tfrac{e}{2} M''(2.c) - e\,M''(0.c)$$

$$R''(1.s) = M''(1.s) - \tfrac{e}{2} M''(2.s)$$

und für grössere Werthe von i wieder allgemein

$$R''(i) = M''(i) - \tfrac{e}{2} M''(i+1) - \tfrac{e}{2} M''(i-1)$$

dann sind diese R Coefficienten die Coefficienten von $n\frac{d\delta z}{d\varepsilon}$, und für die Integration des Ausdrucks dieser Function ist zu berechnen,

$$R_1(i) = \tfrac{1}{i} R(i)\,;\; R_1'(i) = \tfrac{1}{i} R'(i)\,;\; R_1''(i) = \tfrac{1}{i} R''(i)$$

ausgenommen

$$R_1(0) = 0\,;\; R_1'(0) = 0\,;\; R_1''(0.c) = \tfrac{1}{2} R'(0.c)$$

ferner

$$R_{\prime\prime}'(i,c) = R_1'(i,c) + \tfrac{2}{i} R_1''(i,s)$$

$$R_{\prime\prime}'(i,s) = R_1'(i,s) - \tfrac{2}{i} R_1''(i,c)$$

$$R_{\prime\prime}(i,c) = R_1(i,c) + \tfrac{1}{i} R_{\prime\prime}'(i,s)$$

$$R_{\prime\prime}(i,s) = R_1(i,s) - \tfrac{1}{i} R_{\prime\prime}'(i,c)$$

ausgenommen

$$R_{\prime\prime}(0) = 0\,;\quad R_{\prime\prime}'(0.c) = R(0.c)$$

worauf

$$\begin{aligned} n\delta z = \quad & R_{\prime\prime}(1.c)\sin\varepsilon && - R_{\prime\prime}(1.s)\cos\varepsilon \\ & + R_{\prime\prime}(2.c)\sin 2\varepsilon && - R_{\prime\prime}(2.s)\cos 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} && - \text{etc.} \\ & + R_{\prime\prime}'(0.c)\,\varepsilon \\ & + R_{\prime\prime}'(1.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon && - R_{\prime\prime}'(1.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon \\ & + R_{\prime\prime}'(2.c)\,\varepsilon\sin 2\varepsilon && - R_{\prime\prime}'(2.s)\,\varepsilon\cos 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} && - \text{etc.} \\ & + R_1''(0.c)\,\varepsilon^2 \\ & + R_1''(1.c)\,\varepsilon^2\sin\varepsilon && - R_1''(1.s)\,\varepsilon^2\cos\varepsilon \\ & + R_1''(2.c)\,\varepsilon^2\sin 2\varepsilon && - R_1''(2.s)\,\varepsilon^2\cos 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} && - \text{etc.} \end{aligned}$$

wird. Die Grösse $R_1''(0.c)$ ist der Coefficient der Säcularänderung der mittleren Länge, da blos das Glied $R_1''(0.c)\,\varepsilon^2$ des vorstehenden Ausdrucks ein dem Quadrat der Zeit proportionales Glied geben kann. Substituiren wir im Ausdruck für diesen Coefficienten die im Vorhergehenden enthaltenen Ausdrücke für $M'(0.c)$ und $M'(1.c)$, so ergiebt sich

$$(27)\qquad \begin{cases} R_1''(0.c) = \tfrac{1}{2} G'(1.c) - \tfrac{e^2}{8} G'(1.c) - \tfrac{e}{8} G'(2.c) \\ \qquad\qquad - \tfrac{e^2}{8} H'(1.c) - \tfrac{e}{2} J''(1.s) + \tfrac{e^2}{4} J''(2.s) \end{cases}$$

wodurch der Coefficient der Säcularänderung der mittleren Länge auf die Coefficienten von $\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}$ und von $\left(\frac{dW^0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r} + r^2$ herbeigeführt ist. Das Hauptglied dieses Ausdrucks ist jedenfalls $\frac{1}{2} G'(1.c)$, und somit der Hälfte des Coefficienten von $\varepsilon\sin(\eta - \varepsilon)$ im Ausdrucke von $\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}$ gleich, wie schon am Ende des §. 7 (II) angeführt wurde.

73.

Für die Breitenstörungen, die von $i'=0$ abhängen, sei

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos i}\frac{d\delta_1 R_0}{d\varepsilon} = \quad & T(0.s) \\ & + U(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon) \quad - U(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon) \\ & + T(1.s)\cos\varepsilon \quad - T(1.c)\sin\varepsilon \\ & + U(2.s)\cos(-\eta+2\varepsilon) \quad - U(2.c)\sin(-\eta+2\varepsilon) \\ & + V(0.s)\cos\eta \quad - V(0.c)\sin\eta \\ & + \text{etc.} \quad - \text{etc.} \\ & + T'(0.s)\varepsilon \\ & + U'(1.s)\varepsilon\cos(-\eta+\varepsilon) \quad - U'(1.c)\varepsilon\cos(-\eta+\varepsilon) \\ & + T'(1.s)\varepsilon\cos\varepsilon \quad - T'(1.c)\varepsilon\sin\varepsilon \\ & + U'(2.s)\varepsilon\cos(-\eta+2\varepsilon) - U'(2.c)\varepsilon\sin(-\eta+2\varepsilon) \\ & + V'(0.s)\varepsilon\cos\eta \quad - V'(0.c)\varepsilon\sin\eta \\ & + \text{etc.} \quad - \text{etc.}\end{aligned}$$

Setzt man hier

$$T_1(i) = \tfrac{1}{i}T(i);\ U_1(i) = \tfrac{1}{i}U(i);\ V_1(i) = \tfrac{1}{i}V(i)$$
$$T_1'(i) = \tfrac{1}{i}T'(i);\ U_1'(i) = \tfrac{1}{i}U'(i);\ V_1'(i) = \tfrac{1}{i}V'(i)$$

ausgenommen

$$T_1(0) = 0,\ U_1(0) = 0,\ V_1(0) = 0;\ \text{etc.}$$

ferner

$$T_{''}(i,s) = T_1(i,s) - \tfrac{1}{i}T_1'(i,c)$$
$$U_{''}(i,s) = U_1(i,s) - \tfrac{1}{i}U_1'(i,c)$$
$$V_{''}(i,s) = V_1(i,s) - \tfrac{1}{i}V_1'(i,c)$$
$$T_{''}(i,c) = T_1(i,c) + \tfrac{1}{i}T_1'(i,s)$$
$$U_{''}(i,c) = U_1(i,c) + \tfrac{1}{i}U_1'(i,s)$$
$$V_{''}(i,c) = V_1(i,c) + \tfrac{1}{i}V_1'(i,s)$$

ausgenommen

$$T_{''}(0) = U_{''}(0) = 0$$

so wird

$$\frac{\delta_1 R_0}{\cos i} =$$

$$\begin{aligned}
&+ U_n(1.s)\sin(-\eta+\varepsilon) && + U_n(1.c)\cos(-\eta+\varepsilon)\\
&+ T_n(1.s)\sin\varepsilon && + T_n(1.c)\cos\varepsilon\\
&+ U_n(1.s)\sin(-\eta+2\varepsilon) && + U_n(1.c)\cos(-\eta+2\varepsilon)\\
&+ T_n(2.s)\sin 2\varepsilon && + T_n(2.c)\cos 2\varepsilon\\
&+ U_n(3.s)\sin(-\eta+3\varepsilon) && + U_n(3.c)\cos(-\eta+3\varepsilon)\\
&+ V_n(1.s)\sin(\eta+\varepsilon) && + V_n(1.c)\cos(\eta+\varepsilon)\\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}\\
& && + T(0.s)\,\varepsilon\\
&+ U_1'(1.s)\varepsilon\sin(-\eta+\varepsilon) && + U_1'(1.c)\varepsilon\cos(-\eta+\varepsilon)\\
&+ T_1'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon && + T_1'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon\\
&+ U_1'(2.s)\varepsilon\sin(-\eta+2\varepsilon) && + U_1'(2.c)\varepsilon\cos(-\eta+2\varepsilon)\\
&- V(0.c)\varepsilon\sin\eta && + V(0.s)\varepsilon\cos\eta\\
&+ T_1'(2.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon && + T_1'(2.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon\\
&+ U_1'(3.s)\varepsilon\sin(-\eta+3\varepsilon) && + U_1'(3.c)\varepsilon\cos(-\eta+3\varepsilon)\\
&+ V_1'(1.s)\varepsilon\sin(\eta+\varepsilon) && + V_1'(1.c)\varepsilon\cos(\eta+\varepsilon)\\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}\\
& && + \tfrac{1}{2}T'(0.s)\,\varepsilon^2\\
&- \tfrac{1}{2}V'(0.c)\,\varepsilon^2\sin\eta && + \tfrac{1}{2}V'(0.s)\,\varepsilon^2\cos\eta
\end{aligned}$$

welcher dem Ausdruck des Art. 67 für δW_0 völlig ähnlich ist. Setzt man ferner

$$\frac{1}{\cos i}\left(\frac{dR_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r} =$$

$$\begin{aligned}
& && Y(0.c)\\
&+ Y(1.s)\sin\varepsilon && + Y(1.c)\cos\varepsilon\\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}\\
& && + Y'(0.c)\,\varepsilon\\
&+ Y'(1.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon && + Y'(1.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon\\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}\\
& && + Y''(0.c)\,\varepsilon^2\\
&+ Y''(1.s)\,\varepsilon^2\sin\varepsilon && + Y''(1.c)\,\varepsilon^2\cos\varepsilon\\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
W(0.c) &= U_n(1.c) + Y(0.c)\\
W(1.s) &= T_n(1.s) + U_n(2.s) + Y(1.s)\\
W(1.c) &= T_n(1.c) + U_n(2.c) + Y(1.c)
\end{aligned}$$

und für grössere Werthe von i

$$W(i) = T_n(i) + U_n(i+1) + V_n(i-1) + Y(i)$$

ferner

$$W'(0.c) = T(0.s) + U_1'(1.c) + Y'(0.c)$$

und für grössere Werthe von i

$$W'(i) = T_1'(i) + U_1'(i+1) + V_1'(i-1) + Y'(i)$$

ferner

$$\begin{aligned}
W''(0.c) &= \tfrac{1}{2}T'(0.s) + Y''(0.c)\\
W''(1.c) &= \tfrac{1}{2}V'(0.s) + Y''(1.c)\\
W''(2.c) &= Y''(2.c)\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}\\
W''(1.s) &= -\tfrac{1}{2}V'(0.c) + Y''(1.s)\\
W''(2.s) &= Y''(2.s)\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

so bekommt man

$$\begin{aligned}
\tfrac{\delta_1 u}{\cos i} = \quad & W(0.c)\\
& + W(1.s)\sin\varepsilon && + W(1.c)\cos\varepsilon\\
& + W(2.s)\sin 2\varepsilon && + W(2.c)\cos 2\varepsilon\\
& + \text{etc.} && + \text{etc.}\\
& && + W'(0.c)\,\varepsilon\\
& + W'(1.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon && + W'(1.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon\\
& + W'(2.s)\,\varepsilon\sin 2\varepsilon && + W'(2.c)\,\varepsilon\cos 2\varepsilon\\
& + \text{etc.} && + \text{etc.}\\
& && + W''(0.c)\,\varepsilon^2\\
& + W''(1.s)\,\varepsilon^2\sin\varepsilon && + W''(1.c)\,\varepsilon^2\cos\varepsilon\\
& + W''(2.s)\,\varepsilon^2\sin 2\varepsilon && + W''(2.c)\,\varepsilon^2\cos 2\varepsilon\\
& + \text{etc.} && + \text{etc.}
\end{aligned}$$

womit der Hauptheil der Breitenstörungen erlangt ist.

74.

Es ist noch übrig, in den bisher entwickelten Ausdrücken von $\frac{d\delta z}{dt}$, $n\delta z$, δv und $\delta_1 u$ den Bogen ε ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen durch nt zu eliminiren, wozu die schon in der ersten Annäherung angewandte Gleichung

$$\varepsilon = nt + \varepsilon\sin\varepsilon$$

dienen muss. Für die meisten Argumente ist indess das zweite Glied dieser Gleichung ohne merkliche Wirkung, und man darf ohne Weiteres nt für ε setzen, allein es kommen einige wenige Glieder vor, in welchen dieses Glied für nicht ganz unmerklich gehalten werden kann, und ich werde die verwandelten Formen daher vollständig hieher setzen. Nehmen wir zuerst den Fall $i' = 0$ aus, so findet man leicht

$$\frac{d\delta z}{dt} = \Sigma\Big\{M(i,i',c) - \tfrac{c}{2}M'(i-1,i',s) + \tfrac{c}{2}M'(i+1,i',s)\Big\}\cos(i,i') + \Sigma\Big\{M(i,i',c) + \tfrac{c}{2}M'(i-1,i'c) - \tfrac{c}{2}M'(i+1,i',c)\Big\}\sin(i,i')$$
$$+nt\,\Sigma M'(i,i',c)\cos(i,i') \qquad +nt\,\Sigma M'(i,i',s)\sin(i,i')$$

$$2\delta\nu = \Sigma\Big\{S_{\prime\prime}(i,i',c) - \tfrac{c}{2}S_{\prime}'(i-1,i',s) + \tfrac{c}{2}S_{\prime}'(i+1,i',s)\Big\}\cos(i,i') + \Sigma\Big\{S_{\prime\prime}(i,i',s) + \tfrac{c}{2}S_{\prime}'(i-1,i'c) - \tfrac{c}{2}S_{\prime}'(i+1,i',c)\Big\}\sin(i,i')$$
$$+nt\,\Sigma S_{\prime}'(i,i',c)\cos(i,i') \qquad +nt\,\Sigma S_{\prime}'(i,i',s)\sin(i,i')$$

$$n\delta z = \Sigma\Big\{R_{\prime\prime}(i,i',c) - \tfrac{c}{2}R_{\prime}'(i-1,i',s) + \tfrac{c}{2}R_{\prime}'(i+1,i',s)\Big\}\sin(i,i') - \Sigma\Big\{R_{\prime\prime}(i,i',s) + \tfrac{c}{2}R_{\prime}'(i-1,i',c) - \tfrac{c}{2}R_{\prime}'(i+1,i',c)\Big\}\cos(i,i')$$
$$+nt\,\Sigma R_{\prime}'(i,i',c)\sin(i,i') \qquad -nt\,\Sigma R_{\prime}'(i,i',s)\cos(i,i')$$

$$\frac{\delta_1 u}{\cos i} = \Sigma\Big\{W(i,i',s) + \tfrac{c}{2}W(i-1,i',c) - \tfrac{c}{2}W'(i+1,i',c)\Big\}\sin(i,i') + \Sigma\Big\{W(i,i',s) - \tfrac{c}{2}W'(i+1,i',c) + \tfrac{c}{2}W'(i+1,i',c)\Big\}\cos(i,i')$$
$$+nt\,\Sigma W'(i,i',s)\sin(i,i') \qquad +nt\,\Sigma W'(i,i',c)\cos(i,i')$$

Gehen wir hierauf zu den zu $i'=0$ gehörigen Gliedern über, so müssen wir der Vollständigkeit wegen auch die Gleichung

$$\varepsilon^2 = n^2t^2 + 2ent\sin\varepsilon + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\cos 2\varepsilon$$

berücksichtigen, obgleich man auch hier häufig mit der Substitution des ersten Gliedes ausreicht. Es wird hiemit

$$\frac{d\delta z}{dt} = \Big\{M(0.c) + \tfrac{e}{2}M'(1.s) + \tfrac{e^2}{2}M''(0.c) - \tfrac{e^2}{4}M''(2.c)\Big\}$$
$$+\Big\{M(1.c) + \tfrac{e}{2}M'(2.s) + \tfrac{e^2}{4}M''(1.c) - \tfrac{e^2}{4}M''(3.c)\Big\}\cos\varepsilon$$
$$+\Big\{M(1.s) + eM'(0.c) - \tfrac{e}{2}M'(2.c) + \tfrac{3e^2}{4}M''(1.s) + \tfrac{e^2}{4}M''(3.s)\Big\}\sin\varepsilon$$
$$+\Big\{M(2.c) - \tfrac{e}{2}M'(1.s) + \tfrac{e}{2}M'(3.s) - \tfrac{e^2}{2}M''(0.c) + \tfrac{e^2}{2}M''(2.c) - \tfrac{e^2}{4}M''(4.c)\Big\}\cos 2\varepsilon$$
$$+\Big\{M(2.s) + \tfrac{e}{2}M'(1.c) - \tfrac{e}{2}M'(3.c) + \tfrac{e^2}{2}M''(2.s) - \tfrac{e^2}{4}M''(4.s)\Big\}\sin 2\varepsilon$$
$$+\text{etc.} \qquad +\text{etc.}$$
$$+\{M'(0.c) + eM''(1.s)\}nt$$
$$+\{M'(1.c) + eM''(2.s)\}nt\cos\varepsilon + \{M'(1.s) + 2eM''(0.c) - eM''(2.c)\}nt\sin\varepsilon$$
$$+\{M'(2.c) - eM''(1.s) + eM''(3.s)\}nt\cos 2\varepsilon + \{M'(2.s) + eM''(1.c) - eM''(3.c)\}nt\sin 2\varepsilon$$
$$+\text{etc.} \qquad +\text{etc.}$$
$$+M''(0.c)n^2t^2$$
$$+M''(1.c)n^2t^2\cos\varepsilon + M''(1.s)n^2t^2\sin\varepsilon$$
$$+\text{etc.} \qquad +\text{etc.}$$

$$2\delta\nu = \Big\{S_{\prime\prime}(1.c) + \tfrac{e}{2}S_{\prime\prime}(2.s) + \tfrac{e^2}{4}S_1''(1.c) - \tfrac{e^2}{4}S_1''(3.c)\Big\}\cos\varepsilon$$
$$+\Big\{S_{\prime\prime}(1.s) + eS_{\prime\prime}(0.c) - \tfrac{e}{2}S_{\prime\prime}(2.c) + \tfrac{3e^2}{4}S_1''(1.s) - \tfrac{e^2}{4}S_1''(3.s)\Big\}\sin\varepsilon$$
$$+\Big\{S_{\prime\prime}(2.c) - \tfrac{e}{2}S_1''(1.s) + \tfrac{e}{2}S_{\prime\prime}(3.s) + \tfrac{e^2}{2}S_1''(0.c) + \tfrac{e^2}{2}S_1''(2.c) - \tfrac{e^2}{4}S_1''(4.c)\Big\}\cos 2\varepsilon$$
$$+\Big\{S_{\prime\prime}(1.c) + \tfrac{e}{2}S_{\prime\prime}(1.c) - \tfrac{e}{2}S_{\prime\prime}(3.c) + \tfrac{e^2}{2}S_1''(2.s) - \tfrac{e^2}{4}S_1''(4.s)\Big\}\sin 2\varepsilon$$
$$+\text{etc.} \qquad +\text{etc.}$$

$$
\begin{aligned}
&+\{S'_n(0.s)+eS''_1(1.s)\}nt\\
&+\{S'_n(1.c)+eS''_1(2.s)\}nt\cos\varepsilon+\{S'_n(1.s)+2eS''_1(0.c)-eS''_1(2.c)\}nt\sin\varepsilon\\
&+\{S'_n(2.c)-eS''_1(1.s)+eS''_1(3.s)\}nt\cos 2\varepsilon+\{S'_n(2.s)+eS''_1(1.c)+eS''_1(3.c)\}nt\sin 2\varepsilon\\
&+\text{etc.}\qquad\qquad+\text{etc.}\\
&+S''_1(0.s)\,n^2t^2\\
&+S''_1(1.c)\,n^2t^2\cos\varepsilon+S''_1(1.s)\,n^2t^2\sin\varepsilon\\
&+\text{etc.}\qquad+\text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n\delta z=&\left\{R_n(1.c)+eR'_n(0.c)+\frac{e}{2}R'_n(2.s)+\frac{3e^2}{4}R''_1(1.c)-\frac{e^2}{4}R''_1(2.c)\right\}\sin\varepsilon\\
&-\left\{R_n(1.s)-\frac{e}{2}R'_n(2.c)+\frac{e^2}{4}R''_1(1.s)-\frac{e^2}{4}R''_1(3.s)\right\}\cos\varepsilon\\
&+\left\{R_n(2.c)-\frac{e}{2}R'_n(1.s)+\frac{e}{2}R'_n(3.s)+\frac{e^2}{2}R''_1(2.c)-\frac{e^2}{4}R''_1(4.c)\right\}\sin 2\varepsilon\\
&-\left\{R_n(2.s)+\frac{e}{2}R'_1(1.c)-\frac{e}{2}R'_n(3.c)+\frac{e^2}{2}R''_1(0.c)+\frac{e^2}{2}R''_1(2.s)-\frac{e^2}{4}R''_1(4.s)\right\}\cos 2\varepsilon\\
&+\text{etc.}\qquad\qquad+\text{etc.}\\
&\quad+\{R'_n(0.c)+eR''_1(1.c)\}nt\\
&\quad+\{R'_n(1.c)+2eR''_1(0.c)+eR''_1(2.s)\}nt\sin\varepsilon-\{R'_n(1.s)-eR''_1(2.c)\}nt\cos\varepsilon\\
&\quad+\{R'_n(2.c)-eR''_1(1.s)+eR''_1(3.s)\}nt\sin 2\varepsilon-\{R'_n(2.s)+eR''_1(1.c)-eR''_1(3.c)\}nt\cos 2\varepsilon\\
&\quad+\text{etc.}\qquad\qquad+\text{etc.}\\
&\quad+R''_1(0.e)\,n^2t^2\\
&\quad+R''_1(1.c)\,n^2t^2\sin\varepsilon\qquad\qquad-R''_1(1.s)\,n^2t^2\cos\varepsilon\\
&\quad+\text{etc.}\qquad\qquad-\text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta_1 u}{\cos i}=&\left\{W(0.c)+\frac{e}{2}W'(1.s)+\frac{e^2}{2}W''(0.c)-\frac{e^2}{4}W''(2.c)\right\}\\
&+\left\{W(1.s)+eW'(0.c)-\frac{e}{2}W'(2.c)+\frac{3e^2}{4}W''(1.s)-\frac{e^2}{4}W''(3.s)\right\}\sin\varepsilon\\
&+\left\{W(1.c)+\frac{e}{2}W'(2.s)+\frac{e^2}{4}W''(1.c)-\frac{e^2}{4}W''(3.c)\right\}\cos\varepsilon\\
&+\left\{W(2.s)+\frac{e}{2}W'(1.c)-\frac{e}{2}W'(3.c)+\frac{e^2}{2}W''(2.s)-\frac{e^2}{4}W''(4.s)\right\}\sin 2\varepsilon\\
&+\left\{W(2.c)-\frac{e}{2}W'(1.s)+\frac{e}{2}W'(3.s)-\frac{e^2}{2}W''(0.c)+\frac{e^2}{2}W''(2.c)-\frac{e^2}{4}W''(4.c)\right\}\cos 2\varepsilon\\
&+\text{etc.}\qquad\qquad+\text{etc.}\\
&\quad+\{W'(0.c)+eW''(1.s)\}nt\\
&+\{W'(1.s)+2eW''(0.c)-eW''(2.c)\}nt\sin\varepsilon\quad+\{W'(1.c)+eW''(2.s)\}nt\cos\varepsilon\\
&+\{W'(2.s)+eW''(1.c)-eW''(3.c)\}nt\sin 2\varepsilon+\{W'(2.c)-eW''(1.s)+eW''(3.s)\}nt\cos 2\varepsilon\\
&+\text{etc.}\qquad\qquad+\text{etc.}\\
&\qquad\qquad+W''(0.c)\,n^2t^2\\
&+W''(1.s)\,n^2t^2\sin\varepsilon\qquad\qquad+W''(1.c)\,n^2t^2\cos\varepsilon\\
&+\text{etc.}\qquad\qquad+\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Ich bemerke, dass in diesen Ausdrücken von $2\delta\nu$ und $n\delta z$ die constanten Glieder weggeworfen werden mussten, weil die Gleichungen des §. 5 (II) für die Bestimmung der Constanten C und c auf diese Voraussetzung gegründet sind.

75.

Wenden wir uns jetzt zu dem zweiten Theil der Breitenstörungen und suchen, da im §. 8 (II) gezeigt worden ist, dass er sehr unbedeutend ausfällt, blos die Glieder, welche mit t^2 multiplicirt sind, da diese im Verlaufe der Zeit am schnellsten anwachsen können. Den im §. 8 (II) entwickelten Ausdruck für $\delta_2 u$, in welchem wir hier die Function Γ weglassen können, da diese vermöge des im Art. 33 bewiesenen Satzes keine mit t^2 multiplicirten Glieder enthält, kann man leicht auf folgende Form bringen,

$$\delta_2 u = -\left\{\frac{u^2}{2\cos^2 i}\frac{\sin f}{\cos^2\varphi} + \frac{uu_1}{2\cos^2 i}\frac{\cos f}{\cos\varphi}\right\}\sin i\cos(\pi-\theta)$$
$$-\left\{\frac{u^2}{2\cos^2 i}\frac{\cos f+e}{\cos^2\varphi} - \frac{uu_1}{2\cos^2 i}\frac{\sin f}{\cos\varphi}\right\}\sin i\sin(\pi-\theta)$$

Führen wir hier die excentrische Anomalie an, so wird

$$d_2 u = -\left\{\frac{u^2}{2\cos^2 i}\frac{a\sin\varepsilon}{r} + \frac{uu_1}{2\cos^2 i}\frac{a(\cos\varepsilon-e)}{r}\right\}\sec\varphi\sin i\cos(\pi-\theta)$$
$$-\left\{\frac{u^2}{2\cos^2 i}\frac{a\cos\varepsilon}{r} - \frac{uu_1}{2\cos^2 i}\frac{a\sin\varepsilon}{r}\right\}\sin i\sin(\pi-\theta)$$

In der ersten Annäherung wurde gefunden, dass mit bloser Rücksicht auf die mit t multiplicirten Glieder

$$\frac{u}{\cos i} = -eV_0(0.s)\,nt - V_0(0.c)\,nt\sin\varepsilon + V_0(0.s)\,nt\cos\varepsilon$$
$$\frac{u_1}{\cos i} = -V_0(0.c)\,nt\cos\varepsilon - V_0(0.s)\,nt\sin\varepsilon$$

ist, wo ich den Coefficienten die Null angehängt habe, um anzudeuten, dass sie der ersten Annäherung angehören, und nicht die der zweiten Annäherung sind, die im Vorhergehenden auch mit $V(0.s)$ und $V(0.c)$ bezeichnet wurden. Aus diesen Ausdrücken ergiebt sich leicht

$$\frac{u}{\cos i}\frac{a\sin\varepsilon}{r} + \frac{u_1}{\cos i}\frac{a(\cos\varepsilon-e)}{r} = -V_0(0.c)\,nt$$
$$\frac{u}{\cos i}\frac{a\cos\varepsilon}{r} - \frac{u_1}{\cos i}\frac{a\sin\varepsilon}{r} = V_0(0.s)\,nt$$

und hiemit wird der obige Ausdruck

$$\delta_2 u = -\Big\{\tfrac{e}{2} V_0(0.c).V_0(0.s) + \tfrac{1}{2}(V_0(0.c))^2 \sin\varepsilon$$
$$- \tfrac{1}{2} V_0(0.c).V_0(0.s)\cos\varepsilon\Big\} n^2 t^2 \sec\varphi \sin i \cos(\pi - \theta)$$
$$+\Big\{\tfrac{e}{2}(V_0(0.s))^2 + \tfrac{1}{2} V_0(0.c).V_0(0.s)\sin\varepsilon$$
$$- \tfrac{1}{2}(V_0(0.s))^2\cos\varepsilon\Big\} n^2 t^2 \sin i \sin(\pi - \theta)$$

in welchem Ausdruck alle Glieder dieser Gattung vollständig enthalten sind.

76.

Die willkührlichen Constanten, die den im Vorhergehenden ermittelten Integralen hinzugefügt werden müssen, haben dieselbe Form wie die in der ersten Annäherung hinzugefügten, und werden, wie schon im §. 5 (II) erklärt ist, durch dieselben Gleichungen wie jene bestimmt. Aber sie nehmen andere Werthe wie jene an, und dienen überhaupt um die Werthe, die in der ersten Annäherung gefunden worden sind, zu berichtigen und zu ergänzen, gleichwie mit allen Coefficienten der zweiten Annäherung der Fall ist. Da keine Verwechselung entstehen kann, so will ich diese Constanten hier mit denselben Buchstaben bezeichnen wie dort, und es ist also den obigen Integralen noch hinzuzufügen

$$\frac{d\delta z}{dt} = k + k_1 \cos\varepsilon + k_2 \sin\varepsilon$$
$$n\delta z = c + \Big(k - \tfrac{e}{2} k_1\Big) nt + \Big(1 - \tfrac{e^2}{2}\Big) k_1 \sin\varepsilon - k_2 \cos\varepsilon$$
$$- \tfrac{e}{4} k_1 \sin 2\varepsilon + \tfrac{e}{4} k_2 \cos 2\varepsilon$$
$$2\delta\nu = 2C - k_1 \cos\varepsilon - k_2 \sin\varepsilon$$
$$\frac{u}{\cos i} = -el_1 + l\sin\varepsilon + l_1 \cos\varepsilon$$

Es wird jetzt das ganze der Zeit proportionale Glied in $n\delta z$

$$= \Big\{R_{\prime\prime}'(0.c) + eR_1''(1.c) + k - \tfrac{e}{2} k_1\Big\} nt$$

und der Coefficient von t in diesem Gliede enthält die Grössen zweiter Ordnung des Unterschiedes zwischen dem wahren und dem osculirenden Werth der mittleren Bewegung während der Zeiteinheit.

Die bei der Entwickelung der Bedingungsgleichung im §. 3, und bei der Anwendung derselben im Art. 71 weggelassene Gleichung zwischen den constanten Gliedern dient um die von dem Quadrat der störenden Kräfte abhängigen Glieder der Constante C zu bestimmen. In Bezug auf diese Glieder ist die im Art. 51 (II) eingeführte und mit Z_1

bezeichnete Grösse dem constanten Gliede des Ausdrucks für $\frac{d\delta z}{dt}$ des Art. 74 gleich, und es wird also mit Weglassung der kleinen, aus den mit ε^2 multiplicirten Gliedern entstehenden, Glieder, die nie merklich werden können,

$$Z_1 = M(0.c) + \tfrac{e}{2} M'(1.s) \tag{28}$$

und die dort V_1 genannte Grösse ist hier, wo die Cuben und höheren Potenzen der störenden Kräfte nicht berücksichtigt worden,

$$\begin{aligned} V_1 = 3 &\left\{ \Upsilon(0.c) + \tfrac{e}{2}\Upsilon'(1.s) \right\} \\ &+ \left\{ \Psi(0.c) + \tfrac{e}{2}\Psi'(1.s) \right\} \end{aligned} \tag{29}$$

wo wie oben die Υ und Ψ Coefficienten die der Entwickelung von ν^2 und $2\nu\delta\frac{h}{h_0}$ sind, deren numerische Werthe für unser Beispiel sich schon im vor. § befinden. Die Grösse H_1, die auch a. a. O. eingeführt wurde, ist im Vorhergehenden nicht enthalten, setzen wir aber für den Ausdruck von $\delta\frac{h_0}{h}$, so wie ihn die erste Annäherung mit Weglassung der dem Integral hinzugefügten Constante gegeben hat,

$$\delta\tfrac{h_0}{h} = \Sigma\Pi_0(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma\Pi_0(i,i',s)\sin(i,i')$$

so wird

$$H_1 = K^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma\left\{(\Pi_0(i,i',c))^2 + (\Pi_0(i,i',s))^2\right\} \tag{30}$$

und hiemit sowie mit Zuziehung der für die zweite Annäherung zu bestimmenden Werthe von k und k_1 wird zufolge (39) (II)

$$C = -\tfrac{1}{6}(4k + ek_1 + Z_1) + \tfrac{1}{6}(3V_1 + 2H_1)$$

Bei der Bestimmung der numerischen Werthe von c, k, k_1, k_2 durch die Gleichungen (41) und (42) (II) muss der numerische Werth von

$$\tfrac{1}{6}(3V_1 + 2H_1)$$

der dort $(\nu)_0$ genannten Grösse hinzugefügt, und der oben gegebene Werth von Z_1 statt Z substituirt werden.

77.

Indem wir nun zur Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke auf unser Beispiel übergehen, müssen wir zuerst vermittelst der in den Artt. 62 und 67 entwickelten Formeln das im Art. 55 gegebene Differential von δW_0 integriren. Es ergiebt sich mit wenig Mühe

δW_0					
$i,\ i'$	cos	sin	$i,\ i'$	cos	sin
−1,1,0	−0″.02968	+0″.03579	1,−3	+5″.1791	−3″.4899
0,1,0	+0.631	+0.437		+0.1256	−0.1071
−1,2,0	−0.141	−0.096		−0.1900	+0.1375
2,0	+0.011	−0.172	2,−3	+0.819	−0.037
	−0.003	+0.049		−0.167	+0.006
	−0.014	+0.250		+14.918	−0.521
3,0	−0.006	−0.029	3,−3	−0.018	−0.016
	+0.001	+0.008		−0.007	0.000
	+0.011	+0.037		+0.073	+0.061
−2,−1	+0.047	+0.003	4,−3	+0.002	+0.023
	−0.063	−0.008		+0.001	+0.003
	−0.014	+0.001		−0.003	−0.061
−1,−1	+0.299	−0.088	5,−3	+0.019	−0.020
	−0.662	+0.182		−0.006	+0.007
	−0.075	+0.023		−0.022	+0.021
0,−1	−1.368	−0.871	1,−4	+0.117	+0.003
	−0.504	−0.298		+0.063	+0.020
	+0.128	+0.086		−0.016	+0.014
1,−1	+0.028	+0.178	2,−4	+0.351	+0.210
	+0.008	−0.034		−0.077	−0.041
	+0.014	+0.313		+0.460	+0.297
2,−1	+0.136	−0.342	3,−4	−0.123	−0.246
	−0.033	+0.088		+0.030	+0.053
	−0.312	+0.707		+0.282	+0.620
3,−1	−0.093	+0.014	4,−4	+0.017	−0.036
	+0.027	−0.004		−0.004	+0.011
	+0.117	−0.022		−0.024	+0.050
−1,−2	+0.002	−0.049	5,−4	−0.036	+0.018
	−0.009	+0.122		+0.015	−0.007
	+0.001	+0.009		+0.030	−0.020
0,−2	−0.043	+0.118	6,−4	−0.004	−0.001
	−0.104	+0.155		+0.002	0.000
	−0.009	−0.044		+0.003	+0.001
1,−2	−0.653	+2.640	1,−5	+0.008	+0.001
	+0.077	−0.247		+0.016	+0.012
	−0.184	+0.773		−0.002	+0.009
2,−2	+0.094	−0.059	2,−5	+0.132	+0.070
	−0.018	+0.009		−0.010	−0.006
	−0.389	+0.211		+0.053	+0.026
3,−2	−0.077	−0.008	3,−5	−0.013	+0.168
	−0.001	+0.001		+0.008	−0.055
	+0.212	+0.028		−0.066	−0.112
4,−2	+0.027	+0.052	4,−5	−0.032	+0.055
	−0.008	−0.022		−0.006	−0.005
	−0.031	−0.050		+0.118	−0.126
0,−3	−0.067	+0.025	5,−5	−0.021	+0.001
	+1.302	−0.333		+0.005	0.000
	+0.007	−0.006		+0.027	−0.003

6, −5	+0″.021	+0″.016	4, −6	+0″.141	−0″.029
	−0.008	−0.007		−0.045	+0.006
	−0.023	−0.016		−0.141	+0.035
1, −6	0.000	0.000	5, −6	+0.016	−0.011
	−0.020	+0.002		+0.002	+0.006
	0.000	0.000		−0.037	−0.004
2, −6	−0.0572	−0.0572	6, −6	+0.004	+0.014
	−0.0059	+0.0011		−0.001	−0.004
	+0.0130	+0.0038		−0.006	−0.018
3, −6	−0.029	+0.044			
	+0.010	−0.015			
	−0.056	+0.017			

	ε cos	ε sin		ε cos	ε sin
0,0,0	−1249		1, −2	+581	+419
−1,1,0	−3.47	+4.81		−48	−34
0,1,0	−3	+46		+158	+108
−1,2,0	+2.7	−3	2, −2	+73	+93
1,0,0	−38614	+47589		−13	−16
2,0	+32	−83		−310	−405
	−3	+9	3, −2	−11	+4
	−73	+197		−1	−8
3,0	−5	+3		+36	+32
	+1	−1	0, −3	+1	+11
	+7	−5		+225	+258
−1, −1	+33	−29		−4	−16
	−270	+227	1, −3	−10.1	−2436.1
	+13	−10		+15.5	+10.9
0, −1	+26	−20		−20.6	+135.7
	−43	+28	2, −3	+69	−156
	−19	+13		−10	+27
1, −1	−25	+3		+1234	−2252
	+2	+1	3, −3	+40	−54
	−60	+34		−8	+11
2, −1	+42	−13		−81	+120
	−6	+1	4, −3	+9	+6
	−134	+52		−5	+1
0, −2	+39	+26		———	−19
	−224	−138			
	−54	−35			

	ε^2 cos	ε^2 sin
0,0,0	−0.47	
1,0,0	−42.67	−8.84

Hieraus, und durch die Formeln der Art. 62 und 68 wurden zuerst die P und Q Coefficienten gebildet, und dann durch Zuziehung der Tafeln des Art. 57 die M und N Coefficienten, aus welchen letzteren

durch die Formeln der Art. 63 und 69 die Störungen des Radius erhalten wurden. Zur Berechnung von $M'(0.c)$ und $M''(0.c)$ wurden die Ausdrücke (26) gebraucht. Hiemit ergab sich

	$\frac{d\delta z}{dt}$		$2\delta\nu$	
i, i'	cos	sin	cos	sin
0,0	−3″.0659			
1,0	+1.080	+1″.503	−0″.692	−1″.322
2,0	+0.776	+3.595	−0.310	−1.541
3,0	+0.006	+0.061	−0.014	−0.067
−2,−1	−0.048	+0.013	+0.048	−0.005
−1,−1	−1.238	+0.289	+1.052	−0.259
0,−1	−1.570	−0.868	+1.719	+0.925
1,−1	+0.321	+0.679	−0.445	−0.816
2,−1	−0.462	+1.052	+0.296	−0.708
3,−1	+0.093	0.000	−0.051	−0.003
−1,−2	−0.005	+0.146	+0.004	−0.075
0,−2	−0.139	−0.431	+0.101	+0.698
1,−2	−0.524	+2.235	+0.449	−2.203
2,−2	−1.324	+0.269	+0.840	−0.207
3,−2	−1.671	−0.139	+0.584	+0.045
4,−2	−0.049	−0.040	+0.039	+0.018
0,−3	+1.335	−2.496	−1.211	+2.223
1,−3	+2.9085	−1.8060	−2.928	+1.252
2,−3	+13.437	−0.091	−13.096	+0.156
3,−3	+3.291	+2.811	−1.294	−1.157
4,−3	+0.087	+0.240	−0.062	−0.100
5,−3	−0.013	+0.020	+0.004	−0.011
0,−4	+0.045	+0.007	−0.027	−0.009
1,−4	+0.075	+0.047	−0.033	−0.043
2,−4	+0.583	+0.375	−0.615	−0.405
3,−4	+0.474	+0.682	−0.299	−0.467
4,−4	+0.017	−0.039	−0.002	−0.002
5,−4	+0.071	−0.042	−0.023	+0.014
6,−4	+0.001	0.000	0.000	0.000
1,−5	+0.003	+0.061	+0.005	−0.058
2,−5	+0.154	−0.079	−0.198	+0.186
3,−5	−0.398	−0.240	+0.200	+0.403
4,−5	−1.043	+0.708	+0.373	−0 231
5,−5	−0.028	+0.009	+0.017	−0.011
6,−5	−0.023	−0.024	+0.008	+0.007
1,−6	−0.042	−0.011	+0.038	+0.004
2,−6	−0.0913	+0.0321	+0.134	−0.074
3,−6	−0.874	+1.071	+1.050	−1.190
4,−6	+1.276	+0.021	−0.438	−0.048
5,−6	+0.119	+0.084	−0.046	−0.031
6,−6	+0.001	+0.003	−0.002	+0.001

	ε cos	ε sin	ε cos	ε sin
0,0	−1645		+3565	
1,0	−38717	+47678	+38679	−47641
2,0	−1481	+1068	+612	−474
3,0	−17	+6	+21	−13
−1,−1	−228	+204	+218	−191
0,−1	−99	+70	+155	−112
1,−1	−98	+49	+108	−66
2,−1	−244	+46	+154	−34
0,−2	−368	−225	+436	+265
1,−1	+453	+311	−412	−270
2,−2	−352	−554	+299	+435
3,−2	−128	−432	+42	+157
0,−3	−288	+15	+244	−77
1,−3	+119.7	−1677.4	−350	+1904
2,−3	+989	−2721	−1015	+2805
3,−3	−406	+1164	+189	−488
4,−3	−56	+44	+21	−21

	ε^2 cos	ε^2 sin	ε^2 cos	ε^2 sin
0,0	−1.82		+4.47	
1,0	−42.84	−8.92	+42.86	+8.84
2,0	−1.84	−1.26	+0.74	+0.51
3,0	−0.03	−0.02	+0.03	+0.02

78.

Um die Bedingungsgleichung anzuwenden, wurde hierauf der im Art. 56 enthaltene Ausdruck des Differentials von $\delta \frac{h_0}{h}$ durch die Formeln der Artt. 64 und 71 integrirt, und darauf die Grösse $2\nu \frac{\Delta n}{n}$ durch den im Art. 35 angegebenen Werth von Δn für unser Beispiel und durch die im Art. 59 (II) enthaltenen Glieder von ν berechnet. Hiemit fand sich

	$\delta \frac{h_0}{h}$		$2\nu \frac{\Delta n}{n}$	
i, i'	cos	sin	cos	sin
1,0	−0″.213	−0″.159	+0″.086	+0″.071
2,0	+0.001	+0.059		
3,0	+0.002	+0.007		
−2,−1	−0.012	0.000		
−1,−1	−0.097	+0.027	+0.001	+0.001
0,−1	+0.445	+0.285		
1,−1	+0.017	−0.081	+0.003	−0.009
2,−1	−0.049	+0.121		
3,−1	+0.033	−0.007		

−1, −2	+0″.002	+0″.015		
0, −2	+0.020	−0.052	−0″.001	+0″.001
1, −2	+0.247	−0.888	−0.009	+0.008
2, −2	−0.035	+0.021	−0.024	+0.017
3, −2	+0.035	+0.004		
4, −2	−0.008	−0.015		
0, −3	+0.010	−0.005	+0.002	−0.001
1, −3	−2.166	+1.179	+0.010	−0.004
2, −3	−0.273	+0.025	+0.075	0.000
3, −3	+0.003	+0.005	+0.003	+0.002
4, −3	+0.001	−0.006		
5, −3	−0.006	+0.008		
1, −4	−0.056	−0.005		
2, −4	−0.130	−0.094	+0.002	+0.001
3, −4	+0.040	+0.082	+0.001	+0.002
4, −4	−0.008	+0.015		
5, −4	+0.012	−0.007		
6, −4	0.000	+0.001		
1, −5	−0.003	−0.003		
2, −5	−0.035	−0.035	+0.001	0.000
3, −5	−0.002	−0.055	0.000	+0.002
4, −5	+0.050	−0.046		
5, −5	+0.010	+0.002		
6, −5	−0.006	−0.006		
1, −6	0.000	0.000		
2, −6	+0.023	+0.018		
3, −6	+0.017	−0.015	0.000	−0.001
4, −6	−0.047	+0.008		
5, −6	−0.003	+0.004		
6, −6	−0.002	−0.006		

	ε cos	ε sin	ε cos	ε sin
0,0	+1492		0	
1,0	+5	−19	−9	+28
2,0	−10	+28		
3,0	+2	−1		
−1, −1	−12	+10		
0, −1	−6	+6		
1, −1	+11	−8		
2, −1	−16	+5		
0, −2	−14	−10		
1, −2	−178	−125		
2, −2	−22	−32		
3, −2	+4	——		
0, −3	+1	−9		
1, −3	−30	+866		
2, −3	−17	+48		
3, −3	−13	+18		
4, −3	−2	−3		

	ε^2 cos
0,0	+1.35

worauf die Glieder der Bedingungsgleichungen (24) und der des Art. 71 sich wie folgt ergaben

	$M_{(i,i')} + S_{(i,i')}$		$\Pi_{(i,i')} +$ etc.		Uebrigbleibende Fehler	
i,i'	cos	sin	cos	sin	cos	sin
1,0	+0″.388	+0″.181	+0″.367	+0″.187	+0″.021	−0″.006
2,0	+0.466	+2.054	+0.463	+2.050	+0.003	+0.004
3,0	−0.008	−0.006	−0.005	−0.008	−0.003	+0.002
−2,−1	0.000	+0.008	−0.001	+0.006	+0.001	+0.002
−1,−1	−0.186	+0.030	−0.189	+0.029	+0.003	+0.001
0,−1	+0.119	+0.057	+0.130	+0.082	+0.019	−0.025
1,−1	−0.124	−0.137	−0.126	−0.136	+0.002	−0 001
2,−1	−0.166	+0.344	−0.179	+0.349	+0.013	−0.005
3,−1	+0.042	−0.003	+0.039	−0.004	+0.003	+0.001
−1,−2	−0.001	+0.071	+0.002	+0.071	−0.003	0.000
0,−2	−0.038	+0.267	−0.047	+0.280	+0.009	−0.013
1,−2	−0.075	+0.032	−0.051	+0.038	−0.024	−0.006
2,−2	−0.484	+0.062	−0.477	+0.070	−0.007	−0.008
3,−2	−1.087	−0.094	−1.078	−0.093	−0.009	−0.001
4,−2	−0.010	−0.022	−0.008	−0.015	−0.002	−0.007
0,−3	+0.124	−0.273	+0.115	−0.268	+0.009	−0.005
1,−3	−0.019	−0.554	−0.014	−0.559	−0.005	+0.005
2,−3	+0.341	+0.065	+0.349	+0.069	−0.008	−0.004
3,−3	+1.997	+1.654	+1.989	+1.649	+0.008	+0.005
4,−3	+0.025	+0.140	+0.024	+0.137	+0.001	+0.003
5,−3	−0.009	+0.009	−0.006	+0.008	−0.003	+0.001
0,−4	+0.018	−0.002	+0.006	−0.006	+0.012	+0.004
1,−4	+0.042	+0.004	+0.022	−0.016	+0.020	+0.020
2,−4	−0.032	−0.030	−0.022	−0.042	−0.010	+0.012
3,−4	+0.175	+0.215	+0.166	+0.205	+0.009	+0.010
4,−4	+0.015	−0.041	+0.015	−0.034	0.000	−0.007
5,−4	+0.048	−0.028	+0.046	−0.028	+0.002	0.000
6,−4	+0.001	0.000	0.000	+0.001	+0.001	−0.001
1,−5	+0.008	+0.003	+0.007	−0.003	+0.001	+0.006
2,−5	−0.044	+0.107	−0.041	+0.087	−0.003	+0.020
3,−5	−0.198	+0.163	−0.200	+0.173	+0.002	−0.010
4,−5	−0.670	+0.477	−0.624	+0.446	−0.046	−0.031
5,−5	−0.011	−0.002	−0.006	+0.001	−0.005	−0.003
6,−5	−0.015	−0.017	−0.016	−0.015	+0.001	−0.002
1,−6	−0.004	−0.007	−0.003	−0.003	−0.001	−0.004
2,−6	+0.043	−0.042	+0.040	−0.043	+0.003	+0.001
3,−6	+0.176	−0.119	+0.186	−0.107	−0.010	−0.012
4,−6	+0.838	−0.027	+0.842	−0.019	−0.004	−0.008
5,−6	+0.073	+0.053	+0.072	+0.055	+0.001	−0.002
6,−6	−0.001	+0.004	−0.002	−0.006	+0.001	+0 010

	ε cos	ε sin	ε cos	ε sin	ε cos	ε sin
0,0	+1920		+1880		+40	
1,0	−38	−37	−43	+35	+5	+2
2,0	−869	+594	−871	+595	+2	−1
3,0	+4	−7	+2	−4	+2	−3

−1, −1	−10	+13	−11	+14	+1	−1
0, −1	+56	−42	+51	−40	+5	−2
1, −1	+10	−17	+10	−14	0	−3
2, −1	−90	+12	−97	+8	+7	+4
0, −2	+68	+40	+68	+42	0	−2
1, −2	+41	+41	+45	+38	−4	+3
2, −2	−53	−119	−51	−124	−2	+5
3, −2	−86	−275	−86	−275	0	0
0, −3	−44	−62	−48	−62	+4	0
1, −3	−230	+227	−234	+229	+4	−2
2, −3	−26	+84	−18	+84	−8	0
3, −3	−217	+676	−217	+677	0	−1
4, −3	−35	+23	−32	+20	−3	+3

	ε^2 cos	ε^2 sin	ε^2 cos	ε^2 sin	ε^2 cos	ε^2 sin
0,0	+2.65		+2.67		−0.02	
1,0	+0.02	−0.08	+0.02	−0.08	0.00	0.00
2,0	−1.10	−0.75	−1.11	−0.75	+0.01	0.00
3,0	0.00	0.00	0	0	0.00	0.00

Diese Uebereinstimmung ist befriedigend, und man sieht daraus, wie genau man die Störungen zweiter Ordnung durch diese Methode berechnen kann, obgleich man genöthigt ist, viele der Coefficienten aus einer ziemlich grossen Anzahl von Gliedern zusammen zu setzen.

79.

Es muss noch gezeigt werden, wie weit die aus dem fünften Satze des §. 7 (II) entspringenden Bedingungsgleichungen, die hier durch die Gleichungen (25) ausgedrückt worden sind, in unserem Beispiel durch die numerische Rechnung erfüllt worden sind. Wenn wir blos die Theile von $F(0.s)$ und $H(0.s)$, die hier in Betracht kommen, aufnehmen, so ist aus der Tafel für das Differential von δW_0 des Art. 55

$$F(0.s) = +0''.00010; \quad H(0.s) = -0''.08982$$
$$F'(0.s) = -0''.0000093; \quad H'(0.s) = -0''.0008534$$
$$F'(1.c) = -0''.00003; \quad G'(1.c) = -0''.0000347; \quad H'(1.c) = -0''.00073$$

und aus der Tafel des Art. 57

$$J'(0.c) = -0''.00396; \quad J'(1.c) = -0''.00103$$
$$J''(0.c) = -0''.0000134; \quad J''(1.c) = -0''.0000017$$
$$J''(1.s) = -0''.0000008; \quad J''(2.s) = -0''.0000126$$

Hiemit werden die Glieder der Gleichungen der Reihe nach

$$
\begin{aligned}
F(0.s) &= +0''.00010 \\
-\tfrac{e}{2}H(0.s) &= +0.00381 \\
J'(0.c) &= -0.00396 \\
eJ''(1.s) &= 0.00000 \\
-\tfrac{e}{2}F'(1.c) &= 0.00000 \\
\tfrac{e^2}{4}G'(1.c) &= 0.00000 \qquad F'(0.s) = -0''.0000093 \\
\tfrac{e^2}{4}H'(1.c) &= 0.00000 \qquad -\tfrac{e}{2}H'(0.s) = +0.0000362 \\
-\tfrac{e}{2}J'(1.c) &= +0.00004 \qquad 2J''(0.c) = -0.0000268 \\
-\tfrac{e^2}{2}J''(2.s) &= 0.00000 \qquad -eJ''(1.c) = +0.0000001 \\
\text{Summe} &= -0''.00001 \qquad \text{Summe} = -0''.0000002
\end{aligned}
$$

welches eine sehr befriedigende Uebereinstimmung ist. Ich bemerke hiebei, dass die einzelnen Glieder dieser Bedingungsgleichungen bei ihrer Berechnung aus einer weit geringeren Anzahl von Gliedern zusammengesetzt sind, wie die Glieder der im Art. 55 für unser Beispiel untersuchten Bedingungsgleichung.

80.

Integrirt man nun den im Art. 77 enthaltenen Werth von $\frac{d\delta z}{dt}$ durch die Formeln der Artt. 65 und 72, so ergiebt sich

$n\delta z$					
i, i'	sin	$-\cos$	i, i'	sin	$-\cos$
1,0	+1″.78	+1″.74	−1,−2	0″.00	−0″.10
2,0	+0.36	+1.77	0,−2	+0.17	+0.77
3,0	−0.01	0.00	1,−2	−1.49	+7.35
−2,−1	0.00	0.00	2,−2	−0.95	+0.14
−1,−1	+0.88	−0.24	3,−2	−0.70	−0.06
0,−1	+4.40	+2.62	4,−2	+0.01	−0.01
1,−1	+0.63	+1.03	0,−3	−1.16	+2.32
2,−1	−0.29	+0.62	1,−3	−57.79	+36.90
3,−1	+0.04	−0.02	2,−3	+13.77	−0.15

3, −3	+1″.39	+1″.44	2, −5	+0″.66	−0″.28
4, −3	−0.02	+0.04	3, −5	−0.29	−0.21
5, −3	0.00	0.00	4, −5	−0.45	+0.32
0, −4	−0.03	0.00	5, −5	+0.01	−0.01
1, −4	−0.13	−0.08	6, −5	−0.01	−0.01
2, −4	+0.92	+0.57	1, −6	+0.03	+0.01
3, −4	+0.28	+0.41	2, −6	+0.58	+0.14
4, −4	0.00	−0.03	3, −6	−1.02	+1.02
5, −4	+0.02	−0.01	4, −6	+0.69	−0.01
1, −5	+0.01	−0.09	5, −6	+0.02	+0.03

	ε sin	$-\varepsilon$ cos		ε sin	$-\varepsilon$ cos
0,0		+311170	0, −2	+555	+342
1,0	−38532	+47718	1, −2	+1597	+1138
2,0	+81	−478	2, −2	−281	−421
3,0	+15	−13	3, −2	−49	−177
−1, −1	+166	−149	0, −3	+281	−82
0, −1	+244	−169	1, −3	−1979	+34391
1, −1	−129	+68	2, −3	+1049	−2828
2, −1	−145	+27	3, −3	−228	+654
			4, −3	−13	−2

	ε^2 sin	$-\varepsilon^2$ cos
0,0		+1.72
1,0	−42.61	−8.87
2,0	−0.01	−0.44
3,0	+0.02	+0.01

wo die Säcularänderung durch den Ausdruck (27) berechnet worden ist.

Für die Breitenstörungen erhalten wir aus den Zahlenangaben des Art. 59 durch Integration und Addition

	$\frac{\delta_1 u}{\cos i}$				
i, i'	sin	cos	i, i'	sin	cos
0,0		+0″.47	2, −2	−0″.13	+0″.12
1,0	−0″.20	−0.05	3, −2	+0.04	+0.07
2,0	−0.27	+0.13	0, −3	−0.19	+0.76
−1, −1	+0.06	+0.16	1, −3	−0.26	+0.38
0, −1	+0.01	+0.08	2, −3	+0.35	+0.30
1, −1	−0.44	−0.18	3, −3	−0.52	−0.16
2, −1	−0.07	+0.02	4, −3	−0.02	0.00
0, −2	+0.39	0.00	3, −6	−0.13	+0.20
1, −2	+0.01	+0.08	4, −6	−0.07	−0.15

	ε sin	ε cos		ε sin	ε cos
0,0		+1028	0,−3	+462	+1456
1,0	−2948	+591	1,−3	−1096	−189
2,0	−1307	+1616	2,−3	−98	+1691
3,0	−21	+29	3,−3	−1329	+288
			4,−3	−59	+40

	ε^2 sin	ε^2 cos
0,0		+9.19
1,0	−8.01	−46.28
2,0	+2.40	+4.68
3,0	+0.05	+0.10

Die Integration des im Art. 60 angegebenen numerischen Werthes des Differentials von Γ giebt die grössten Glieder dieser Function wie folgt,

$$\Gamma \cos i = +0''.00241\, nt - 0''.11 \sin(1.3) + 0''.00 \cos(1.3)$$

und durch die Substitution der numerischen Werthe in den Ausdruck des Art. 75 bekommt man

$$\delta_2 u = \{-0''.0000022 - 0''.0001502 \sin\varepsilon + 0''.0000265 \cos\varepsilon\}\varepsilon^2 \sin i \cos(\pi - \theta)$$
$$+ \{\ 0''.0000004 + 0''.0000265 \sin\varepsilon - 0''.0000047 \cos\varepsilon\}\varepsilon^2 \sin i \sin(\pi - \theta)$$

Diese beiden Functionen sind also unbedeutend, wenn man die Ekliptik oder den Aequator als Fundamentalebene annimmt.

81.

Wir haben endlich noch die Correctionen zu betrachten, die aus der Verbesserung der Integrationsdivisoren entstehen, und wovon die grössten schon im Art. 62 (II) angegeben sind. Durch die Ausdrücke des Art. 56 (II) fand sich

	$n\delta z$		$\frac{d\delta z}{dt}$		$2\delta\nu$		$\frac{u}{\cos i}$	
i, i'	sin	− cos	cos	sin	cos	sin	sin	cos
1,0	0	0	0	0	−0″.09	−0″.07		
1,−2	+0″.02	−0″.02	0″.00	0″.00	0.00	0.00		
2,−2	−0.08	+0.10	−0.02	+0.01	+0.03	−0.03		
3,−2	−0.11	+0.08	−0.10	+0.07	+0.12	−0.08		
0,−3	+0.04	−0.02	−0.05	+0.02	+0.05	−0.02	+0″.02	−0″.04
1,−3	+2.69	−3.10	−0.13	+0.07	+0.21	−0.09	−0.01	−0.02
2,−3	−1.56	0.00	−1.57	0.00	+1.50	0.00	+0.09	+0.23
3,−3	+0.05	0.00	+0.01	+0.01	−0.01	−0.01		

Die numerischen Werthe der willkührlichen Constanten können erst weiter unten berechnet werden.

§. 7. Berechnung der von den Producten der störenden Massen abhängigen Glieder.

Bestimmung der numerischen Werthe der willkührlichen Constanten der zweiten Annäherung.

82.

Da die kleinen Planeten auf die andern keine merkliche Wirkung äussern, so entstehen hier die von den Producten der störenden Kräfte abhängigen Glieder aus den Störungen, die die störenden Planeten von den andern Planeten unsers Sonnensystems erleiden, und es sind zunächst die Säcularänderungen der Bahnen der störenden Planeten, und vorzugsweise die der Jupitersbahn in Betracht zu ziehen. Insoweit diese vom Saturn herrühren, entnehme ich sie den »Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns«, lasse aber die Breitenstörungen weg, die kleiner sind wie die übrigen und geringern Einfluss haben. Wenn man die dort gefundenen Werthe auf die Saturnsmasse $= \frac{1}{3502}$ reducirt, so wird

$$\begin{aligned} n'\delta z' = {} & 1''.02135\, n't \sin g' - 1''.13928\, n't \cos g' \\ & + 0.01228\, n't \sin 2g' - 0.01370\, n't \cos 2g' \\ & + 0.00029\, n't \sin 3g' - 0.00033\, n't \cos 3g' \\ v' = {} & - 0''.01229\, n't \\ & - 0.51068\, n't \cos g' - 0''.56965\, n't \sin g' \\ & - 0.01228\, n't \cos 2g' - 0.01370\, n't \sin 2g' \\ & - 0.00044\, n't \cos 3g' - 0.00050\, n't \sin 3g' \end{aligned}$$

Die von den übrigen Planeten herrührenden Glieder habe ich aus der Méc. cél. entnommen. Nach der Reduction auf die jetzt für die besten anerkannten Werthe der Massen, der Verwandelung in Sexagesimalsecunden und der Einführung von $n't$ statt t, fand sich

$$\begin{aligned} n'\delta z' = {} & + 0''.00245\, n't \sin g' - 0''.02744\, n't \cos g' \\ & + 0.00004\, n't \sin 2g' - 0.00032\, n't \cos 2g' \\ v' = {} & - 0''.00004\, n't \\ & - 0.00123\, n't \cos g' - 0''.01372\, n't \sin g' \\ & - 0.00004\, n't \cos 2g' - 0.00032\, n't \sin 2g' \end{aligned}$$

addirt man diese zu den vorstehenden, so wird im Ganzen

$$\begin{aligned} n'\delta z' = &+ 1''.02380\, n't \sin g' - 1''.16672\, n't \cos g' \\ &+ 0.01232\, n't \sin 2g' - 0.01402\, n't \cos 2g' \\ &+ 0.00029\, n't \sin 3g' - 0.00033\, n't \cos 3g' \\ \nu' = &- 0''.01233\, n't \\ &- 0.51191\, n't \cos g' - 0''.58337\, n't \sin g' \\ &- 0.01232\, n't \cos 2g' - 0.01402\, n't \sin 2g' \\ &- 0.00044\, n't \cos 3g' - 0.00050\, n't \sin 3g' \end{aligned}$$

wo noch $n't$ und g' durch ε zu eliminiren sind, um die im Vorhergehenden angewandte Form zu erhalten.

83.

Zufolge des Art. 74 (I) ist, da hier erlaubt ist die constanten Glieder wegzulassen,

$$n't = \mu\varepsilon - \mu e \sin \varepsilon,$$

Da aber das Glied $-\mu e \sin \varepsilon$ Glieder anderer Form und noch dazu unbedeutende hervorbringen würde, so dürfen wir auch dieses weglassen und in den obigen Ausdrücken

$$n't = \mu\varepsilon$$

setzen. Ferner ist a. a. O. gefunden worden

$$\begin{aligned} z'^{-i'} = &J^{(0)}_{i'\lambda}\, y^{-i'\mu}\, \pi^{-i'} + J^{(1)}_{i'\lambda}\, y^{1-i'\mu}\, \pi^{-i'} + J^{(2)}_{i'\lambda}\, y^{2-i'\mu}\, \pi^{-i} + \ldots \\ &- J^{(1)}_{i'\lambda}\, y^{-1-i'\mu}\, \pi^{-i'} + J^{(2)}_{i'\lambda}\, y^{-2-i'\mu}\, \pi^{-'i} \mp \ldots \end{aligned}$$

wo z' die zu g', y die zu ε, und π die zu $c' - \mu c$ gehörige, imaginäre Exponentialfunction ist. Da die reciproke Gleichung

$$\begin{aligned} z'^{i'} = &J^{(0)}_{i'\lambda}\, y^{i'\mu}\, \pi^{i'} + J^{(1)}_{i'\lambda}\, y^{-1+i'\mu}\, \pi^{i'} + J^{(2)}_{i'\lambda}\, y^{-2+i'\mu}\, \pi^{i'} + \ldots \\ &- J^{(1)}_{i'\lambda}\, y^{1+i'\mu}\, \pi^{i'} + J^{(2)}_{i'\lambda}\, y^{2+i'\mu}\, \pi^{i'} \mp \ldots \end{aligned}$$

wird, so bekommen wir sogleich

$$\begin{aligned} \sin i'g' = &\pm \text{etc.} - J^{(2)}_{i'\lambda} \sin(-2,i') + J^{(1)}_{i'\lambda} \sin(-1,i') \\ &- J^{(0)}_{i'\lambda} \sin(0,i') - J^{(1)}_{i'\lambda} \sin(1,i') - J^{(2)}_{i'\lambda} \sin(2,i') - \text{etc.} \\ \cos i'g' = &\mp \text{etc.} + J^{(2)}_{i'\lambda} \cos(-2,i') - J^{(1)}_{i'\lambda} \cos(-1,i') \\ &+ J^{(0)}_{i'\lambda} \cos(0,i') + J^{(1)}_{i'\lambda} \cos(1,i') + J^{(2)}_{i'\lambda} \cos(2,i') + \text{etc.} \end{aligned}$$

wo wieder allgemein

$$(i,i) = (i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c\mu)$$

gesetzt worden ist. Für unser Beispiel giebt der Art. 84 (I) die folgenden numerischen Werthe der J Functionen

$$\log(J_\lambda^{(0)} - 1) = 6.3398n;\ \log J_\lambda^{(1)} = 8.16987;\ \log J_\lambda^{(2)} = 6.0388;$$

$$\log(J_{2\lambda}^{(0)} - 1) = 6.9418n;\ \log J_{2\lambda}^{(1)} = 8.47076;$$

u. s. w., durch deren Anwendung die im vor. Art. gefundenen Ausdrücke für $n'\delta z'$ und v' in folgende übergehen,

$$\begin{aligned}
n'\delta z' = &- 0''.00004\,\varepsilon \sin(-2,1) - 0''.00004\,\varepsilon \cos(-2,1)\\
&+ 0.00528\,\varepsilon \sin(-1,1) + 0.00601\,\varepsilon \cos(-1,1)\\
&- 0.35670\,\varepsilon \sin(0,1) \quad - 0.40648\,\varepsilon \cos(0,1)\\
&- 0.00528\,\varepsilon \sin(1,1) \quad - 0.00601\,\varepsilon \cos(1,1)\\
&- 0.00004\,\varepsilon \sin(2,1) \quad - 0.00004\,\varepsilon \cos(2,1)\\
&+ 0.00013\,\varepsilon \sin(-1,2) + 0.00014\,\varepsilon \cos(-1,2)\\
&- 0.00429\,\varepsilon \sin(0,2) \quad - 0.00489\,\varepsilon \cos(0,2)\\
&- 0.00013\,\varepsilon \sin(1,2) \quad - 0.00014\,\varepsilon \cos(1,2)\\
&- 0.00010\,\varepsilon \sin(0,3) \quad - 0.00012\,\varepsilon \cos(0,3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v' = &- 0''.00429\,\varepsilon\\
&- 0.00002\,\varepsilon \cos(-2,1) + 0''.00002\,\varepsilon \sin(-2,1)\\
&+ 0.00264\,\varepsilon \cos(-1,1) - 0.00301\,\varepsilon \sin(-1,1)\\
&- 0.17835\,\varepsilon \cos(0,1) \quad + 0.20324\,\varepsilon \sin(0,1)\\
&- 0.00264\,\varepsilon \cos(1,1) \quad + 0.00301\,\varepsilon \sin(1,1)\\
&- 0.00002\,\varepsilon \cos(2,1) \quad + 0.00002\,\varepsilon \sin(2,1)\\
&+ 0.00013\,\varepsilon \cos(-1,2) - 0.00014\,\varepsilon \sin(-1,2)\\
&- 0.00429\,\varepsilon \cos(0,2) \quad + 0.00489\,\varepsilon \sin(0,2)\\
&- 0.00013\,\varepsilon \cos(1,2) \quad + 0.00014\,\varepsilon \sin(1,2)\\
&- 0.00015\,\varepsilon \cos(0,3) \quad + 0.00018\,\varepsilon \sin(0,3)
\end{aligned}$$

die mit den Factoren F und G des Ausdrucks von $\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}$ zu multipliciren sind, und von welchen die kleinsten der angeführten Glieder nichts Merkliches geben, und daher übergangen werden können.

84.

Den Coefficienten F bekommt man nach Art. 46 (I) durch die Differentiation des Ausdrucks von T nach c', und G durch Addition der Ausdrücke von V nach T und durch Umkehrung aller Zeichen. Mit wenig Mühe ergiebt sich daher für unser Beispiel

	F		*G*	
i,i'	cos	sin	sin	− cos
0,0,0	0			−0″.29
−1,1,0	0	0	−91″.96	+0.29
0,1,0	0	0	+3.75	+1.67
−1,2,0	0	0	+5.43	+1.71
1,0,0	0	0	−6.91	−3.61
2,0	0	0	+24.94	+9.19
	0	0	−1.48	−0.61
	0	0	−32.00	−11.80
−2,−1	−0″.83	−0″.13	−4.03	−0.77
	+1.14	+0.27	+5.98	+1.53
	−0.05	−0.13	−0.75	−0.72
−1,−1	+1.20	+1.70	+6.12	+8.29
	−2.29	−3.24	−12.79	−17.17
	+0.58	+0.90	+4.17	+5.77
0,−1	−0.42	−1.09	−1.85	−4.74
	−2.14	−0.65	−7.23	−1.80
	+2.95	+2.74	+10.82	+10.91
1,−1	+3.90	+11.02	+15.79	+46.27
	+1.34	+4.55	+6.01	+20.03
	−6.54	−19.19	−26.99	−81.52
2,−1	−1.87	+1.20	−5.08	+4.66
	+0.65	−0.84	+2.26	−2.73
	+1.81	−1.06	+4.37	−4.88
3,−1	+0.27	−5.60	+1.42	−27.99
	−0.06	+1.25	−0.29	+4.79
	−0.32	+6.25	−1.71	+32.67
−1,−2	+0.04	+1.01	+0.27	+2.44
	+0.06	−2.30	−0.09	−6.37
	−0.18	+1.04	−0.47	+3.37
0,−2	+1.83	−1.73	+2.90	−3.05
	−5.14	+5.90	−11.24	+14.02
	+1.81	−2.73	+5.97	−8.40
1,−2	−27.91	+23.39	−44.27	+39.08
	+11.49	−6.68	+17.98	−9.63
	+31.10	−28.37	+49.81	−48.84
2,−2	+179.65	−126.95	+283.47	−201.09
	−54.72	+38.72	−81.18	+58.07
	−184.95	+130.78	−296.84	+210.37
3,−2	+8.73	+0.24	+18.37	+0.20
	−3.81	+0.41	−7.25	−0.03
	−6.52	−1.76	−15.75	−1.67
4,−2	−7.91	+2.19	−23.51	+6.45
	+1.97	−0.54	+5.26	−1.47
	+8.69	−2.39	+26.38	−7.10
0,−3	+0.24	−0.46	−0.13	−0.60
	−2.98	+1.35	−5.12	+2.26
	+2.50	−0.54	+5.35	−1.19

1, −3	−7″.44	+4″.21	−6″.42	+4″.51
	+8.71	+0.77	+13.26	+2.46
	+3.89	−6.42	−1.36	−8.24
2, −3	+86.90	−1.33	+105.48	+8.58
	−28.96	−1.65	−34.47	−5.75
	−91.62	−0.02	−112.76	−10.48
3, −3	−154.57	−118.76	−213.80	−162.98
	+48.56	+37.33	+65.78	+49.93
	+158.23	+120.65	+220.03	+166.97
4, −3	−5.69	−12.30	−10.05	−21.10
	+2.37	+4.61	+3.45	+7.50
	+3.98	+10.92	+8.41	+19.69
1, −4	−0.98	+1.61	−0.19	+2.43
	+2.46	+1.73	+3.04	+2.76
	−0.59	−3.79	−2.26	−6.00
2, −4	+18.22	+5.66	+16.57	+5.59
	−6.03	−7.00	−5.53	−9.67
	−19.24	−3.18	−17.54	−0.90
3, −4	−32.27	−87.93	−32.34	−103.10
	+9.38	+29.94	+10.03	+34.94
	+32.40	+91.31	+31.47	+107.71
4, −4	−49.52	+132.60	−62.24	+169.65
	+15.90	−42.30	+19.55	−53.64
	+49.59	−135.09	+62.74	−173.11
5, −4	−9.97	+10.60	−15.23	+16.51
	+3.58	−3.89	+5.37	−5.57
	+9.39	−9.20	+14.63	−15.24

wo mehr Glieder angesetzt sind, wie gebraucht werden.

85.

Die Multiplicationen wurden nun auf die im §. 5 erklärte Art und nach den dort gegebenen Formeln ausgeführt, wodurch sich ergab,

	$Fn'\delta z'$		Gv'	
$i, -i'$	$-\varepsilon \sin$	$\varepsilon \cos$	$-\varepsilon \sin$	$\varepsilon \cos$
0,0,0		+0.12		−0.26
−1,1,0	+0.15	−0.24	−0.45	+0.53
0,1,0	+1	−1	−1	+3
−1,2,0	——	——	−1	+1
1,0,0	−1.28	+2.82	+2.66	−6.26
1,−1	+4	+1	−4	——
	−2	——	+1	−1
	−6	−1	+4	——
2,−1	−28	−7	+23	+4
	+9	+2	−7	−1
	+29	+7	−24	−5

1, −2	+1	+1	+3	+1
	----	——	+1	+1
	−3	−1	−5	−3
2, −2	−7	−9	+5	+6
	+2	+3	−1	−2
	+8	+9	−5	−6
3, −2	+1	+25	−1	−18
	——	−8	+1	+5
	−2	−26	+2	+18
0, −3	——	——	——	——
	+0.12	+1.05	+0.20	+1.19
	——	——		
1, −3	+0.06	+5.14	−0.07	+4.36
	+0.31	−2.22	+0.37	−1.14
	−0.25	−5.02	−0.16	−5.37
2, −3	+1	−31	+2	−23
	−2	+9	−1	+7
	−1.67	+31.43	−3.26	+22.83
3, −3	−6	+11	+4	−7
	+2	−4	−2	+2
	+6	−11	−4	+7
4, −3	+17	−7	−11	+4
	−5	+2	+4	−1
	−17	+7	+12	−4

Man controlirt diese Producte auf dieselbe Art wie die vorhergehenden. Man addirt nemlich je drei, zu einem und demselben Argument gehörigen, Glieder der Hülfsgrössen des vor. Art. und multiplicirt diese Summen wieder mit $n'\delta z'$ und bez. mit ν', die Producte müssen mit den ähnlichen Summen aus der vorstehenden Tafel übereinstimmen. Diese Producte sind hier zugleich $F'n'\delta z'$ und $G'\nu'$, die das Differential von $\delta \frac{h_0}{h}$ bilden, und dienen folglich auch zur Anwendung der Bedingungsgleichung (1) auf die Controle der hier zu berechnenden Glieder. Da die vorstehenden Producte so einfach zu berechnen gewesen sind, und so kleine Coefficienten enthalten, so habe ich in diesem Falle nicht für nöthig gehalten, die eben beschriebene Controle anzuwenden.

86.

Aus der Summe der beiden Producte des vor. Art. bekommen wir das Differential von δW_0, denn da wir die Breitenstörungen des Jupiters übergangen haben, so wird hier

$$\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} = F n'\delta z + G\nu'$$

Die Integration nicht nur dieses Ausdrucks, sondern auch die der folgenden, wird ohne Ausnahme durch die im vor. § entwickelten Formeln ausgeführt, weshalb ich die Integrale gleich folgen lasse.

δW_0

$i, -i'$	cos	sin	$i, -i'$	cos	sin
0, −3	0″.000	0″.000	2, −3	0″.000	0″.000
	+0.011	−0.002		0.000	0.000
	0.000	0.000		+0.263	+0.024
1, −3	+0.0460	0.0000			
	0.0000	0.0000			
	−0.0001	+0.0000			

	ε cos	ε sin		ε cos	ε sin
−1, 1, 0	−0.30	+0.29	0, −3	——	——
0, 1, 0		+2		−8	−49
−1, 2, 0	−1	+1		——	——
1, −1	——	+2	1, −3	+0.2	−209.1
	−1	−1		+0.7	−3.5
	+6	+3		+0.4	+9.9
2, −1	−3	−2	2, −3	+3	−57
	+1	——		−2	+8
	+8	+3		+109	−1194
1, −2	+13	+7	3, −3	−1	+2
	+1	+1		——	−1
	+11	+6		+2	−4
2, −2	−2	−2	4, −3	+2	−1
	——	——		——	——
	+10	+10		−3	+2
3, −2	——	+3			
	——	−1			
	——	−6			

	ε^2 cos	ε^2 sin
0, 0, 0	−0.07	
1, 0, 0	−1.72	−0.69

Zufolge des fünften Satzes des §. 7 (II) muss hier die Gleichung

$$0 = -0''.0000007 + 0''.0000172 \times \frac{e}{2}$$

stattfinden, die auch bis auf die letzte Stelle erfüllt ist.

$i,-i'$	$2\delta\nu$		$n\delta z$	
	cos	sin	sin	− cos
0,−3	−0″.01	0″.00	−0″.01	0″.00
1,−3	−0.07	0.00	−1.47	+0.04
2,−3	−0.26	−0.02	+0.26	+0.02

	ε cos	ε sin	ε sin	− ε cos
1,0	+2	−4	−2	+6
1,−1	−11	−6	+8	+6
2,−1	−4	−2	+3	+1
1,−2	−33	−17	+82	+46
2,−2	−8	−8	+5	+6
3,−2	——	+2	——	−2
0,−3	−8	−47	+8	+38
1,−3	−7	+295	+68	+3258
2,−3	−116	+1259	+115	−1273
3,−3	−1	+2	−2	+26

	ε^2 cos	ε^2 sin	ε^2 sin	$-\varepsilon^2$ cos
0,0	+0.15			+0.15
1,0	+1.72	+0.69	−1.72	−0.69
2,0			+0.04	+0.02

Nachdem man in diesen und in den im vor. § berechneten, mit ε und ε^2 multiplicirten Gliedern durch die Ausdrücke des Art. 74 nt und n^2t^2 statt ε und ε^2 ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen eingeführt hat, muss man t von dem Zeitpunkt an zählen, für welchen die den Rechnungen zu Grunde gelegten Elemente gelten. Wenn daher die Elemente des gestörten und die des störenden Planeten, die in der Störungsrechnung angewandt worden sind, zwei verschiedenen Zeitpunkten angehören, so hat dieses keine andere Wirkung, als dass der Werth $t=0$ ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen in den im vor. § berechneten Gliedern ein anderer ist, wie in den in diesem § berechneten, und indem man in der einen oder anderen Gattung dieser Störungen für t den Unterschied dieser beiden Zeitpunkte ein für alle Mal substituirt, reducirt man t für beide auf Einen Zeitpunkt. Hiemit ist die im Art. 77 (I) eingefügte Bemerkung erklärt.

87.

Ausser den im Vorhergehenden betrachteten, von den Producten der Massen abhängenden Störungen können noch hie und da solche merklich werden, die in ihren Argumenten Vielfache von drei Anomalien enthalten, und zwar Vielfache von der Anomalie des gestörten Planeten und von den Anomalien von zwei störenden Planeten. In der Bewegung der kleinen Planeten sind es vorzugsweise Jupiter und Saturn, die hiebei in Betracht kommen, und es soll daher im Folgenden die mittlere Anomalie des Jupiters mit g', und die des Saturns mit g'' bezeichnet werden. Da solche Ungleichheiten immer nur dadurch merklich werden, dass sie bei den Integrationen sehr kleine Divisoren bekommen, so werden von denselben in der Regel überhaupt nur die Glieder merklich, die das Quadrat des kleinen Divisors erhalten, und dieser Umstand erleichtert ihre Berechnung sehr. Aus den Artt. 38 und 45 (II) geht hervor, dass alle Glieder, die die Quadrate der Divisoren erhalten, aus der doppelten Integration von $a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ entspringen, wenn wir daher die kleinen Breitenstörungen des Jupiters und Saturns übergehen, so wird für die oben genannten Glieder

$$n\partial z = -3\iint\left\{a\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon\, dc'}\right)n'\partial z' - \left[\left(\frac{dar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right) + a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)\right]\nu'\right\}d\varepsilon^2 \qquad (31)$$

$$-3\iint\left\{a\left(\frac{d^2\Omega'}{d\varepsilon\, dc''}\right)n''\partial z'' - \left[\left(\frac{dar\left(\frac{d\Omega'}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right) + a\left(\frac{d\Omega'}{d\varepsilon}\right)\right]\nu''\right\}d\varepsilon^2$$

wo Ω den Theil der Störungsfunction bezeichnet, welcher vom Jupiter, und Ω' den, welcher vom Saturn herrührt, und c', $n'\partial z'$, ν' sich auf den Jupiter, sowie c'', $n''\partial z''$, ν'' sich auf den Saturn beziehen. Beide Functionen geben hier Grössen von derselben Ordnung, nemlich von der Ordnung $m'm''$, wenn damit die Massen des Jupiters und des Saturns verstanden werden. Die von den Saturnstörungen herrührenden Glieder sind jedoch, im Allgemeinen wenigstens, um deswillen kleiner, wie die aus den Jupiterstörungen entstehenden, weil das Verhältniss der grossen Achse des gestörten Planeten zur grossen Achse der Saturnbahn kleiner ist, wie zu der der Jupiterbahn.

88.

Die Jupiter- und Saturnstörungen sind durch Reihen gegeben, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien g' und g'' fortschreiten, während die Störungen der kleinen Planeten hier in der Form

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\}(i-i'\mu)\,\varepsilon-i'\,(c'-\mu c)\}$$

dargestellt worden sind. Zum jetzigen Zweck muss die eine dieser Formen auf die andere hingeführt werden, und es ist bei Weitem das Einfachste, die Form $\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(i'g'-i''g'')$ auf die vorstehende Form hinzuführen, wie die entgegengesetzte Reduction auszuführen. Die Ausführung dieser Umformung werde ich weiter unten geben, und sie hier schon ausgeführt annehmen. Seien daher

$$\begin{aligned}
n'\delta z' = {} & \alpha_0 \sin(0,k',k'') + \alpha_1 \sin(\ 1,k',k'') + \alpha_2 \sin(\ 2,k',k'') + \ldots \\
& - \alpha_1 \sin(-1,k',k'') + \alpha_2 \sin(-2,k',k'') \mp \ldots \\
& + \beta_0 \cos(0,k',k'') + \beta_1 \cos(\ 1,k',k'') + \beta_2 \cos(\ 2,k',k'') + \ldots \\
& - \beta_1 \cos(-1,k',k'') + \beta_2 \cos(-2,k',k'') \mp \ldots \\
\nu' = {} & \gamma_0 \cos(0,k',k'') + \gamma_1 \cos(\ 1,k',k'') + \gamma_2 \cos(\ 2,k',k'') + \ldots \\
& - \gamma_1 \cos(-1,k',k'') + \gamma_2 \cos(-2,k',k'') \mp \ldots \\
& + \delta_0 \sin(0,k',k'') + \delta_1 \sin(\ 1,k',k'') + \delta_2 \sin(\ 2,k',k'') + \ldots \\
& - \delta_1 \sin(-1,k',k'') + \delta_2 \sin(-2,k',k'') \mp \ldots
\end{aligned}$$

wo allgemein

$$(k,k',k'') = (k+k'\mu-k''\mu')\,\varepsilon + k'(c'-\mu c) - k''(c''-\mu' c)$$

$$\mu = \frac{n'}{n},\ \mu' = \frac{n''}{n}$$

ist, eine Reihe von Gliedern aus den vom Saturn verursachten Jupiterstörungen; seien ferner gleichwie in der Abhandlung (II)

$$\begin{aligned}
(i)\ a\Omega = {} & \Sigma\Sigma' b(i,i',c) \cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-\mu c)\} \\
& + \Sigma\Sigma' b(i,i',s) \sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-\mu c)\}
\end{aligned}$$

von welchen für unser Beispiel die Zahlenwerthe der Coefficienten im Art. (84) (I) gegeben sind; ferner

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right) = {} & -\Sigma\Sigma' d(i,i',c) \sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-\mu c)\} \\
& + \Sigma\Sigma' d(i,i',s) \cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-\mu c)\}
\end{aligned}$$

von dessen Coefficienten sich für unser Beispiel die Zahlenwerthe im Art. 43 befinden, so wird

$$a\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon\, dc'}\right) = \Sigma\Sigma e(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-\mu c\}$$
$$+\Sigma\Sigma e(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-\mu c)\}$$
$$\left(\frac{dar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right) + a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = -\Sigma\Sigma f(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-\mu c)\}$$
$$+\Sigma\Sigma f(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-\mu c)\}$$

wo zur Abkürzung

$$e(i,i',c) = i'b(i,i',c);\ e(i,i',s) = i'b(i,i',s)$$
$$f(i,i',c) = d(i,i',c) + b(i,i',c)$$
$$f(i,i',s) = d(i,i',s) + b(i,i',s)$$

gesetzt worden ist, und hiemit giebt der obige Ausdruck, wenn wir darin blos auf die Jupiterstörungen Rücksicht nehmen

$$n\delta z = \tfrac{3}{2}\left\{\begin{array}{l} \mp \text{etc.} + \alpha_2.e(i+2,i',c) - \alpha_1.e(i+1,i',c) \\ + \alpha_0.e(i,i',c) + \alpha_1.e(i-1,i',c) + \alpha_2.e(i-2,i',c) + \text{etc.} \\ \mp \text{etc.} + \beta_2.e(i+2,i',s) - \beta_1.e(i+1,i',s) \\ + \beta_0.e(i,i',s) + \beta_1.e(i-1,i',s) + \beta_2.e(i-2,i',s) + \text{etc.} \\ \pm \text{etc.} - \gamma_2.f(i+2,i',c) + \gamma_1.f(i+1,i',c) \\ - \gamma_0.f(i,i',c) - \gamma_1.f(i-1,i',c) - \gamma_2.f(i-2,i',c) - \text{etc.} \\ \mp \text{etc.} + \delta_2.f(i+2,i',s) - \delta_1.f(i+1,i',s) \\ + \delta_0.f(i,i',s) + \delta_1.f(i-1,i',s) + \delta_2.f(i-2,i',s) + \text{etc.} \end{array}\right\} \sin(i,i'+k',k'')$$
$$\overline{(i+(i'+k')\mu - k''\mu')^2}$$

$$+\tfrac{3}{2}\left\{\begin{array}{l} \pm \text{etc.} - \alpha_2.e(i+2,i',s) + \alpha_1.e(i+1,i',s) \\ - \alpha_0.e(i,i',s) - \alpha_1.e(i-1,i',s) - \alpha_2.e(i-2,i',s) - \text{etc.} \\ \mp \text{etc.} + \beta_2.e(i+2,i',c) - \beta_1.e(i+1,i',c) \\ + \beta_0.e(i,i',c) + \beta_1.e(i-1,i',c) + \beta_2.e(i-2,i',c) + \text{etc.} \\ \mp \text{etc.} + \gamma_2.f(i+2,i',s) - \gamma_1.f(i+1,i',s) \\ + \gamma_0.f(i,i',s) + \gamma_1.f(i-1,i',s) + \gamma_2.f(i-2,i',s) + \text{etc.} \\ \mp \text{etc.} + \delta_2.f(i+2,i',c) - \delta_1.f(i+1,i',c) \\ + \delta_0.f(i,i',c) + \delta_1.f(i-1,i',c) + \delta_2.f(i-2,i',c) + \text{etc.} \end{array}\right\} \cos(i,i'+k,k'')$$
$$\overline{(i+(i'+k')\mu - k''\mu')^2}$$

wenn

$$(i,i'+k',k'') = (i+(i'+k')\mu - k''\mu')\varepsilon + (i'+k')(c'-\mu c) - k''(c''-\mu c)$$

das Argument der Ungleichheit langer Periode ist. Irgend eine andere Gruppe der Jupiterstörungen, in welcher k'' denselben Werth hat wie oben, k' aber einen anderen, den ich mit k_1' bezeichnen will, giebt in derselben Ungleichheit ganz ähnliche Glieder wie die vorstehenden,

wenn man sie mit den e und f Coefficienten verbindet, deren zweiter Index i_1' statt i' ist, und i_1' so gewählt werden muss, dass

$$i_1' + k_1' = i' + k'$$

wird. Auch die Saturnstörungen geben ganz ähnliche Ausdrücke wie der vorstehende, nur muss man für diese dem Argument der Ungleichheit langer Periode die Form

$$i + k'\mu - (i'' + k'')\mu'$$

geben, da die Argumente der Störungen, die der gestörte Planet vom Saturn erleidet, die Form

$$(i - i''\mu')\varepsilon - i''(c'' - \mu' c)$$

haben. In den verschiedenen hier anzuwendenden Störungsgliedern des Saturns bleibt k' unverändert, k'' hingegen kann verschiedene Werthe annehmen, die mit solchen Gliedern der Störungsfunction verbunden werden müssen, dass immer

$$i_1'' + k_1'' = i'' + k''$$

wird. Wenn überhaupt eine solche Ungleichheit langer Periode merklich wird, so können es immer nur einige wenige Glieder der Jupiter- und Saturnstörungen sein, die merkliche Coefficienten geben, und diese Rechnung ist daher immer leicht auszuführen.

89.

Ich werde jetzt zeigen, wie man irgend ein Glied $\frac{\sin}{\cos}(i'g' - i''g'')$ der Jupiter- oder Saturnstörungen auf die im vor. Art. verlangte Form hinführt. Sei wie früher

$$y = h^{\varepsilon\sqrt{-1}},\quad z' = h^{g'\sqrt{-1}},\quad \pi = h^{(c' - c\mu)\sqrt{-1}},\quad \lambda = \tfrac{1}{2}\mu e$$

und ausserdem

$$z'' = h^{g''\sqrt{-1}},\quad \pi' = h^{(c'' - \mu' c)\sqrt{-1}},\quad \lambda' = \tfrac{1}{2}\mu' e$$

wo h die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet, dann wird zufolge des Art. 74 (I)

$$\begin{aligned} z'^{i'} = {} & J^{(0)}_{i'\lambda}\, y^{i'\mu}\, \pi^{i'} + J^{(1)}_{i'\lambda}\, y^{-1+i'\mu}\, \pi^{i'} + J^{(2)}_{i'\lambda}\, y^{-2+i'\mu}\, \pi^{i'} + \ldots \\ & - J^{(1)}_{i'\lambda}\, y^{1+i'\mu}\, \pi^{i'} + J^{(2)}_{i'\lambda}\, y^{2+i'\mu}\, \pi^{i'} \mp \ldots \\ z''^{-i''} = {} & J^{(0)}_{i''\lambda'}\, y^{-i''\mu'}\, \pi'^{-i''} + J^{(1)}_{i''\lambda'}\, y^{1-i''\mu'}\, \pi'^{-i''} + J^{(2)}_{i''\lambda'}\, y^{2-i''\mu'}\, \pi'^{-i''} + \ldots \\ & - J^{(1)}_{i''\lambda'}\, y^{-1-i''\mu'}\, \pi'^{-i''} + J^{(2)}_{i''\lambda'}\, y^{-2-i''\mu'}\, \pi'^{-i''} \mp \ldots \end{aligned}$$

multiplicirt man diese beiden Ausdrücke mit einander, und setzt zur Abkürzung

$$(l', l'') = J_{i'\lambda}^{(l')} \cdot J_{i''\lambda'}^{(l'')}$$

$$\begin{aligned}
K(0) &= (0.0) + 2(1.1) + 2(2.2) + \ldots \\
K(1) &= (0.1) + (1.2) + (2.3) + \ldots \\
&\quad -(1.0) - (2.1) - (3.2) - \ldots \\
K(2) &= -(1.1) + (0.2) + (1.3) + \ldots \\
&\quad + (2.0) + (3.1) + \ldots \\
K(3) &= -(1.2) + (0.3) + (1.4) + \ldots \\
&\quad + (2.1) - (3.0) - (4.1) - \ldots \\
K(4) &= (2.2) - (1.3) + (0.4) + (1.5) + \ldots \\
&\quad - (3.1) + (4.0) + (5.1) + \ldots
\end{aligned}$$

etc.

so wird

$$z'^{i'} z''^{-i''} = K(0)\, y^{i'\mu - i''\mu'} \pi^{i'} \pi'^{-i''} + K(1)\, y^{1+i'\mu-i''\mu'} \pi^{i'} \pi'^{-i''} + K(2) y^{2+i'\mu-i''\mu'} \pi^{i'} \pi'^{-i''} + \ldots$$
$$- K(1)\, y^{-1+i'\mu-i''\mu'} \pi^{i'} \pi'^{-i''} + K(2) y^{-2+i'\mu-i''\mu'} \pi^{i'} \pi'^{-i''} \mp \ldots$$

Geht man zum Reellen über, so erhält man hieraus

$$\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(i'g' - i''g'') = K(0) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(0, i', i'') + K(1) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(1, i', i'') + K(2) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(2, i', i'') + \ldots$$
$$- K(1) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(-1, i', i'') + K(2) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(-2, i', i'') \mp \ldots$$

wo

$$(i, i', i'') = (i + i'\mu - i''\mu')\varepsilon + i'(c' - c\mu) - i''(c'' - c\mu')$$

ist. Wenn daher

$$\begin{aligned}
n'\delta z' &= p \sin(i'g' - i''g'') + p' \cos(i'g' - i''g'') \\
v' &= q \cos(i'g' - i''g'') + q' \sin(i'g' - i''g'')
\end{aligned}$$

irgend zwei zusammengehörige Glieder der vom Saturn bewirkten Jupiterstörungen sind, so bekommt man die im vor. Art. mit α, β, γ, δ, bezeichneten Coefficienten durch folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= pK(0), \quad \alpha_1 = pK(1), \quad \alpha_2 = pK(2), \quad \text{etc.} \\
\beta_0 &= p'K(0), \quad \beta_1 = p'K(1), \quad \beta_2 = p'K(2), \quad \text{etc.} \\
\gamma_0 &= qK(0), \quad \gamma_1 = qK(1), \quad \gamma_2 = qK(2), \quad \text{etc.} \\
\delta_0 &= q'K(0), \quad \delta_1 = q'K(1), \quad \delta_2 = q'K(2), \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

und ebenso bringt man die vom Jupiter bewirkten Saturnstörungen auf dieselbe Form. Die numerischen Werthe, die μ, μ' und die Excentricität e des gestörten Planeten in unserm Sonnensystem haben, verursachen, dass von den vorstehenden Coefficienten nur die ersten jeder Reihe merklich werden.

90.

Die Argumente langer Perioden sind leicht zu finden, man braucht nur für $i'=1$, $i'=2$, $i'=3$, etc. indem man sie nach einander mit $i''=1$, $i''=2$, $i''=3$, etc. verbindet, die Werthe von

$$i'\mu \pm i''\mu'$$

zu berechnen. Wenn diese Grösse einer ganzen Zahl, die ich mit l bezeichnen will, nahe gleich ist, so ist bez.

$$l - i'\mu - i''\mu' \text{ oder } l - i'\mu + i''\mu'$$

der mit ε multiplicirte Theil des Arguments langer Periode. Um die eben genannten Grössen leicht zu erhalten, braucht man sich nur im Voraus ein Täfelchen für $i'\mu$ und eins für $i''\mu'$ zu machen, so wie sie hier schon im Art. (78) (I) und im Art. (1) (II) vorkommen. Da aber der zu Grunde gelegte Werth von n auf die Zahlenwerthe der zu ermittelnden Argumente sehr grossen Einfluss hat, so ist es angemessen, diese Untersuchung bis dahin aufzuschieben, wo man im Besitz eines genauen Werthes der wahren mittleren Bewegung sein wird.

Der im Vorhergehenden aufgestellte Ausdruck

$$i + (i'+k')\mu - k''\mu'$$

schliesst zwar den Werth $i=0$ nicht aus, aber für $i=0$ ist die betreffende Ungleichheit auch gleich Null.

Um diesen Satz auf die einfachste Art zu beweisen, wollen wir uns alle Glieder des Ausdrucks (31) in Reihen entwickelt denken, die nach den Sinussen und Cosinussen der mittleren Anomalien fortschreiten. Der erste Theil dieses Ausdrucks kann hierauf wie folgt geschrieben werden,

$$n\delta z = -3n^2 \iint \left\{ a\left(\frac{d\Omega}{dg\,dg'}\right) n'\delta z' - \left[\left(\frac{da\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{dg} \right) + a\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) \right] r' \right\} \delta z^2$$

und der zweite Theil nimmt eine analoge Form an. Da aber $n'\delta z'$ und r' kein g enthalten, so können in den Differentialquotienten von Ω, die hier vorkommen, auch nur die Glieder die kein g enthalten, auf die Ungleichheit, in welcher $i=0$ sein soll, Einfluss haben. Sei aber irgend eins dieser

$$a\Omega = b\cos i'g' + b'\sin i'g'$$

so ist in Beziehung darauf $a\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)=0$, und folglich die in Rede stehende Ungleichheit auch gleich Null. W. z. b. w.

Es möchte wohl nicht undienlich sein, diesen Satz auch durch ein numerisches Beispiel zu belegen, und ich will daher den Theil des Coefficienten der Ungleichheit in der Bewegung der Egeria rechnen, welche $2g' - 5g''$ zum Argument hat, und von der Ungleichheit in der Bewegung des Jupiters herrührt, die $3g' - 5g''$ zum Argument hat. Da der vorstehende Satz für die einzelnen Abschnitte des Ausdrucks der Coefficienten Geltung hat, so muss der genannte Theil dieses Coefficienten, gleichwie alle übrigen ähnlichen Theile für sich Null werden. Aus Art. (84) (I) findet man

$\log J^{(0)}_{3\lambda} = 9.99914$, $\log J^{(1)}_{3\lambda} = 8.6466$, $\log J^{(2)}_{3\lambda} = 6.9928$, $\log J^{(3)}_{3\lambda} = 5.163$

und aus Art. (19) (II)

$\log J^{(0)}_{5\lambda'} = 9.99958$, $\log J^{(1)}_{5\lambda'} = 8{,}4737$, $\log J^{(2)}_{5\lambda'} = 6.647$

und hiemit ergab sich

$K(0) = 0.99969$, $K(1) = -0.01459$, $K(2) + 0.00010$, $K(3) = +0.00001$

Aus meiner Preisschrift über die gegenseitigen Störungen des Jupiter und Saturn p. 76 entnehme ich nach der Reduction auf die hier überhaupt angewandte Saturnmasse

$$n'\delta z' = +154''.937 \sin(3g' - 5g'') + 12''.612 \cos(3g' - 5g'')$$

Drückt man nun die Coefficienten α, β, in Theilen des Radius aus, so findet man

$\log \frac{1}{2}\alpha_0 = 6.5745$, $\log \frac{1}{2}\beta_0 = 5.4852$

$\log \frac{1}{2}\alpha_1 = 4.739n$, $\log \frac{1}{2}\beta_1 = 3.649n$

$\log \frac{1}{2}\alpha_2 = 2.575$, $\log \frac{1}{2}\beta_2 = 1.485$

und aus Art. (84) (I) ergiebt sich

$e(-1.1.c) = -0''.342$, $e(-1.1.s) = -0''.523$

$e(\ 0.1.c) = +0.014$, $e(\ 0.1.s) = +0.046$

$e(\ 1.1.c) = -1.305$, $e(\ 1.1.s) = -3.699$

$e(\ 2.1.c) = +0.638$, $e(\ 2.1.s) = -0.246$

Die Multiplicationen nach Vorschrift des Ausdrucks des Art. 88 für $n\delta z$ geben hiemit

$\frac{1}{2}\alpha_2 e(\ 2.1.c) = \ 0''.0000000$,	$-\frac{1}{2}\alpha_1 e(\ 2.1.s) = \ 0''.0000000$
$\frac{1}{2}\beta_2 e(\ 2.1.s) = \ 0.0000000$,	$\frac{1}{2}\beta_1 e(\ 2.1.c) = \ 0.0000000$
$-\frac{1}{2}\alpha_1 e(\ 1.1.c) = -0.0000072$,	$\frac{1}{2}\alpha_1 e(\ 1.1.s) = +0.0000203$
$-\frac{1}{2}\beta_1 e(\ 1.1.s) = -0.0000017$,	$-\frac{1}{2}\beta_1 e(\ 1.1.c) = -0.0000006$
$\frac{1}{2}\alpha_0 e(\ 0.1.c) = +0.0000053$,	$-\frac{1}{2}\alpha_0 e(\ 0.1.s) = -0.0000173$
$\frac{1}{2}\beta_0 e(\ 0.1.s) = +0.0000014$,	$\frac{1}{2}\beta_0 e(\ 0.1.c) = +0.0000004$
$\frac{1}{2}\alpha_1 e(-1.1.c) = +0.0000019$,	$-\frac{1}{2}\alpha_1 e(-1.1.s) = -0.0000029$
$\frac{1}{2}\beta_1 e(-1.1.s) = +0.0000002$,	$\frac{1}{2}\beta_1 e(-1.1.c) = +0.0000002$
Summe $= -0''.0000001$,	Summe $= +0''.0000001$

welches für Null gehalten werden muss, wie der obige Satz verlangt.

Die Wirkung der grossen Ungleichheit langer Periode in der Bewegung des Jupiters und Saturns auf den gestörten Planeten wird am Einfachsten dadurch berücksichtigt, dass man den jedesmaligen Betrag derselben in allen Ungleichheiten den Längen der Epochen c' und c'' hinzufügt. So habe ich es schon im Art. (61) (II) bei der Berechnung der Werthe der Constanten für die Egeria gemacht.

Sollte indess in der Bewegung des gestörten Planeten eine Ungleichheit vorkommen, deren Periode nahe dieselbe ist, wie die Periode der grossen Ungleichheit des Jupiters und Saturns, so darf in Bezug auf diese Ungleichheit dieses Verfahren nicht angewandt werden, denn wenn der Coefficient von ε in dieser Ungleichheit mit $l - l'\mu$ bezeichnet wird, so entstehen hieraus zwei Ungleichheiten langer Periode, für welche die Coefficienten von ε in den Argumenten die folgenden sind,

$$l - (l' - 2)\,\mu - 5\mu'$$

und

$$l - (l' + 2)\,\mu + 5\mu'$$

und die durch das im Vorhergehenden erklärte Verfahren berechnet werden müssen.

91.

Wendet man den Ausdruck (30) auf den in der Abhandlung (II) Art. 59 und 61 gegebenen numerischen Werth von $\delta \frac{h}{h_0}$ an, so ergiebt sich

$$2H_1 = +0''.047$$

Im Art. 57 sind die numerischen Werthe

$$\Upsilon(0.c) = +1''.039 \qquad \Psi(0.c) = -0''.027$$
$$\Upsilon'(1.s) = +0''.00020 \quad \Psi'(1.s) = -0''.00034$$

enthalten, und hiemit wird zufolge (29)

$$V_1 = +3''.090$$

und

$$\tfrac{1}{3}(3V_1 + 2H_1) = +3''.10$$

welche Grösse zufolge des Art. 76 ein Theil der zu $2\delta\nu$ zu addirenden Constante ausmacht. Stellen wir nun die im Vorhergehenden berechneten Störungen zweiter Ordnung zusammen, verwandeln ε in nt ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen, und fügen $\delta\nu$ einstweilen den eben berechneten Theil der überhaupt zuzufügenden Constante zu, so erhalten wir

$i,\ i'\mu$	$n\delta z$ sin	$n\delta z$ cos	$2\delta v$ cos	$2\delta v$ sin	$\frac{\delta u}{\cos i}$ sin	$\frac{\delta u}{\cos i}$ cos
0,0		$-3''.1117nt$ $-0.0000187n^2t^2$	$+3''.10$ $+0.03566nt$ $+0.0000462n^2t^2$			$+0''.47$ $+0.01024nt$ $+0.0000949n^2t^2$
1,0	$+1''.51$ $-0.38534nt$ $-0.0004433n^2t^2$	-1.74 $-0.47724nt$ $+0.0000956n^2t^2$	-0.78 $+0.38681nt$ $+0.0004458n^2t^2$	$-1''.39$ $-0.47645nt$ $+0.0000953n^2t^2$	$-0''.20$ $-0.02948nt$ $-0.0000801n^2t^2$	-0.05 $+0.00591nt$ $-0.0004627n^2t^2$
2,0	$+0.34$ $+0.00081nt$ $+0.0000003n^2t^2$	-1.76 $+0.00478nt$ $+0.0000042n^2t^2$	-0.29 $+0.00612nt$ $+0.0000074n^2t^2$	-1.52 $-0.00474nt$ $+0.0000051n^2t^2$	-0.27 $-0.01303nt$ $+0.0000240n^2t^2$	$+0.13$ $+0.01615nt$ $+0.0000468n^2t^2$
3,0	-0.01 $+0.00015nt$ $+0.0000002n^2t^2$	0.00 $+0.00013nt$ $-0.0000001n^2t^2$	-0.01 $+0.00021nt$ $+0.0000003n^2t^2$	-0.07 $-0.00013nt$ $+0.0000002n^2t^2$	0.00 $-0.00021nt$ $+0.0000005n^2t^2$	0.00 $+0.00029nt$ $+0.0000010n^2t^2$
−2,−1	0.00	-0.00	$+0.05$	-0.01		
−1,−1	$+0.88$ $+0.00166nt$	$+0.24$ $+0.00149nt$	$+1.05$ $+0.00218nt$	-0.26 $-0.00194nt$	$+0.06$	$+0.16$
0,−1	$+4.40$ $+0.00244nt$	-2.62 $+0.00169nt$	$+1.72$ $+0.00155nt$	$+0.93$ $-0.00112nt$	$+0.01$	$+0.08$
1,−1	$+0.63$ $-0.00121nt$	-1.03 $-0.00074nt$	-0.45 $+0.00097nt$	-0.82 $-0.00072nt$	-0.44	-0.18
2,−1	-0.29 $-0.00142nt$	-0.62 $-0.00028nt$	$+0.30$ $+0.00150nt$	-0.71 $-0.00036nt$	-0.07	$+0.02$
3,−1	$+0.04$	$+0.02$	-0.05	0.00		
−1,−2	0.00	$+0.10$	0.00	-0.08		
0,−2	$+0.17$ $+0.00555nt$	-0.77 $-0.00342nt$	$+0.10$ $+0.00436nt$	$+0.70$ $+0.00265nt$	$+0.39$	0.00
1,−2	-1.47 $+0.01679nt$	-7.33 $-0.01184nt$	$+0.45$ $-0.00445nt$	-2.20 $-0.00287nt$	$+0.01$	$+0.08$
2,−2	-1.03 $-0.00276nt$	-0.24 $+0.00415nt$	$+0.87$ $+0.00291nt$	-0.24 $+0.00427nt$	-0.13	$+0.42$
3,−2	-0.81 $-0.00049nt$	-0.02 $+0.00179nt$	$+0.70$ $+0.00042nt$	-0.03 $+0.00159nt$	$+0.04$	$+0.07$
4,−2	$+0.01$	$+0.01$	$+0.04$	$+0.02$		
0,−3	-1.10 $+0.00289nt$	-2.30 $+0.00044nt$	-1.17 $+0.00236nt$	$+2.20$ $-0.00124nt$	-0.17 $+0.00462nt$	$+0.75$ $+0.01456nt$
1,−3	-56.57 $-0.01911nt$	-33.84 $-0.37649nt$	-2.79 $-0.00357nt$	$+1.16$ $+0.02199nt$	-0.27 $-0.01096nt$	$+0.36$ $-0.00189nt$
2,−3	$+12.44$ $+0.01164nt$	$+0.13$ $+0.04121nt$	-11.86 $-0.01131nt$	$+0.14$ $+0.04064nt$	$+0.44$ $-0.00098nt$	$+0.53$ $+0.01691nt$
3,−3	$+1.44$ $-0.00230nt$	-1.44 $-0.00680nt$	-1.30 $+0.00188nt$	-1.17 $-0.00486nt$	-0.52 $-0.01329nt$	-0.16 $+0.00288nt$
4,−3	-0.02 $-0.00013nt$	-0.04 $+0.00002nt$	-0.06 $+0.00021nt$	-0.10 $-0.00021nt$	-0.02 $-0.00059nt$	0.00 $+0.00010nt$
0,−4	-0.03	0.00	-0.03	-0.01		
1,−4	-0.13	$+0.08$	-0.03	-0.04		
2,−4	$+0.92$	-0.57	-0.62	-0.41		
3,−4	$+0.28$	-0.41	-0.30	-0.47		
4,−4	0.00	$+0.03$	0.00	0.00		
5,−4	$+0.02$	$+0.01$	-0.02	$+0.01$		
1,−5	$+0.01$	$+0.09$	$+0.01$	-0.06		
2,−5	$+0.66$	$+0.28$	-0.20	$+0.19$		
3,−5	-0.29	$+0.21$	$+0.20$	$+0.40$		
4,−5	-0.45	-0.32	$+0.37$	-0.23		
5,−5	$+0.01$	$+0.01$	$+0.02$	-0.01		
6,−5	-0.01	$+0.01$	$+0.01$	$+0.01$		
1,−6	$+0.03$	-0.01	$+0.04$	0.00		
2,−6	$+0.58$	-0.14	$+0.13$	-0.07		
3,−6	-1.02	-1.02	$+1.05$	-1.19	-0.13	$+0.20$
4,−6	$+0.69$	$+0.01$	-0.44	-0.05	-0.07	-0.15
5,−6	$+0.02$	-0.03	-0.05	-0.03		

wozu noch die Ausdrücke des Art. 80 für I' und $\delta_2 u$ kommen. — Geht man diese Zusammenstellung durch, so findet man eine Anzahl kleiner Glieder, die auf den Ort der Egeria nur sehr geringe Wirkung äussern, und weggelassen werden können. Im Voraus weiss man dieses aber nicht, und muss daher, wenn das Resultat vollständig sein soll, sie in der Rechnung mit berücksichtigen. Es befinden sich aber auch in der vorstehenden Tafel mehrere Glieder, die sehr bedeutenden Einfluss auf den Ort der Egeria haben, und zu erkennnen geben, dass man in der Theorie der kleinen Planeten das Quadrat der störenden Kraft wenigstens nicht immer übergehen darf. Die in den Ausdrücken von $n\delta z$ und ν enthaltenen Säcularänderungen haben einen bedeutenden Zuwachs erhalten. Der Coefficient des in $n\delta z$ mit $nt \sin \varepsilon$ und ν mit $nt \cos \varepsilon$ multiplicirten Gliedes ist um fast die Hälfte grösser geworden, und der bez. mit $nt \cos \varepsilon$ und $nt \sin \varepsilon$ fast um den fünften Theil. Die Uebergehung dieser Glieder würde sehr merklich sein. Ferner hat der Coefficient der Ungleichheit langer Periode, welche vom Argument $1,-3$ abhängt, durch Zuziehung des Quadrats der störenden Kraft eine Aenderung von mehr wie eine Minute, und der des Arguments $2,-3$ eine Aenderung von fast einer halben Minute erlitten. Da $n=1,52$ ist, wenn man für die Einheit in t das Julianische Jahr wählt, so zeigt die vorstehende Tafel ferner, dass der Coefficient des Arguments $1,-3$ sich jährlich um mehr wie eine halbe Secunde vermindert. Die Säcularänderung der mittleren Länge, nemlich das Glied $-0''.0000187\, n^2t^2$, ist bei der Egeria wie bei den alten Planeten klein, ebenfalls sind die Breitenstörungen der Egeria, die vom Quadrat der störenden Kraft abhängen, nicht sehr bedeutend.

92.

Indem wir jetzt zur Bestimmung der Theile der willkührlichen Constanten übergehen, die vom Quadrat der störenden Kraft abhängen, müssen wir zufolge des §. 5 (II) aus den Angaben des vor. Art. zuerst die numerischen Werthe der dort $(n\delta z)_0$, $(\nu)_0$, $\left(\frac{u}{\cos i}\right)_0$, $\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\nu}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{du}{\cos i\, dt}\right)_0$ genannten Grössen rechnen. Die ersten drei dieser bekommt man unmittelbar durch die Substitution der der hier angenommenen Zeitepoche entsprechenden Werthe der Argumente, und indem man ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen $t=0$ macht. Um die beiden

letzten zu erhalten, braucht man ausser dieser Substitution nur die Coefficienten mit den bekannten Integrationsdivisoren zu multipliciren und die Sinusse in Cosinusse, so wie die Cosinusse in Sinusse mit entgegengesetztem Vorzeichen zu verwandeln. Die Grösse $n\left(\frac{d\delta z}{d\varepsilon}\right)_0$ bekommt man ebenso, und hierauf wird

$$\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 = n\left(\frac{d\delta z}{d\varepsilon}\right)_0 \frac{a_0}{r_0}$$

Wenn die Säcularänderungen merklich sind, so muss in den Differentialcoefficienten darauf Rücksicht genommen werden. Dieses ist in unserem Beispiel, ausser in der ersten Abtheilung $i' = 0$, nur in den Coefficienten des Arguments $1,-3$ der Fall. Wenn

$$\begin{aligned} n\delta z \text{ oder } \delta\nu \text{ oder } \delta u = \quad & a\sin(1,-3) + a'nt\sin(1,-3) \\ & + b\cos(1,-3) + b'nt\cos(1,-3) \end{aligned}$$

ist, so wird mit ausreichender Genauigkeit

$$\begin{aligned} n\left(\frac{d\delta z}{d\varepsilon}\right) \text{ oder } \left(\frac{d\delta\nu}{d\varepsilon}\right) \text{ oder } \left(\frac{d\delta u}{d\varepsilon}\right) = {} & (a(1-3\mu)+b')\cos(1,-3) + a'(1-3\mu)nt\cos(1,-3) \\ & + (-b(1-3\mu)+a')\sin(1,-3) - b'(1-3\mu)nt\sin(1,-3) \end{aligned}$$

in welchen, um die mit 0 versehenen Grössen zu erhalten, die mit nt multiplicirten Glieder weggelassen werden müssen. Auf dieselbe Art bekommt man die Differentiale irgend eines anderen Gliedes. Die Differentiale der Abtheilung $i' = 0$ habe ich in der folgenden Tafel zusammengestellt, jedoch die mit n^2t^2 multiplicirten Glieder, da sie für den Gebrauch, welcher hier davon gemacht werden wird, unmerklich sind, weggelassen.

	$\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)$		$2\left(\frac{d\delta\nu}{d\varepsilon}\right)$		$\left(\frac{du}{\cos i\, d\varepsilon}\right)$	
$i'', i'\mu$	cos	sin	−sin	cos	cos	−sin
0,0	−3″.0659 −0.01645nt			+0″.04 +0.00009nt	+0″.01 +0.00018nt	
1,0	+1.08 −0.38718nt	+1″.50 +0.47681nt	−0″.30 +0.38662nt	−1.00 −0.47556nt	−0.19 −0.03041nt	−0″.02 +0.00607nt
2,0	+0.78 −0.01481nt	+3.60 +0.01068nt	−0.58 +0.01223nt	−3.03 −0.00947nt	−0.52 −0.02597nt	+0.27 +0.03225nt
3,0	+0.01 −0.00017nt	+0.06 +0.00006nt	−0.03 +0.00063nt	−0.21 −0.00039nt	— —	— —

93.

Um nun die Theile der Constanten zu erhalten, die das Quadrat der störenden Kraft den in der Abhandlung (II) ermittelten Werthen derselben hinzufügt, müssen auf die im §. 5 (II) erklärte Art zuerst die Grössen $(n\delta z)_0$, $\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0$, etc. berechnet werden. Hiezu können dieselben im Art. 61 (II) benutzten Werthe von ε_0 und c' angewandt werden, aber die dort berechneten Werthe dieser Grössen müssen mit dem Unterschied des dort der Rechnung zu Grunde gelegten Werthes von c von dem durch dieselbe erhaltenen Werthe dieser Grösse verbessert werden. Dieser Rechnung wurde zu Grunde gelegt

$$c_0 = 19^0\ 31'\ 43''.6$$

und erhalten wurde

$$c = 19^0\ 33'\ 27''.9$$

Da wenigstens in diesem Beispiel der Unterschied

$$c - c_0 = +1'\ 44''.3$$

sehr klein ist, so braucht die genannte Verbesserung sich nur auf die grössten Störungsglieder zu erstrecken, und ist leicht zu erhalten. Es ergaben sich nun die folgenden numerischen Werthe,

$$\begin{aligned}
(n\delta z)_0 &= -28''.61 - 0''.50 = -29''.11 \\
\left(\tfrac{d\delta z}{dt}\right)_0 &= -20.27 - 0.38 = -20.65 \\
2\,(\delta v)_0 &= +17.71 + 0.43 = +18.14 \\
2\left(\tfrac{d\delta v}{d\varepsilon}\right)_0 &= +\ 7.11 - 0.87 = +\ 6.24 \\
\left(\tfrac{\delta u}{\cos i}\right)_0 &= +\ 0.20 - 0.04 = +\ 0.16 \\
\left(\tfrac{d\delta u}{\cos i\, d\varepsilon}\right)_0 &= +\ 1.07 - 0.05 = +\ 1.02
\end{aligned}$$

wozu noch aus Art. 77 das constante Glied in dem dort gegebenen Ausdruck von $\frac{d\delta z}{dt}$, nemlich

$$Z_1 = -3''.07$$

kommt. Von den zwei Theilen, in welchen ich die vorstehenden Grössen angegeben habe, enthält der erste das Resultat der Substitution von ε_0 und c' in die vorhergehenden Glieder der zweiten Ordnung, und der zweite die Verbesserung der in der ersten Annäherung in dem Art. 61 (II) gefundenen Werthe dieser Grössen. Man sieht, dass diese sehr klein sind. Durch Anwendung der Ausdrücke des Art. 54 (II) auf die obigen numerischen Werthe ergab sich

$$\begin{aligned} k &= + \ 0''.25 \\ k_1 &= + \ 16.75 \\ k_2 &= + \ 13.23 \\ l &= - \ 1.00 \\ l_1 &= + \ 0.24 \\ \delta c &= + \ 35.63 \end{aligned}$$

die nicht ganz unbedeutend sind. Substituirt man diese in die Ausdrücke des Art. 76 für nz, v und $\frac{u}{\cos i}$, so ergeben sich folgende Glieder

$$\begin{aligned} nz = &+ 35''.63 \quad - 0''.0149\,t \\ &+ 18.20 \sin\varepsilon - 14.97 \cos\varepsilon \\ &- 0.02 \sin 2\varepsilon - 1.48 \cos 2\varepsilon \\ 2\delta v = &+ 5''.36 \\ &- 17.53 \cos\varepsilon - 14''.62 \sin\varepsilon \\ \frac{\delta u}{\cos i} = &+ 0''.45 \\ &- 1.20 \sin\varepsilon + 0''.19 \cos\varepsilon \end{aligned}$$

die an die Stelle der im Art. 91 angegebenen gleichartigen Glieder treten.

94.

Fügen wir jetzt die im Vorhergehenden berechneten Glieder zweiter Ordnung den in der Abhandlung (II) berechneten Gliedern erster Ordnung hinzu, so ist das Resultat das folgende. Sei wie immer

$$nz = g + n\delta z$$

dann wird

$$g = 19^{\circ}34'3''.5 + 858''.2797\,t - 0''.432\,t_1^2$$

wo der Coefficient von t der wahre Werth der mittleren täglichen Bewegung ist, insofern der diesen Rechnungen zu Grunde gelegte numerische Werth von n_0 in der That der der Zeitepoche zukommende Werth der osculirenden mittleren Bewegung ist.

Der Coefficient von t_1^2 ist die Säcularänderung der mittleren Länge oder mittleren Anomalie in der Zeiteinheit, für welche hier hundert Julianische Jahre angenommen sind.

Die Coefficienten von $n\delta z$, v und $\frac{u}{\cos i}$ habe ich in der folgenden Tafel zusammengestellt.

ε, $\mu\varepsilon$	$n\delta z$		ν		$\frac{u}{\cos i}$	
	sin	cos	cos	sin	sin	cos
0,0			$-21''.52$ $+0.05208nt$ $+0.0000234n^2t^2$			$+5''.72$ $-0.10725nt$ $+0.0000949n^2t^2$
1,0	$+826''.80$ $-1''.18446nt$ $-0.0004433n^2t^2$	$-679''.60$ $-3''.06350nt$ $+0.0000956n^2t^2$	-412.89 $+0.59427nt$ $+0.0002229n^2t^2$	$-339''.23$ $-1''.53136nt$ $+0.0000477n^2t^2$	$-111''.47$ $-7''.88639nt$ $-0.0000801n^2t^2$	-22.08 $+1.38981nt$ $-0.0004627n^2t^2$
2,0	-19.63 $+0.01782nt$ $+0.0000003n^2t^2$	$+13.38$ $+0.05965nt$ $+0.0000042n^2t^2$	$+1.64$ $+0.00306nt$ $+0.0000037n^2t^2$	-0.12 $-0.00237nt$ $+0.0000026n^2t^2$	-0.52 $-0.01303nt$ $+0.0000240n^2t^2$	-0.21 $+0.01615nt$ $+0.0000468n^2t^2$
3,0	$+0.10$ $+0.00015nt$ $+0.0000002n^2t^2$	-0.08 $+0.00013nt$ $-0.0000001n^2t^2$	-0.05 $+0.00011nt$ $+0.0000002n^2t^2$	-0.09 $-0.00007nt$ $+0.0000001n^2t^2$	-0.02 $-0.00021nt$ $+0.0000005n^2t^2$	-0.04 $+0.00029nt$ $+0.0000040n^2t^2$
$-2,-1$	$+0.30$	-0.18	$+0.21$	$+0.04$	$+0.08$	$+0.04$
$-1,-1$	-3.31 $+0.00166nt$	$+5.93$ $+0.00149nt$	-2.00 $+0.00109nt$	-3.72 $-0.00096nt$	$+2.12$	$+3.03$
0,−1	$+20.44$ $+0.00244nt$	-12.35 $+0.00169nt$	$+2.44$ $+0.00078nt$	-1.01 $-0.00056nt$	$+10.47$	$+5.98$
1,−1	$+40.02$ $-0.00121nt$	-115.83 $-0.00074nt$	-14.00 $+0.00049nt$	-40.57 $-0.00036nt$	-7.98	-5.06
2,−1	$+0.20$ $-0.00142nt$	$+2.09$ $-0.00028nt$	-0.62 $+0.00075nt$	$+0.04$ $-0.00048nt$	-5.08	-0.71
3,−1	-0.03	-0.76	0.00	-0.65	$+0.15$	-0.01
4,−1	$+0.01$	$+0.04$	-0.01	$+0.02$	$+0.02$	0.00
$-2,-2$	$+0.02$	-0.01	$+0.02$	-0.01	$+0.03$	0.00
$-1,-2$	-0.25	$+0.49$	$+0.02$	-0.58	-0.05	$+0.16$
0,−2	$+11.09$ $+0.00535nt$	$+12.64$ $-0.00342nt$	$+5.75$ $+0.00218nt$	-6.06 $+0.00133nt$	$+8.94$	-4.48
1,−2	-176.33 $+0.04679nt$	-167.15 $-0.04184nt$	$+44.32$ $-0.00223nt$	-38.91 $-0.00144nt$	-12.85	$+11.59$
2,−2	-189.31 $-0.00276nt$	-133.12 $+0.00415nt$	$+112.97$ $+0.00146nt$	-79.69 $+0.00214nt$	-5.13	$+3.89$
3,−2	$+3.23$ $-0.00049nt$	$+3.45$ $+0.00179nt$	$+0.77$ $+0.00021nt$	$+0.14$ $+0.00080nt$	$+0.52$	-0.90
4,−2	$+0.30$	$+0.08$	-0.23	$+0.08$	-0.01	$+0.03$
$-1,-3$	$+0.41$	$+0.25$	-0.01	-0.05	-0.02	$+0.06$
0,−3	-18.87 $+0.00289nt$	-10.38 $+0.00044nt$	-11.05 $+0.00118nt$	$+5.87$ $-0.00062nt$	-6.55 $+0.00462nt$	$+4.09$ $+0.01456nt$
1,−3	-627.22 $-0.01911nt$	-653.00 $-0.37649nt$	-48.53 $-0.00179nt$	$+20.15$ $+0.01100nt$	$+2.74$ $-0.01096nt$	$+12.49$ $-0.00189nt$
2,−3	$+749.27$ $+0.01164nt$	$+0.67$ $+0.04121nt$	-360.62 $-0.00566nt$	-0.14 $+0.02032nt$	-39.02 $-0.00098nt$	-95.01 $+0.01691nt$
3,−3	$+3.87$ $-0.00230nt$	-14.79 $-0.00680nt$	-13.38 $+0.00094nt$	-10.29 $-0.00243nt$	-0.69 $-0.01329nt$	-1.04 $+0.00288nt$
4,−3	-0.42 $-0.00013nt$	$+0.04$ $+0.00002nt$	-0.11 $+0.00011nt$	-0.30 $-0.00011nt$	$+0.20$ $-0.00059nt$	$+0.21$ $+0.00040nt$
5,−3	-0.07	$+0.10$	$+0.06$	$+0.09$		
0,−4	-0.23	-0.15	-0.20	$+0.07$	-0.20	-0.04
1,−4	-2.49	$+0.70$	-1.17	-0.06	$+0.36$	$+1.17$
2,−4	$+31.16$	-4.05	-11.16	-2.78	-4.10	-2.91
3,−4	$+5.43$	-17.34	-4.03	-11.07	-3.20	$+0.17$
4,−4	$+1.40$	$+4.77$	-1.27	$+3.47$	$+0.25$	$+0.05$
5,−4	$+0.10$	-0.02	-0.11	$+0.10$	-0.09	$+0.05$
6,−4	-0.03	-0.04	$+0.03$	-0.04		
0,−5	-0.01	-0.03	-0.02	$+0.01$	-0.03	0.00
1,−5	-0.43	$+0.60$	-0.29	-0.19	-0.05	$+0.43$
2,−5	$+18.14$	$+3.50$	-2.93	-0.21	-0.46	-0.48

3,−5	+0″19	−12″99	−0″57	−7″22	−3″07	+2″37
4,−5	+2.35	+2.07	−1.84	+1.48	+0.19	−0.63
5,−5	−1.29	+0.01	+1.06	+0.05	−0.05	+0.07
6,−5	−0.04	+0.04	+0.07	+0.04	−0.01	−0.03
1,−6	+0.26	−0.14	+0.18	+0.11	+0.07	−0.29
2,−6	+19.52	+1.47	+1.40	+0.35	−0.31	+0.18
3,−6	−4.18	+12.46	+1.88	+5.75	+1.82	−2.48
4,−6	+2.32	+0.19	−1.25	+0.37	−0.25	−0.67
5,−6	−0.85	+0.55	+0.64	+0.43	+0.15	+0.11
6,−6	+0.11	−0.38	−0.08	−0.32	−0.02	−0.03
7,−6	−0.01	−0.02	0.00	−0.03	+0.01	0.00
2,−7	+0.08	−0.07	+0.04	+0.05	−0.06	−0.02
3,−7	−0.57	+1.77	+0.12	+0.58	+0.14	−0.14
4,−7	+0.79	+0.22	−0.48	+0.21	−0.20	−0.24
5,−7	−0.27	+0.39	+0.21	+0.27	+0.16	0.00
6,−7	−0.10	−0.34	+0.08	−0.28	−0.05	+0.03
7,−7	+0.11	−0.07	−0.10	+0.05	+0 01	0.00
2,−8	0.00	−0.04	0.00	+0.02		
3,−8	−0.58	+1.45	+0.03	+0.21	+0.05	−0.01
4,−8	+0.79	+0.35	−0.44	+0.22	−0.16	−0.18
5,−8	−0.10	+0.16	+0.08	+0.11	+0.07	−0.03
6,−8	−0.11	−0.13	+0.08	−0.11	−0.02	+0.05
7,−8	+0.13	0.00	−0.11	0.00	0.00	−0.02
8,−8	−0.03	+0.03	+0.03	+0.03		
3,−9	−0.45	+0.57	−0.02	−0.06		
4,−9	−0.61	−0.33	+0.27	−0.15		
5,−9	−0.04	+0.06	+0.04	+0.04		
6,−9	−0.04	−0.01	+0.03	−0.02		
7,−9	+0.06	−0.03	−0.05	−0.02		
8,−9	−0.02	+0.05	+0.01	+0.04		
4,−10	−0.11	−0.08	+0.03	−0.02		
5,−10	−0.03	+0.05	+0.03	+0.03		
6,−10	−0.02	−0.02	+0.01	−0.02		
7,−10	+0.02	−0.02	−0.02	−0.01		
8,−10	0.00	+0.03	0.00	+0.02		

Hiezu kommen noch die folgenden Ausdrücke des Art. 80

$$I = +0''00241\,\frac{nt}{\cos i}$$

$$\delta_2 u = \begin{Bmatrix} -0''0000022 \\ -0.0001502\sin\varepsilon + 0''0000265\cos\varepsilon \end{Bmatrix} n^2t^2 \sin i \cos(\pi-\theta)$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0''0000004 \\ +0.0000265\sin\varepsilon - 0''0000047\cos\varepsilon \end{Bmatrix} n^2t^2 \sin i \sin(\pi-\theta)$$

die mit den obigen vereinigt werden können, wenn die Wahl der Fundamentalebene getroffen worden ist, wodurch die für i und $\pi-\theta$ zu substituirenden numerischen Werthe gegeben werden. Da für die Egeria mit einer hier jedenfalls ausreichenden Genauigkeit in Bezug auf die Ekliptik

$$i = 16^\circ 33'$$
$$\theta = 43\ 17$$
$$\pi = 119\ 12$$

ist, und hieraus in Bezug auf den Aequator

$$i = 37^\circ 10'$$
$$\pi-\theta = 102\ 46$$

folgt, so werden die obigen Ausdrücke

1) wenn man die Ekliptik zur Fundamentalebene wählt,

$$\Gamma = +0''.00251\,nt$$
$$\delta_2 u = \quad 0.0000000\,n^2t^2$$
$$- 0.0000031\,n^2t^2 \sin\varepsilon + 0''.0000005\,n^2t^2\cos\varepsilon$$

2) wenn man den Aequator zur Fundamentalebene wählt,

$$\Gamma = +0''.00302\,nt$$
$$\delta_2 u = +0''.0000005\,n^2t^2$$
$$+ 0.0000357\,n^2t^2\sin\varepsilon - 0''.0000063\,n^2t^2\cos\varepsilon$$

Es kommen ferner noch die im Art. 59 (II) gegebenen Werthe der vom Saturn und Mars bewirkten Störungen hinzu, von welchen jedoch die Abtheilung $i'=0$ weggelassen werden muss, weil die Glieder dieser Abtheilung den vorstehenden Ausdrücken schon einverleibt worden sind. Da jene Saturn- und Marsstörungen unverändert dieselben bleiben, wie a. a. O., so habe ich ihre Wiederholung hier für unnöthig gehalten.

§. 8. Verwandlung der elliptischen Elemente.

95.

Es treten manchmal Fälle ein, in welchen es nothwendig wird, die für einen gewissen Zeitpunkt geltenden osculirenden Elemente in andere zu verwandeln, die einem andern, gegebenen Zeitpunkt zukommen, und ich werde daher hier die Aufgabe lösen, das eine dieser Systeme durch die gegebenen Störungen in das andere zu verwandeln. Ich könnte hiefür auf No. 800 der Astr. Nachr. verweisen, wo ich schon eine Auflösung dieser Aufgabe gegeben habe, allein um in dieser Abhandlung keine Lücke zu lassen, und weil hier einige Grössen anders sind, und anders bezeichnet worden sind wie dort, werde ich die Auflösung dieser Aufgabe mit einem Paar kleiner Veränderungen in der äusseren Form hier aufnehmen. Ich werde sie hier wie dort erst strenge lösen, und dann eine blos die ersten und zweiten Potenzen der störenden Kräfte berücksichtigende Auflösung aus jener ableiten.

96.

Es sollen wie vorher a_0, n_0, e_0, etc. die gegebenen, dem Zeitpunkt $t=0$ zukommenden osculirenden Elemente bedeuten, und mit a_1, n_1, e_1, etc. die gesuchten, dem Zeitpunkt t_1 zukommenden bezeichnet werden. Die

für den letzteren Zeitpunkt geltenden übrigen Grössen werde ich auch, wo es nöthig ist, unten mit einem Strich versehen. Wenn nun die Störungen auf die Art, die hier erklärt worden ist, ausgedrückt sind, so erhalten wir, nachdem in den Ausdrücken für $n_0 z$, ν, i, θ, σ die dem Zeitpunkt t_1 zukommenden Werthe von ε und c' substituirt worden sind, die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(n_0 z)_1 &= \overline{\varepsilon} - e_0 \sin \overline{\varepsilon} \\
\overline{r} \cos \overline{f} &= a_0 \cos \overline{\varepsilon} - a_0 e_0 \\
\overline{r} \sin \overline{f} &= a_0 \cos \varphi_0 \sin \overline{\varepsilon} \\
v &= \overline{f} + \pi_0 \\
r &= \overline{r}(1 + \nu_1) \\
a_0^3 n_0^2 &= k^2(1+m) \\
\cos b_1 \sin (l_1 - \theta_1) &= \cos i_1 \sin (v - \sigma_1) \\
\cos b_1 \cos (l_1 - \theta_1) &= \cos (v - \sigma_1) \\
\sin b_1 &= \sin i_1 \sin (v - \sigma_1)
\end{aligned}$$

In der That sind im Vorhergehenden statt der Ausdrücke für i, θ, σ die für u, $\frac{du}{d\varepsilon}$, Γ ermittelt worden, allein die Abhängigkeit der letzteren von den ersteren ist entwickelt worden, und wir können daher jene statt dieser als durch das Vorhergehende gegeben betrachten. Wir kommen durch diese Transmutation auf eine einfachere Auflösung unserer Aufgabe.

Da a_1, n_1, etc. osculirende Elemente sind, so erhalten wir anderentheils die folgenden Gleichungen,

$$\begin{aligned}
n_1 t_1 + c_1 &= \varepsilon - e_1 \sin \varepsilon \\
r \cos f &= a_1 \cos \varepsilon - a_1 e_1 \\
r \sin f &= a_1 \cos \varphi_1 \sin \varepsilon \\
v_1 &= f + \pi_1 \\
a_1^3 n_1^2 &= k^2(1+m) \\
\cos b_1 \sin (l_1 - \theta_1) &= \cos i_1 \sin (v_1 - \theta_1) \\
\cos b_1 \cos (l_1 - \theta_1) &= \cos (v_1 - \theta_1) \\
\sin b_1 &= \sin i_1 \sin (v_1 - \theta_1)
\end{aligned}$$

zu welchen Gleichungen ich die Voraussetzung stelle, dass c_1 so bestimmt sei, dass man, um in der That die Werthe von l_1, b_1 und r_1 aus den vorstehenden Gleichungen zu erhalten, darin $t_1 = 0$ setzen muss.

Um die drei letzten Gleichungen dieses Systems mit den drei letzten Gleichungen des vorhergehenden Systems identisch zu machen, führe ich wieder unter der Bezeichnung χ_1 den Bogen ein, welcher sich zur Zeit t_1 in der Ebene der XY (S. §. 1 (I)) von der positiven XAchse bis zum Perihel erstreckt. Es wird hiedurch

$$\chi_1 - \sigma_1 = \pi_1 - \theta_1 \tag{32}$$

und zufolge des Art. 18 des §. 3 (I)

$$v = f + \chi_1$$

Hieraus folgt

$$v_1 - \theta_1 = v - \sigma_1$$

wodurch die Identität der genannten Gleichungen dargethan ist.

97.

Da v und r ideale Coordinaten sind, so geben die Gleichungen des vor. Art. einestheils

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a_0^2 \cos\varphi_0}{\overline{r}^2} \frac{d(n_0 z)_1}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a_0 e_0 \sin \overline{f}}{\cos\varphi_0} \frac{d(n_0 z)_1}{dt} (1+\nu_1) + \overline{r} \frac{d\nu_1}{dt}$$

und anderntheils

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a_1^2 n_1 \cos\varphi_1}{r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a_1 n_1 e_1 \sin f}{\cos\varphi_1}$$

Hieraus folgen die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{a_1^2 n_1 \cos\varphi_1}{r^2} = \dfrac{a_0^2 \cos\varphi_0}{\overline{r}^2} \dfrac{d(n_0 z)_1}{dt} \\ \dfrac{a_1 n_1 e_1 \sin f}{\cos\varphi_1} = \dfrac{a_0 e_0 \sin \overline{f}}{\cos\varphi_0} \dfrac{d(n_0 z)_1}{dt} (1+\nu_1) + \overline{r} \dfrac{d\nu_1}{dt} \end{cases} \tag{33}$$

Setzt man wie früher

$$h_0 = \frac{a_0 n_0}{\cos\varphi_0}; \quad h_1 = \frac{a_1 n_1}{\cos\varphi_1} \tag{34}$$

woraus vermittelst der Gleichung $a_0^3 n_0^2 = a_1^3 n_1^2 = k^2(1+m)$

$$a_0^2 n_0 \cos\varphi_0 = \frac{k^2(1+m)}{h_0}; \quad a_1^2 n_1 \cos\varphi_1 = \frac{k^2(1+m)}{h_1}$$

folgt, so giebt in Verbindung mit $r = \overline{r}(1+\nu_1)$ die erste der Gleichungen (33)

$$h_1 = \frac{h_0}{\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}(1+\nu_1)^2} \tag{35}$$

die mit früher in diesen Abhandlungen vorgekommenen Gleichungen identisch ist, und aus welcher man h_1 berechnen kann. Durch die eben eingeführten Grössen h_0 und h_1, sowie durch Hülfe der Gleichungen

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e_1\cos f}{a_1\cos^2\varphi_1}; \quad \frac{1}{\overline{r}} = \frac{1+e_0\cos\overline{f}}{a_0\cos^2\varphi_0}$$

lassen sich die Gleichungen (33) leicht in die folgenden verwandeln,

$$h_1(1+e_1\cos f) = h_0(1+e_0\cos\overline{f})\frac{d(n_0z)_1}{n_0\,dt}(1+\nu_1)$$

$$h_1 e_1\sin f \qquad = h_0 e_0\sin\overline{f}\,\frac{d(n_0z)_1}{n_0\,dt}(1+\nu_1) + \overline{r}\frac{d\nu_1}{dt}$$

und eliminirt man hieraus h_1 durch (35), so ergiebt sich

$$1+e_1\cos f = (1+e_0\cos\overline{f})\left(\frac{d(n_0z)_1}{n_0\,dt}\right)^2(1+\nu_1)^3$$

$$e_1\sin f = e_0\sin\overline{f}\left(\frac{d(n_0z)_1}{n_0\,dt}\right)^2(1+\nu_1)^3 + \frac{r}{h_0}\left(\frac{d(n_0z)_1}{n_0\,dt}\right)\left(\frac{d\nu_1}{dt}\right)(1+\nu_1)^2$$

Um diese Gleichungen zusammenzuziehen, setze ich

$$\alpha = \left(\frac{d(n_0z)_1}{n_0\,dt}\right)^2(1+\nu_1)^3 - 1; \quad \beta = \frac{\overline{r}}{h_0}\left(\frac{d(n_0z)_1}{n_0\,dt}\right)\left(\frac{d\nu_1}{dt}\right)(1+\nu_1)^2$$

wodurch sie in

$$e_1\cos f = e_0\cos\overline{f} + \alpha(1+e_0\cos\overline{f})$$

$$e_1\sin f = e_0\sin f + \alpha e_0\sin f + \beta$$

übergehen, und α und β kleine Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte sind. Die Gleichungen

$$v = \overline{f} + \pi_0; \quad v = f + \chi_1$$

des vor. Art. geben aber

$$\chi_1 - \pi_0 = \overline{f} - f$$

und daher bekommt man aus den beiden vorstehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} e_1\sin(\chi_1-\pi_0) &= \alpha\sin\overline{f} - \beta\cos\overline{f} \\ e_1\cos(\chi_1-\pi_0) &= e_0 + \alpha(\cos\overline{f}+e_0) + \beta\sin\overline{f} \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

die zur strengen Bestimmung von e_1 und χ_1 dienen.

98.

Wenn man aus den Ausdrücken (34) a_1 und a_0 vermittelst der Gleichung $a_0^3 n_0^2 = a_1^3 n_1^2$ eliminirt, so bekommt man

$$n_1 = n_0\left(\frac{h_1\cos\varphi_1}{h_0\cos\varphi_0}\right)^3 \qquad (37)$$

eliminirt man dagegen n_1 und n_0, so ergiebt sich

$$a_1 = a_0\left(\frac{h_0\cos\varphi_0}{h_1\cos\varphi_1}\right)^2 \qquad (37^*)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\eta = \alpha \sin \bar{f} - \beta \cos \bar{f}$$
$$\xi = \alpha (\cos \bar{f} + e_0) + \beta \sin \bar{f}$$

so geben die (36)

$$\cos^2 q_1 = \cos^2 q_0 \left\{ 1 - \frac{2e_0 \xi}{\cos^2 q_0} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{\cos^2 q_0} \right\}$$

Durch diese und (37) oder bez. (37*) erhält man

$$(38) \qquad n_1 = n_0 \frac{\left\{ 1 - \frac{2e_0 \xi}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{\cos^2 \varphi_0} \right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} \right)^3 (1 + \nu_1)^6}$$

und

$$(38^*) \qquad a_1 = a_0 \frac{\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} \right)^2 (1 + \nu_1)^4}{1 - \frac{2e_0 \xi}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{\cos^2 \varphi_0}}$$

Man braucht aber nur durch einen dieser vier Ausdrücke entweder n_1 oder a_1 zu berechnen, denn man erhält darauf

$$\text{entweder } a_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{k}{n_1}\right)^2}, \quad \text{oder } n_1 = \frac{k}{a_1^{\frac{3}{2}}}$$

die einfacher sind wie jene.

99.

Das vierte Element c_1 kann man direct auf folgende Art finden. Nachdem χ_1 durch (36) berechnet worden ist, erhält man

$$f = \bar{f} - \chi_1 + \pi_0$$

und aus f und dem auch schon als berechnet vorausgesetzten Werthe von e_1 oder φ_1 ergiebt sich ε aus

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin f \cos \varphi_1}{\cos f + \sin \varphi_1}$$

worauf man c_1 durch

$$c_1 = \varepsilon - e_1 \sin \varepsilon$$

erhält.

100.

Wenn man u, p, q auf die Zeit t_1 bezieht, so können wir zufolge des Art. 26 (I) setzen

$$\frac{u_1}{\cos i_1} = \frac{\bar{r}}{a_0} q_1 \sin (\bar{f} + \pi_0 - \theta_0) - \frac{\dot{r}}{a_0} p_1 \cos (\bar{f} + \pi_0 - \theta_0)$$

und hieraus folgt

$$\frac{du_1}{\cos i_0\, dt} = \frac{h_0}{a_0} q_1 \{\cos(\bar{f}+\pi_0-\theta_0) + e_0 \cos(\pi_0-\theta_0)\}\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right)$$
$$+ \frac{h_0}{a_0} p_1 \{\sin(\bar{f}+\pi_0-\theta_0) + e_0 \sin(\pi_0-\theta_0)\}\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right)$$

Durch die Elimination ergiebt sich hieraus

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\frac{u_1}{\cos i_0 \cos^2 q_0}\{\cos(\bar{f}+\pi_0-\theta_0) + e_0\cos(\pi_0-\theta_0)\} \\ &\quad + \frac{\bar{r}\frac{du_1}{dt}}{\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right) h_0 \cos i_0 \cos^2 q_0} \sin(\bar{f}+\pi_0-\theta_0) \\ q_1 &= \frac{u_1}{\cos i_0 \cos^2 q_0}\{\sin(\bar{f}+\pi_0-\theta_0) + e_0 \sin(\pi_0-\theta_0)\} \\ &\quad + \frac{\bar{r}\frac{du_1}{dt}}{\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right) h_0 \cos i_0 \cos^2 q_0} \cos(\bar{f}+\pi_0-\theta_0) \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Von der anderen Seite ist aber

$$\sin i_1 \sin(\sigma_1-\theta_0) = p_1 \cos i_0$$
$$\sin i_1 \cos(\sigma_1-\theta_0) = \sin i_0 + q_1 \cos i_0$$

Substituirt man daher, und führt die durch die folgenden Gleichungen zu bestimmenden Hülfsgrössen λ und l ein,

$$\left.\begin{aligned} \lambda \sin l &= \sin \bar{f} \\ \lambda \cos l &= \cos \bar{f} + e_0 \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} \sin i_1 \sin(\sigma_1-\theta_0) &= -\frac{u_1}{\cos^2 q_0}\lambda\cos(l+\pi_0-\theta_0) + \frac{\bar{r}\frac{du_1}{dt}}{\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right) h_0 \cos^2 q_0} \sin(\bar{f}+\pi_0-\theta_0) \\ \sin i_1 \cos(\sigma_1-\theta_0) &= \sin i_0 + \frac{u_1}{\cos^2 q_0}\lambda \sin(l+\pi_0-\theta_0) + \frac{\bar{r}\frac{du_1}{dt}}{\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right) h_0 \cos^2 q_0} \cos(\bar{f}+\pi_0-\theta_0) \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

welches die strengen Gleichungen für i_1 und σ_1 sind. Sind diese berechnet, so ergiebt sich θ_1 aus dem Quotienten der beiden letzten Gleichungen (20) (I), nemlich aus

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\theta_1-\theta_0-\Gamma_1) = \frac{\cos\frac{1}{2}(i_1-i_0)}{\cos\frac{1}{2}(i_1+i_0)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\sigma_1-\theta_0 \quad (42)$$

und endlich erhält man aus (32)

$$\pi_1 = \chi_1 - \sigma_1 + \theta_1 \quad (43)$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

101.

Um aus dieser strengen Auflösung unserer Aufgabe eine genäherte, nur die ersten und zweiten Potenzen der störenden Kräfte berücksichtigende, Auflösung abzuleiten, nehme ich zuerst die Gleichungen (36) wieder vor, nemlich

$$\sin\varphi_1 \sin(\chi_1 - \pi_0) = \eta$$
$$\sin\varphi_1 \cos(\chi_1 - \pi_0) = \sin\varphi_0 + \xi$$

in welchen

$$\eta = \alpha \sin\overline{f} - \beta\cos\overline{f}$$
$$\xi = \alpha(\cos\overline{f} + e_0) + \beta\sin\overline{f}$$

ist. Aus diesen zieht man leicht bis auf Grössen von der Ordnung α^3 und β^3

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \varrho\frac{\xi}{\cos\varphi_0} + \varrho\frac{e_0\xi^2}{2\cos^3\varphi_0} + \varrho\frac{\eta^2}{2e_0\cos\varphi_0}$$
$$\chi_1 = \pi_0 + \varrho\frac{\eta}{e_0} - \varrho\frac{\xi\eta}{e_0^2}$$

wo ξ und η in Theilen des Radius ausgedrückt vorausgesetzt werden und, gleichwie im Folgenden,

$$\varrho = 206265''$$

ist. Wegen der in diesen Ausdrücken vorkommenden Divisionen durch e_0 ereignet sich es oft, dass die Glieder zweiter Ordnung merklich werden, wenngleich α^2 und β^2 an sich unmerklich sind. In den Ausdrücken für ξ und η kann man die wahre Anomalie durch die excentrische ersetzen; man findet leicht, dass

$$\xi = D\alpha + E\beta$$
$$\eta = E\alpha - F\beta$$

wird, wenn man

$$(44)\qquad \left.\begin{aligned} D &= \frac{\cos^2\varphi_0\cos\overline{\varepsilon}}{1-e_0\cos\overline{\varepsilon}} \\ E &= \frac{\cos\varphi_0\sin\overline{\varepsilon}}{1-e_0\cos\overline{\varepsilon}} \\ F &= \frac{\cos\overline{\varepsilon}-e_0}{1-e_0\cos\overline{\varepsilon}} \end{aligned}\right\}$$

setzt, und wenn die Störungen so gross sind, dass es nöthig wird in α und β die Quadrate und Producte derselben zu berücksichtigen, so geschieht dieses am Einfachsten auf die folgende Art. Sei vor Allem

$$\frac{d\delta z_1}{dt} = \frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} - 1$$

und ferner

$$A = \frac{d\delta z_1}{dt} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\delta z_1}{dt}\right)^2$$

$$B = 2A + 3(\nu_1 - \tfrac{1}{2}\nu_1^2)$$

wo auch vorausgesetzt ist, dass $\frac{d\delta z}{dt}$ und ν in Theilen des Radius ausgedrückt sind, dann wird bis auf Grössen dritter Ordnung

$$\alpha = B + \tfrac{1}{2}B^2$$

Setzt man ferner

$$C = 2B - A$$

und bezeichnet mit M den Modul der Briggischen Logarithmen, so erhält man

$$\log \mathrm{br}\, \beta = \tfrac{1}{3}MC + \log \mathrm{br}\, \frac{d\nu_1}{d\varepsilon} + \log \mathrm{br} \cos \varphi_0 + M \frac{e_0 E}{\cos \varphi_0} (n_0 \delta z)_1$$

*) wo auch $\frac{d\nu_1}{d\varepsilon}$ und $(n_0 \delta z)_1$ in Theilen des Radius ausgedrückt werden müssen. Das letzte Glied dieses Ausdrucks wird gemeiniglich übergangen werden können. Setzt man ferner

$$b = 1 - \frac{1}{\left(\frac{d(n_0 \delta z)_1}{n_0\, dt}\right)^3 (1+\nu_1)^6}$$

und löst die rechte Seite der Gleichung (38) in eine Reihe auf, so findet man

$$n_1 = n_0 - n_0 \left\{ b + \frac{3 e_0 \xi}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{3 e_0 \xi}{\cos^2 \varphi_0} b + \tfrac{3}{2} \frac{1 - 2 e_0^2}{\cos 4 \varphi_0} \xi^2 + \tfrac{3}{2} \frac{\eta^2}{\cos^2 \varphi_0} \right\}$$

für welche Bestimmung b sich durch den folgenden einfachen Ausdruck ergiebt,

$$b = C - \tfrac{1}{2}C^2$$

Die Gleichung $a_1^3 n_1^2 = a_0^3 n_0^2$ giebt ferner

$$\log \mathrm{br}\, a_1 = \log \mathrm{br}\, a_0 - \tfrac{2}{3} M \frac{n_1 - n_0}{n_0} + \tfrac{1}{3} M \left(\frac{n_1 - n_0}{n_0}\right)^2$$

Man kann auch erst a_1 und dann n_1 rechnen, wobei die Berechnung von b überflüssig wird. Man findet leicht

$$\log \mathrm{br}\, a_1 = \log \mathrm{br}\, a_0 + M(B + \nu_1 - \tfrac{1}{2}\nu_1^2) + M \frac{2 e_0 \xi}{\cos^2 \varphi_0} + M \frac{1 + e_0^2}{\cos^4 \varphi_0} \xi^2 + M \frac{\eta^2}{\cos^2 \varphi_0}$$

und hierauf wird

$$n_1 = n_0 - \tfrac{3}{2} n_0 \frac{\log \mathrm{br}\, a_1 - \log \mathrm{br}\, a_0}{M} + \tfrac{9}{8} n_0 \left\{ \frac{\log \mathrm{br}\, a_1 - \log \mathrm{br}\, a_0}{M} \right\}^2$$

*) Wenn $\frac{\delta \nu_1}{d\varepsilon}$ negativ ist, wird $\log \mathrm{br}\, \beta$ nach dieser Formel grade ebenso berechnet, als wäre $\frac{\delta \nu_1}{d\varepsilon}$ positiv, aber der $\log \mathrm{br}\, \beta$, den man bekommt, muss als zu einer negativen Zahl gehörig betrachtet werden. Nemlich β wird negativ.

102.

Um c_1 zu entwickeln, betrachte ich die mittlere Anomalie überhaupt, die ich wieder mit g bezeichnen werde, als Function der wahren Anomalie und des Excentricitätswinkels, und bekomme daher allgemein bis Grössen dritter Ordnung

$$\delta g = \left(\frac{dg}{df}\right)\delta f + \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)\delta\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2g}{df^2}\right)\delta f^2 + \left(\frac{d^2g}{df\,d\varphi}\right)\delta f\,\delta\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2g}{d\varphi^2}\right)\delta\varphi^2$$

Die Gleichung

$$df = \frac{a^2\cos\varphi}{r^2}\,dg + \left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{a\cos\varphi}{r}\right)\sin f\,d\varphi$$

giebt nun

$$\left(\frac{dg}{df}\right) = \frac{r^2}{a^2\cos\varphi}\;;\quad \left(\frac{dg}{d\varphi}\right) = -\left(\frac{r^2}{a^2\cos^2\varphi} + \frac{r}{a}\right)\sin f$$

Die Gleichung $r = \frac{a\cos^2\varphi}{1+\sin\varphi\cos f}$ giebt ferner, wenn wir r als Function von f und φ betrachten,

$$\left(\frac{dr}{df}\right) = \frac{r^2\sin\varphi\sin f}{a\cos^2\varphi}$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) = -\frac{r^2\cos f}{a\cos\varphi} - 2\,\frac{r\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Durch Hülfe dieser Gleichung werden die Differentiale der vorstehenden

$$\left(\frac{d^2g}{df^2}\right) = 2\,\frac{r^3\sin\varphi\sin f}{a^3\cos^3\varphi}$$

$$\left(\frac{d^2g}{df\,d\varphi}\right) = -\frac{r^2}{a^2\cos^2\varphi}\,(2\cos\varepsilon + \sin\varphi)$$

$$\left(\frac{d^2g}{d\varphi^2}\right) = \frac{r^2\sin f}{a^2\cos^3\varphi}\,\{2\cos\varepsilon + 2\sin\varphi + (1+\sin^2\varphi)\cos f\}$$

Wenden wir diese Formeln auf unseren Fall an, und erwägen, dass

$$\delta f = f - \bar{f} = -\chi_1 + \pi_0 = -\frac{\eta}{e_0} + \frac{\xi\eta}{e_0^2}$$

$$\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 = \frac{\xi}{\cos\varphi_0} + \frac{e_0\xi^2}{2\cos^3\varphi_0} + \frac{\eta^2}{2e_0\cos\varphi_0}$$

$$\delta g = c_1 - nz_1$$

ist, führen auch allenthalben die excentrische Anomalie ein, so wird

$$c_1 = nz_1 - \xi P - \eta Q + \xi^2 R + \xi\eta S - \eta^2 R\cos^2\varphi_0$$

wo

$$P = \varrho\,\frac{\sin\bar{\varepsilon}}{\cos^2\varphi_0}\,\{2 - e_0^2 - e_0\cos\bar{\varepsilon}\}$$

$$Q = \varrho\,\frac{(1-e_0\cos\bar{\varepsilon})^2}{e_0\cos\varphi_0}$$

$$R = \varrho\,\frac{\sin\bar{\varepsilon}}{2\cos^2\varphi_0}\,\{3(\cos\bar{\varepsilon} - e_0) + 2e_0\sin^2\bar{\varepsilon}\}$$

$$S = \varrho\,\frac{(1-e_0\cos\bar{\varepsilon})^2}{e_0^2\cos^3\varphi_0}\,(1 + 2e_0\cos\bar{\varepsilon})$$

103.

Ein anderes Verfahren, um c_1 zu finden, besteht in Folgendem. Betrachtet man erst f als Function von ε und φ, so findet man leicht

$$df = \frac{a\cos\varphi}{r}\,d\varepsilon + \frac{a\sin\varepsilon}{r}\,d\varphi$$

und hieraus, wenn man entgegengesetzt ε als Function von f und φ betrachtet,

$$\left(\frac{d\varepsilon}{df}\right) = \frac{r}{a\cos\varphi}\,,\quad \left(\frac{d\varepsilon}{d\varphi}\right) = -\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi}$$

Diese geben durch die Differentiation und mit Zuziehung der Ausdrücke des vor. Art. für $\left(\frac{dr}{df}\right)$ und $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)$

$$\left(\frac{d^2\varepsilon}{df^2}\right) = \frac{er\sin\varepsilon}{a\cos^2\varphi}$$

$$\left(\frac{d^2\varepsilon}{df\,d\varphi}\right) = -\frac{r\cos\varepsilon}{a\cos^2\varphi}$$

$$\left(\frac{d^2\varepsilon}{d\varphi^2}\right) = \frac{(\cos\varepsilon - e)\sin\varepsilon}{\cos^2\varphi}$$

und da allgemein

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{d\varepsilon}{df}\right)\delta f + \left(\frac{d\varepsilon}{d\varphi}\right)\delta\varphi$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\varepsilon}{df^2}\right)\delta f^2 + \left(\frac{d^2\varepsilon}{df\,d\varphi}\right)\delta f\,\delta\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\varepsilon}{d\varphi^2}\right)\delta\varphi^2$$

ist, so giebt die Substitution der im Vorhergehenden entwickelten Functionen

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} - \xi P' - \eta Q' + \xi^2 R' + \xi\eta S' + \eta^2 T'$$

wo

$$P' = \varrho\,\frac{\sin\bar{\varepsilon}}{\cos^2\varphi_0}$$

$$Q' = \varrho\,\frac{1 - e_0\cos\varepsilon}{e_0\cos\varphi_0}$$

$$R' = P'\,\frac{\cos\varepsilon - 2e_0}{2\cos^2\varphi_0}$$

$$S' = Q'\,\frac{\cos^2\varphi_0 + e_0\cos\bar{\varepsilon}}{e_0\cos^2\varphi_0}$$

$$T' = -\tfrac{1}{2}P'\cos\varepsilon$$

Nachdem man also zuerst den Werth von $\bar{\varepsilon}$, welcher ohnehin gebraucht wird, durch

$$(\mu_0 z)_1 = \bar{\varepsilon} - \varrho e_0\sin\bar{\varepsilon}$$

auf bekannte Art berechnet hat*), giebt der vorstehende Ausdruck ε, und hierauf erhält man c_1 durch

$$c_1 = \varepsilon - \varrho e_1\sin\varepsilon$$

*) Das von Gauss hiefür in der Theoria motus entwickelte Verfahren ziehe ich allen anderen vor, und will es daher mit anders ausgedrückter Vorschrift über die Bestimmung des Zeichens von λ kurz angeben. Sei E' ein nach Gutdünken angenommener

Ich bemerke übrigens, dass die Bestimmung von c_1 durch die strengen Formeln des Art. 99 kaum mehr Mühe verursacht. Man findet leicht, dass

$$\operatorname{tg} \bar{f} = \frac{E}{F}$$

wird, wo E und F die durch (44) gegebenen, und auch anderweitig anzuwendenden Coefficienten sind. Hat man hieraus f berechnet, so wird

$$\begin{aligned} f &= \bar{f} - \chi_1 + \pi_0 \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{\sin f \cos \varphi_1}{\cos f + \sin \varphi_1} \\ c_1 &= \varepsilon - \varrho \sin \varphi_1 \sin \varepsilon \end{aligned}$$

wie oben.

104.

Es muss noch angegeben werden, wie die oben eingeführte Function

$$\frac{d\delta z_1}{dt} = \frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} - 1$$

am Zweckmässigsten berechnet wird. Dem Vorhergehenden zufolge ist überhaupt $n_0 z$ in folgender Form erhalten worden,

$$n_0 z = (n)t + c + n_0 \delta z$$

wo (n) die wahre mittlere Bewegung und $n_0 \delta z$ explicite Function von ε_0 ist. Das Differential von $n_0 \delta z$ nach ε_0 erhält man daher auf die im vor. § angegebene Art, nemlich durch Multiplication der Coefficienten mit den Integrationsdivisoren und durch Verwandelung von sin in cos und cos in $-$ sin. Es wird daher zuerst

$$\frac{d.n_0 z}{n_0 dt} = \frac{(n)}{n_0} + \left(\frac{dn_0 \delta z}{d\varepsilon}\right)\left(\frac{d\varepsilon_0}{n_0 dt}\right)$$

Werth von ε, dessen Auswahl durch die Bemerkung geleitet werden kann, dass im Maximum $\varepsilon - nz_1 = \pm \varrho e_0$ ist, und bei $\bar{\varepsilon} = \pm 90^0$ stattfindet. Sei ferner λ die durch die in den Sinustafeln angegebenen Differenzen unmittelbar zu entnehmende Veränderung des log sin E' für $1'$, welcher das algebraische Zeichen von cos E' vorgesetzt werden muss, und μ die auf dieselbe Weise zu entnehmende Veränderung von log ϱe_0 sin E' für $1''$, welche immer positiv angenommen werden muss. Rechnet man nun E durch folgenden Ausdruck

$$E = (n_0 z)_1 + \varrho e_0 \sin E' + \frac{\lambda}{\mu - \lambda}\left\{nz_1 + \varrho e_0 \sin E' - E'\right\}$$

so ist E ein mehr genäherter Werth von $\bar{\varepsilon}$, mit welchem die Rechnung wiederholt werden muss. Man nähert sich auf diese Weise sehr schnell und bis auf beliebige Genauigkeit dem wahren Werth von $\bar{\varepsilon}$.

und hieraus, da $(n)t + c = \varepsilon_0 - e_0 \sin \varepsilon_0$ ist

$$\frac{d\delta z_1}{dt} = \frac{(n)-n_0}{n_0} + \frac{(n)}{n_0}\left(\frac{d(n_0\delta z)_1}{d\varepsilon_0}\right)\frac{1}{1-e_0\cos\varepsilon_0}$$

Man wird sich begnügen können, in dem letzten Gliede dieses Ausdrucks $\bar{\varepsilon}$ statt ε_0 anzuwenden.

105.

Zur Bestimmung der Elemente, von welchen die Lage der Bahn abhängt, setze ich zufolge der Gleichungen (39) und (40)

$$p_1 = -\frac{u_1\lambda}{\cos i_0 \cos^2\varphi_0}\cos(l+\pi_0-\theta_0) + \frac{\frac{du_1}{d\varepsilon}-\frac{du_1}{d\varepsilon}\frac{d\delta z_1}{dt}}{\cos i_0 \cos\varphi_0}\sin(\bar{f}+\pi_0-\theta_0)$$

$$q_1 = \frac{u_1\lambda}{\cos i_0 \cos^2\varphi_0}\sin(l+\pi_0-\theta_0) + \frac{\frac{du_1}{d\varepsilon}-\frac{du_1}{d\varepsilon}\frac{d\delta z_1}{dt}}{\cos i_0 \cos\varphi_0}\cos(\bar{f}+\pi_0-\theta_0)$$

wo

$$\lambda \sin l = E, \quad \operatorname{tg}\bar{f} = \frac{E}{F}$$
$$\lambda \cos l = D,$$

und D, E, F wieder durch (44) gegeben sind, hierauf giebt die Reihenentwickelung von

$$\sin i_1 \sin(\sigma_1-\theta_0) = p_1 \cos i_0$$
$$\sin i_1 \cos(\sigma_1-\theta_0) = \sin i_0 + q_1 \cos i_0$$

die folgenden Ausdrücke für i_1 und σ_1

$$i_1 = i_0 + q_1 + p_1^2 \frac{\cos i_0}{2\varrho \sin i_0} + q_1^2 \frac{\sin i_0}{2\varrho \cos i_0}$$
$$\sigma_1 = \theta_0 + p_1 \frac{\cos i_0}{\sin i_0} - p_1 q_1 \frac{\cos^2 i_0}{\varrho \sin^2 i_0}$$

in welchen vorausgesetzt ist, dass p_1 und q_1 in Secunden ausgedrückt worden sind. Durch die Entwickelung von (42) findet man leicht

$$\theta_1 = \theta_0 + \Gamma_1 + \frac{1}{\cos i_0}(\sigma_1-\theta_0) + \frac{\sin i_0}{2\cos^2 i_0}(i_1-i_0)(\sigma_1-\theta_0)$$

welche nach der Substitution der vorstehenden Werthe von i_1 und σ_1

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{p_1}{\sin i_0} - p_1 q_1 \frac{2-3\sin^2 i_0}{2\varrho \sin^2 i_0 \cos i_0} + \Gamma_1$$

giebt. Aus der Gleichung $\pi_1 = \chi_1 - \sigma_1 + \theta_1$ erhält man schliesslich

$$\pi_1 = \chi_1 + p_1 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i_0 + p_1 q_1 \frac{(1+2\cos i_0)\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} i_0}{2\varrho \cos i_0} + \Gamma_1$$

womit alle Elemente gegeben sind.

106.

In der Abhandlung (I) habe ich schon angedeutet, dass die hier der Berechnung der Störungen der Egeria zu Grunde gelegten osculirenden Elemente wohl nicht die grösste Genauigkeit besitzen möchten, und der Grund zu dieser Annahme ist der, dass sie ein paar Jahre nach der Entdeckung der Egeria abgeleitet worden sind, und daher nur auf Beobachtungen beruhen, die eine zu kurze Zeit für die sichere Bestimmung der Elemente umfassen. Seitdem sind andere Bahnbestimmungen der Egeria bekannt gemacht worden, die, weil sie auf Beobachtungen beruhen, die zahlreicher sind und einen grösseren Zeitraum umfassen, mehr Genauigkeit besitzen müssen, wie die hier angewandten. Die eben gelöste Aufgabe kann nun dienen, um die in diesen Abhandlungen der numerischen Rechnung zu Grunde gelegten Elemente der Egeria mit den verbesserten Elementen zu vergleichen, ihre Fehler kennen zu lernen, und darauf die berechneten Störungscoefficienten zu berichtigen.

Der Umstand, dass die osculirenden Elemente, die man der Berechnung der Störungen irgend eines Planeten zu Grunde legt, nicht die erforderliche Genauigkeit besitzen, ist nie erwünscht, weil er die Arbeit vergrössert, und man muss ihn daher, wo man es kann, vermeiden. Allein es können Fälle vorkommen, in welchen er nicht hat vermieden werden können, und deshalb dürfen die Entwickelungen der Ausdrücke, die zur Verbesserung desselben dienen, nicht weggelassen werden. Dass dieser Umstand in dem hier gewählten Beispiel eingetreten ist, ist mir deshalb nicht unlieb, weil er mir Gelegenheit giebt, durch ein Beispiel zu zeigen, wie die darauf sich beziehenden Entwickelungen anzuwenden sind.

107.

Obgleich man für die Ermittelung der Fehler des angewandten Systems osculirender Elemente nur Ein solches System nöthig hat, so will ich doch die hier angewandten Elemente mit zwei anderen Systemen vergleichen, da hieraus eine Verification der Rechnung und der zwei anderen Systeme von Elementen hervorgeht. In No. 72 des »Astronomical Journal« hat Hubbard die folgenden verbesserten Elemente der Egeria veröffentlicht:

1851 Januar 1,0 m. Z. Berlin

$$\left.\begin{array}{ll} c = 299^0\ 7'\ 43''.6 & \\ \pi = 119\ 1\ 20.4 & \\ \theta = 43\ 17\ 3.3 & \end{array}\right\} \text{Aequinox der Epoche}$$

$$\begin{array}{ll} \varphi = 4\ 53\ 25.9 & \\ i = 16\ 33\ 8.6 & \\ n = 857''.7580 & \end{array}$$

und in No. 995 der Astr. Nachr. findet man folgende Elemente von Günther*)

1856 Febr. 19,0 m. Z. Berlin

$$\left.\begin{array}{ll} c = 25^0\ 11'\ 4''.1 & \\ \pi = 119\ 45\ 7.0 & \\ \theta = 43\ 17\ 33.5 & \end{array}\right\} \text{Aequinox der Epoche}$$

$$\begin{array}{ll} \varphi = 4\ 59\ 45.2 & \\ i = 16\ 32\ 14.2 & \\ n = 857''.76929 & \end{array}$$

In Bezug auf die Ekliptik und das Aequinox, auf welche sich die obigen Hubbard'schen Elemente beziehen, ist nichts vorzubereiten, da es dieselben sind, auf welche sich die in diesen Abhandlungen angewandten Elemente beziehen, die Günther'schen Elemente müssen hingegen, da sie auf eine andere Ekliptik und ein anderes Aequinox bezogen sind, vor allen Dingen auf jenes Aequinox zurückgeführt werden. Durch die von mir in No. 823 der Astr. Nachr. entwickelten Ausdrücke fand ich, dass man diesen Elementen, um sie auf Ekliptik und Aequinox von 1851 Jan. 1,0 hinzuführen, folgende Zahlenwerthe hinzufügen muss:

der Neigung .. — 1''.6
dem Knoten .. — 4' 18.2
dem Perihel .. — 4 11.7

Die im Folgenden zur Vergleichung anzuwendenden Elemente werden daher statt des zweiten vorstehenden Systems die folgenden:

*) Ich bemerke hiezu, dass ich die weiter unten in diesem § folgenden Rechnungen schon vor einigen Jahren zu einer Zeit ausgeführt habe, wo keine anderen verbesserten Elemente wie diese beiden Systeme bekannt waren. Später sind noch andere verbesserte Elemente veröffentlicht worden, allein ich glaube ihre unmittelbare Vergleichung mit den angewandten Elementen zu dem hier zu erreichenden Zweck für nicht nöthig halten zu dürfen, indem die obigen beiden Systeme dazu ausreichend sind.

1856 Febr. 19,0 m. Z. Berlin

$$\begin{aligned} c &= 25^0\ 11'\ 4''.1 \\ \pi &= 119\ \ 40\ \ 48.8 \\ \theta &= 43\ \ 13\ \ 21.8 \end{aligned} \Bigg\} \text{Aequinox von 1851,0}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 4\ \ 59\ \ 45.2 \\ i &= 16\ \ 32\ \ 12.6 \\ n &= 857''.76929 \end{aligned}$$

108.

Es wurden nun für die beiden Zeitpunkte

1851 Jan. 1,0 m. Z. B. und 1856 Febr. 19,0 m. Z. B.

der numerische Betrag sowohl der im Art. 94 angegebenen Jupiterstörungen und ihrer Differentiale, wie der Betrag der im Art. 59 (II) erhaltenen Saturnstörungen und ihrer Differentiale berechnet. Bei den letzteren wurden die Glieder der Abtheilung $i'=0$ weggelassen, da diese schon den genannten Jupiterstörungen einverleibt sind. Als Hülfsmittel für diese Berechnung diente zuerst die, zwischen der in der Berechnung der Störungen angenommenen Epoche und den oben angeführten Zeitpunkten liegende, Anzahl von mittleren Sonnentagen und zwar

für 1851 Jan. 1,0 und für 1856 Febr. 19,0

-338.0372 $\qquad\qquad$ $+1536.9628$

woraus

$$\begin{aligned} g &= 298^0\ 58'\ 33''.0 \text{ und } = 25^0\ 59'\ 47''.5 \\ \varepsilon &= 294\ \ 33\ \ \ 9.6 \ldots = 28\ \ 18\ \ \ 7.6 \\ nt &= -1.407 \qquad \ldots = +6.397 \end{aligned}$$

gefunden wurde, von welchen die Werthe von nt dazu dienten, um die mit diesem Factor multiplicirten Störungsglieder zu berücksichtigen. Aus den Jupitertafeln fand ich für dieselben Zeitpunkte

$$g' = 178^0\ 43'\ 49''.7 \ldots = 334^0\ 30'\ 43''.9$$

und aus den Saturntafeln

$$g' = 296^0\ 13'\ 15''.6 \ldots = 358^0\ 56'\ 38''.4$$

welchen die Beträge der grossen Ungleichheiten schon hinzugefügt sind. Da nun aus dem Art. 74 (I) folgt, dass

$$c' - \mu c + \mu\varepsilon = g' + \mu e_0 \sin\varepsilon$$

ist, so ergab sich aus den vorstehenden Zahlenwerthen für den Jupiter

$$c' - \mu c + \mu\varepsilon = 177^0\ 11'\ 20''.6\ \ldots\ = 335^0\ 18'\ 56''.3$$

und für den Saturn

$$c' - \mu c + \mu\varepsilon = 295^0\ 36'\ 1''.1\ \ldots\ = 359^0\ 16'\ 3''.1$$

Hiemit konnten die numerischen Werthe aller Argumente gebildet und die Substitutionen derselben ausgeführt werden. Hiedurch wurde erhalten

	für 1851 Jan. 1,0 und für 1856 Febr. 19,0	
$(n_0 z)_1$	$= 298^0\ 55'\ 25''.1\ \ldots$	$= 25^0\ 51'\ 24''.5$
$\frac{d(n_0\delta z)_1}{d\varepsilon}$	$= +41.30\ \ldots$	$= +817.00$
ν_1	$= +1.29\ \ldots$	$= -434.29$
$\frac{d\nu_1}{d\varepsilon}$	$= -14.59\ \ldots$	$= +50.73$
$\frac{u_1}{\cos i_0}$	$= -3.36\ \ldots$	$= -68.83$
$\frac{du_1}{\cos i_0\, d\varepsilon}$	$= -3.62\ \ldots$	$= -48.89$
Γ_1	$= 0.00\ \ldots$	$= +0.02$

Da im Vorhergehenden $(n) - n_0 = -0''.1064$ gefunden worden ist, so ergab sich aus den vorstehenden Werthen von $\frac{d(n_0\delta z)_1}{d\varepsilon}$

$$\frac{d\delta z_1}{dt} = +17''.25\ \ldots\ = +857''.41$$

und aus diesen numerischen Werthen und durch Zuziehung der im Art. 77 (I) angegebenen Elemente der Egeria wurden nach Anleitung der Artt. 101 u. f. die beiden folgenden Systeme von osculirenden Elementen abgeleitet,

c_1	$= 299^0$	$2'$	$0''.6\ \ldots\ = 25\ 18'\ 20''.3$
π_1	$= 119$	6	$7.1\ \ldots\ = 119\ 43\ 23.8$
θ_1	$= 43$	17	$19.9\ \ldots\ = 43\ 13\ 20.5$
φ_1	$= 4$	52	$37.6\ \ldots\ = 4\ 59\ 0.9$
i_1	$= 16$	33	$2.5\ \ldots\ = 16\ 32\ 8.3$
n_1	$= 858''.10649$		$\ldots\ = 858''.11446$

die mit den oben angeführten übereinstimmen müssen, wenn alle drei in Betracht gezogenen Systeme von osculirenden Elementen richtig sind.

109.

Zieht man die eben erhaltenen Elemente von den im Art. 107 angeführten ab, so bekommt man die folgenden Unterschiede

	für 1851 Jan. 1,0		für 1856 Febr. 19,0
$\Delta c =$	$+ 5' 43''.0$	$\ldots =$	$- 7' 16''.2$
$\Delta \pi =$	$- 4 46.7$	$\ldots =$	$- 2 35.0$
$\Delta \theta =$	$- 16.6$	$\ldots =$	$+ 1.3$
$\Delta \varphi =$	$+ 48.3$	$\ldots =$	$+ 44.3$
$\Delta i =$	$+ 6.1$	$\ldots =$	$+ 4.3$
$\Delta n =$	$- 0''.34849$	$\ldots =$	$- 0''.34517$

die als die Verbesserungen der in diesen Abhandlungen den numerischen Rechnungen zu Grunde gelegten osculirenden Elemente zu betrachten sind.

In Bezug auf die Unterschiede in den Werthen von Δc, die die obige Zusammenstellung zeigt, bemerke ich, dass wenn in dem Systeme von osculirenden Elementen, von welchem man ausgeht, die mittlere Bewegung mit einem Fehler behaftet ist, wie hier zufolge der vorstehenden Werthe von Δn der Fall ist, die verschiedenen Zeitpunkten angehörigen Verbesserungen des Elements c nicht dieselben sein können, sondern nothwendiger Weise, eben der unrichtigen mittleren Bewegung wegen, mit der Zeit wachsen müssen. Um die eigentliche Verbesserung dieses Elements zu erhalten, muss man daher von den obigen Werthen von Δc die Producte der Verbesserung der mittleren Bewegung in die Zwischenzeiten abziehen. Nun wird aber

$$- 0''.34849 \times - \ 338.0372 = + 1' \ 57''.8$$
$$- 0.34517 \times + 1536.9628 = - 8 \ 50.6$$

Zieht man diese Producte von den obigen Werthen von Δc ab, so wird

$$\Delta c = + 3' \ 45''.2 \ \ldots = + 1' \ 34''.4$$

Ferner bemerke ich, dass ein Fehler in der Bestimmung des Elements π, wenigstens bei nicht sehr grossen Excentricitäten, einen entgegengesetzten Fehler von nahe derselben Grösse in c hervorbringen muss, wenn alles übrige richtig ist, es müssen sich mit anderen Worten die Fehler von π und c so combiniren, dass daraus ein geringer Unterschied in den Fehlern der mittleren Länge der Epoche herauskommt. Bezeichnet man den Fehler des letztgenannten Elements mit Δl, so wird

$$\Delta l = \Delta c + \Delta \pi$$

und wendet man diese Gleichung auf die oben gefundenen Verbesserungen von c und π an, so ergiebt sich

$$\Delta l = -1' 1''.5 \ldots = -1' 0''.6$$

welches eine so gute Uebereinstimmung ist, wie erwartet werden darf. Auch die übrigen oben gefundenen Verbesserungen der Elemente zeigen bis auf $\Delta\pi$ eine befriedigende Uebereinstimmung, und die Unsicherheit, die denselben etwa noch anhängen mag, kann auf die Berichtigung der Störungscoefficienten, zu welchem Zweck sie berechnet worden sind, keinen merklichen Einfluss üben. In der Bestimmung der Länge des Perihels scheint in einem der beiden eben angeführten Elementensysteme ein Fehler vorgekommen zu sein, von welchem ich bisher nicht wusste, welchem Elementensystem er zuzuschreiben sei. Die neueste Publication des Herrn Günther über die Bahn der Egeria in No. 1132 der Astr. Nachr. scheint darüber Aufschluss zu geben. In dieser kommen unter verschiedenen Elementensystemen auch das für 1856 März 5,0 geltende vor, und in diesem System wird

$$\pi = 119^0\ 43'\ 3''.3$$

angegeben, während in dem oben im Art. 106 angeführten, für 1856 Febr. 19,0 geltenden

$$\pi = 119^0\ 45'\ 7''.0$$

angesetzt ist. Ohne die relativen Störungen der Länge des Perihels für den hier vorkommenden Zeitraum von 15 Tagen berechnet zu haben, darf ich mich wohl der Ansicht hingeben, dass dieselben lange nicht den Unterschied von $2'\ 3''.7$ erreichen können, den die eben angeführten beiden Längen des Perihels zeigen; zumal in diesem Zeitraum die Egeria fast in heliocentrischer Opposition mit dem Jupiter war. Berücksichtigt man aber diesen Unterschied von $2'\ 3''.7$ in der obigen Zusammenstellung der Verbesserung der hier angewandten Elemente, so werden die beiden Werthe von $\Delta\pi$

$$\Delta\pi = -4'\ 46''.7 \ldots = -4'\ 38''.7$$

und somit ist auch in diesem Element eine gute Uebereinstimmung der Verbesserung desselben erlangt worden. Nimmt man nun von den Verbesserungen der übrigen Elemente das Mittel aus beiden oben erlangten Bestimmungen derselben, so bekommt man

$$\begin{aligned}\Delta c &= +3'\ 45''.2\\ \Delta \pi &= -4\ 46.7\\ \Delta \theta &= -\ 7.7\\ \Delta \varphi &= +46.3\\ \Delta i &= +\ 5.2\\ \Delta n &= -0''.34683\end{aligned}$$

von welchen erwartet werden darf, dass sie für die Verbesserung der Störungscoefficienten hinreichende Genauigkeit besitzen. Die verbesserten osculirenden Elemente der Egeria für 1851 Dec. 5,0 m. Z. Greenwich sind demnach die folgenden:

$$\begin{aligned}c_0 &= 19^0\ 35'\ 28''.8\\ \pi_0 &= 119\ \ 7\ \ 25.7\\ \theta_0 &= 43\ \ 17\ \ 1.4\\ \varphi_0 &= 4\ \ 52\ \ 53.7\\ i_0 &= 16\ \ 33\ \ 11.9\\ n_0 &= 858''.0393\end{aligned}$$ m. Aeq. von 1851,0

§. 9. Entwickelung der Ausdrücke für die Verbesserungen der Störungscoefficienten, die aus der Verbesserung der der Rechnung zu Grunde gelegten osculirenden Elemente entstehen.

Anwendung auf die im Vorhergehenden berechneten Störungen.

110.

Da die Verbesserung der der Rechnung zu Grunde gelegten osculirenden Elemente stets als Grössen der ersten Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte betrachtet werden müssen, so kann sich die Verbesserung der Störungscoefficienten auf die der ersten Ordnung beziehen, indem eine Verbesserung der Störungscoefficienten zweiter Ordnung Grössen der dritten Ordnung hervorbringen würde, die als unmerklich angesehen werden können. Setzen wir wie früher (§. 5 (I))

$$\frac{dW_0}{d\varepsilon} = T;\ \frac{dR_0}{d\varepsilon} = U$$

und ausserdem

$$\frac{\varrho}{a} T = \Delta$$

wo wieder $\varrho = a(1 - e\cos\eta)$ ist, so können die Ausdrücke, durch welche im Vorhergehenden die Störungen erster Ordnung berechnet worden sind, folgendermaassen gestellt werden,

$$n\delta z = \int d\varepsilon \left(\int \Delta d\varepsilon\right)$$

$$\nu = -\tfrac{1}{2}\int \left(\frac{d\int T d\varepsilon}{d\eta}\right) d\varepsilon$$

$$\frac{u}{\cos i} = \overline{\left(\int U d\varepsilon\right)}$$

wo der Strich über den Functionen wieder andeutet, dass η in ε verwandelt werden muss.

Bezeichnen wir nun durch ein vorgesetztes Δ das Increment der Function, welches entsteht, wenn man statt der ursprünglich angewandten Werthe der osculirenden Elemente die verbesserten Werthe derselben substituirt, so bekommen wir aus den vorstehenden Ausdrücken die folgenden,

$$\Delta n\delta z = \int d\varepsilon \left(\overline{\int \Delta\Delta d\varepsilon}\right)$$

$$\Delta\nu = -\tfrac{1}{2}\int \left(\frac{d\overline{\int \Delta T d\varepsilon}}{d\eta}\right) d\varepsilon$$

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = \left(\overline{\int \Delta U d\varepsilon}\right)$$

und da Δ, T und U Functionen der Elemente sind, so liegt zunächst, dass man die Increments dieser Functionen wie folgt ausdrücken kann,

$$\Delta\Delta = \left(\frac{d\Delta}{da}\right)\Delta a + \left(\frac{d\Delta}{dq}\right)\Delta q + \left(\frac{d\Delta}{d\pi}\right)\Delta\pi + \left(\frac{d\Delta}{di}\right)\Delta i + \left(\frac{d\Delta}{d\theta}\right)\Delta\theta$$

$$\Delta T = \left(\frac{dT}{da}\right)\Delta a + \text{etc.}$$

$$\Delta U = \left(\frac{dU}{da}\right)\Delta a + \text{etc.}$$

wo Δa, Δq etc. die Verbesserungen der Elemente sind. Die Verbesserung Δc kommt in diesen Functionen nicht explicite vor, sondern ist implicite in der excentrischen Anomalie ε enthalten, in Bezug auf welche die obigen Functionen hier entwickelt worden sind.

111.

Die Increments von Δ, T, U sind in der eben aufgestellten Form mühsam zu berechnen, weil die Berechnung mehrerer der in den Ausdrücken derselben vorkommenden Differentialquotienten mühsam ist, und man verfährt weit einfacher, wenn man den Umstand benutzt, dass

Δ, T, U in ihren zusammengesetzteren Theilen Functionen von $\omega + \chi$, ϱ, v, r, q, ψ, J sind, wenn man die Bezeichnungen im Sinne der §§. 4 (I) und 5 (I) nimmt. Von diesen Grössen dürfen v und r ihrerseits als Functionen von ε und ν, sowie $\omega + \chi$ und ϱ als Functionen der analogen Grössen η und β betrachtet werden. Da ferner zufolge der angezogenen §§, wenn für einen Augenblick II und II' auch in der dort ihnen gegebenen Bedeutung wieder aufgenommen werden, $\Delta III = -\Delta\varphi$ und $\Delta III' = -\Delta\psi$ wird, so können zufolge der dort abgeleiteten Sätze, und weil hier die Elemente des störenden Planeten nicht in Betracht kommen, φ, ψ und J als Functionen von u und $\frac{du}{d\varepsilon}$ betrachtet werden. Die Anwendung dieser Betrachtungen wird auf Ausdrücke führen, die in ihrer Anwendung weit einfacher sind, wie die im vor. Art. aufgestellten, und zwar auf solche, die von den im §. 5 (I) abgeleiteten nur wenig verschieden sind, welche man ohnehin für die Berechnung der Störungen zweiter Ordnung brauchen muss. Es wird hievon die Folge sein, dass wir die hier im §. 4 berechneten Hülfsgrössen, die bei der Berechnung der Störungen zweiter Ordnung gebraucht wurden, fast ungeändert auch auf die Lösung der gegenwärtigen Aufgabe werden anwenden können.

Die erste nun zu lösende Aufgabe besteht darin, $\Delta\varepsilon$, Δv, Δu, $\Delta\frac{du}{d\varepsilon}$ durch die Incremente der Elemente auszudrücken, und dieses kann auf die folgende Art ausgeführt werden. Aus den Gleichungen

$$r\cos f = a\cos\varepsilon - a\sin\varphi$$
$$r\sin f = a\cos\varphi\sin\varepsilon$$
$$v = f + \chi$$
$$r = r(1+\nu)$$

bekommt man einestheils, wenn man a, φ, χ veränderlich und ε und ν constant annimmt,

$$\Delta v = \frac{a}{r}\sin\varepsilon\,.\,\Delta\varphi + \Delta\chi$$
$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{a}{r}\cos\varphi\cos\varepsilon\,.\,\Delta\varphi$$

und anderntheils, wenn man ε und ν veränderlich, und a, φ, χ constant setzt,

$$\Delta v = \frac{a}{r}\cos\varphi\,.\,\Delta\varepsilon$$
$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta\nu}{1+\nu} + \frac{a}{r}e\sin\varepsilon\,.\,\Delta\varepsilon$$

Durch Gleichstellung dieser doppelten Ausdrücke für Δv und Δr ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\,\Delta\varphi + \frac{1-e\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\,\Delta\chi \\ \Delta v &= \frac{\Delta a}{a} - \frac{e+\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\,\Delta\varphi - \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\,\Delta\chi \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

wo ich den Divisor $1+\nu$ weggelassen habe, weil er hier nur Grössen höherer Ordnung hervorbringen würde. Wenn man in diesen Ausdrücken ε mit η vertauscht, so ergeben sich die folgenden

$$\Delta\eta = \frac{\sin\eta}{\cos\varphi}\,\Delta\varphi + \frac{1-e\cos\eta}{\cos\varphi}\,\Delta\chi$$

$$\Delta\beta = \frac{\Delta a}{a} - \frac{e+\cos\eta}{\cos\varphi}\,\Delta\varphi - \frac{e\sin\eta}{\cos\varphi}\Delta\chi$$

Der Abhandlung (I) zufolge ist

$$u = \frac{\bar{r}}{a}\,q\sin(v-\theta_0) - \frac{\bar{r}}{a}\,p\cos(v-\theta_0)$$

wo

$$p = \sin i\,\sin(\sigma-\theta_0)$$
$$q = \sin i\cos(\sigma-\theta_0) - \sin i_0$$

ist. Um hieraus zu den Incrementen überzugehen, muss nach den Differentiationen $i=i_0$ und $\varphi=\theta_0$ gesetzt werden, und man erhält also

$$\Delta p = \sin i\,.\,\Delta\sigma;\quad \Delta q = \cos i\,.\,\Delta i$$

und es wird also

$$\Delta u = \frac{\bar{r}}{a}\cos i\,\sin(v-\theta_0)\,\Delta i - \frac{\bar{r}}{a}\sin i\,\cos(v-\theta_0)\,\Delta\sigma$$

führt man hierin die excentrische Anomalie, und $\Delta\sigma = \cos i\,.\,\Delta\theta$ ein, und setzt zur Abkürzung

$$\lambda = \{\cos(\pi-\theta)\,\Delta i + \sin(\pi-\theta)\sin i\Delta\theta\}\cos\varphi$$
$$\mu = \sin(\pi-\theta)\,\Delta i - \cos(\pi-\theta)\sin i\Delta\theta$$

so wird

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = \lambda\sin\varepsilon + \mu(\cos\varepsilon - e) \qquad (46)$$

und hieraus folgt unmittelbar

$$\frac{\Delta\frac{du}{d\varepsilon}}{\cos i} = \lambda\cos\varepsilon - \mu\sin\varepsilon \qquad (47)$$

womit die Incremente $\Delta\varepsilon$, Δv, $\Delta\eta$, $\Delta\beta$, Δu, $\Delta\frac{du}{d\varepsilon}$ in Function der Incremente der Elemente dargestellt sind.

112.

Die hier anzuwendenden Ausdrücke für Δ und U sind die folgenden

$$\Delta = \frac{1}{a\cos\varphi}\left\{2\varrho^2\cos(f-\omega) - \varrho r + 2\frac{\varrho^2 r}{a\cos^2\varphi}[\cos(f-\omega)-1]\right\}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$
$$+ \frac{2}{a\cos\varphi}\varrho^2\sin(f-\omega)\,r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$
$$U = \frac{\varrho r^2}{a\cos\varphi}\sin(\omega-f)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

Es giebt sich hier von selbst zu erkennen, dass in diesen Ausdrücken die Factoren der Differentialquotienten der Störungsfunction Functionen von a, φ, f, r, ω, ϱ sind, von welchen die vier letzten als solche Functionen von ε, ν, η, β betrachtet werden dürfen, denen die im vor. Art. entwickelten Incremente zukommen. Es ist ausserdem auch der Ausdruck für U mit $\cos i$ multiplicirt, allein die Veränderung dieses Factors darf hier nicht berücksichtigt werden, da in den vorhergehenden numerischen Rechnungen $\cos i$ als algebraisches Zeichen durchgeführt worden ist. Da hier die Elemente des störenden Planeten ungeändert bleiben, so sind die Differentialquotienten der Störungsfunction als Functionen von f, r, $u\,\frac{du}{d\varepsilon}$ zu betrachten, wie in der Abhandlung (I) erklärt worden ist. Endlich ist hier gleichwie im Vorhergehenden auch die Veränderung der Grösse λ zu berücksichtigen, die bei der Verwandelung der Form $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{i\varepsilon - i'g'\}$ in $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-c\mu)\}$ angewandt wird, und es müssen auch die Integrationsdivisoren wieder dem Werthe von Δn gemäss verbessert werden. Dieses letztere kann am Ende der übrigen Rechnungen für sich ausgeführt werden, und jenes wird ebenso ausgeführt, wie in §. 4 gezeigt wurde, nur ist hier der Ausdruck von $\Delta\lambda$ anders wie der dort entwickelte Ausdruck für $\delta\lambda$. Da

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\mu e$$

wo $\mu = \frac{n'}{n}$ ist, so wird

$$\Delta\lambda = \frac{\mu}{2}\left\{\cos\varphi\,.\,\Delta\varphi - e\,\frac{\Delta n}{n}\right\} \tag{48}$$

der hier anzuwendende Ausdruck für $\Delta\lambda$.

113.

In Folge der vorhergehenden Betrachtungen nimmt nun das Increment von Δ die folgende Form an,

$$\Delta\Delta = \left(\frac{d\Delta}{d\lambda}\right)\Delta\lambda + \left(\frac{d\Delta}{d\eta}\right)\Delta\eta + \left(\frac{d\Delta}{d\beta}\right)\Delta\beta + \left(\frac{d\Delta}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon + \left(\frac{d\Delta}{d\nu}\right)\Delta\nu$$
$$+\left(\frac{d\Delta}{d\varphi}\right)\Delta\varphi + \left(\frac{d\Delta}{da}\right)\Delta a + \left(\frac{d\Delta}{du}\right)\Delta u + \left(\frac{d\Delta}{du_1}\right)\Delta u_1$$

wo ich zur Abkürzung u_1 statt $\frac{du}{d\varepsilon}$ geschrieben habe. Gleichwie in §. 5 (I) erhalten wir hier

$$\left(\frac{d\Delta}{d\nu}\right) = r\left(\frac{d\Delta}{dr}\right);\quad \left(\frac{d\Delta}{d\beta}\right) = \varrho\left(\frac{d\Delta}{d\varrho}\right)$$

und wegen der Gleichung $\Delta = \frac{\varrho}{a}T$ wird

$$\left(\frac{d\Delta}{d\lambda}\right) = \frac{\varrho}{a}\left(\frac{dT}{d\lambda}\right);\quad \left(\frac{d\Delta}{d\varepsilon}\right) = \frac{\varrho}{a}\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)$$

wo $\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)$ und $\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)$ dieselben im Vorhergehenden entwickelten und angewandten Functionen sind. Aus dem im vor. Art. aufgestellten Ausdruck für Δ ergiebt sich ferner durch die Differentiation

$$\varrho\left(\frac{d\Delta}{d\varrho}\right) = \frac{\varrho}{a}\{2T+\bar{T}\}$$
$$r\left(\frac{d\Delta}{dr}\right) = \frac{\varrho}{a}\{V+T+X\}$$

wo T, T, V, X auch dieselben Grössen sind, die unter dieser Bezeichnung im §. 5 (I) eingeführt, und im Vorhergehenden entwickelt und angewandt worden sind. Der Ausdruck für Δ giebt ferner

$$\left(\frac{d\Delta}{d\varphi}\right) = \frac{e\varrho}{a\cos\varphi}\{3T+2X+2\bar{T}\}$$
$$a\left(\frac{d\Delta}{da}\right) = -\frac{\varrho}{a}\{2T+X+\bar{T}\}$$

und endlich wird auch

$$\cos i\left(\frac{d\Delta}{du}\right) = \frac{\varrho}{a}D;\quad \cos i\left(\frac{d\Delta}{du_1}\right) = \frac{\varrho}{a}E$$

wo auch D und E dieselbe Bedeutung haben, wie im §. 5 (I). Substituiren wir nun diese Ausdrücke in den obigen Ausdruck für $\Delta\Delta$, so wird dieser

$$\Delta\Delta = \frac{\varrho}{a}\left\{\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\Delta\lambda + \left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon + [V+T+X]\,\Delta v + \frac{e}{\cos\varphi}[3T+2X+2\bar{T}]\,\Delta\varphi\right.$$
$$\left. - [2T+X+\bar{T}]\frac{\Delta a}{a} + D\frac{\Delta u}{\cos i} + E\frac{\Delta u_1}{\cos i} + [2T+\bar{T}]\Delta\beta\right\}$$
$$+\left(\frac{d\Delta}{d\eta}\right)\Delta\eta$$

welcher einer wesentlichen Reduction fähig ist.

114.

Aus den Gleichungen

$$\Delta\varepsilon = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\varphi + \frac{1-e\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi$$
$$\Delta v = \frac{\Delta a}{a} - \frac{e+\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\varphi - \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi$$

bekommt man erstlich $\frac{d\Delta\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\varphi + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi$

und hiemit

$$\frac{d\Delta\varepsilon}{d\varepsilon} + \Delta v = \frac{\Delta a}{a} - \frac{e}{\cos\varphi}\Delta\varphi$$

Wegen der Gleichung $a^3n^2 = k^2(1+m)$ giebt aber $h = \frac{an}{\cos\varphi}$ durch die Differentiation

$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a} + \frac{e}{\cos\varphi}\Delta\varphi \qquad (49)$$

und es wird daher

$$\frac{\Delta a}{a} = 2\frac{d\Delta\varepsilon}{d\varepsilon} + 2\Delta\nu + 2\frac{\Delta h}{h}$$

$$\frac{e}{\cos\varphi}\Delta\varphi = \frac{d\Delta\varepsilon}{d\varepsilon} + \Delta\nu + 2\frac{\Delta h}{h}$$

Da aber hier Δa und $\Delta\varphi$ Constanten sind, so dürfen wir in die rechte Seite dieser Gleichungen η für ε, und β für ν setzen. Es wird daher auch

$$(50)\qquad \begin{cases} \frac{\Delta a}{a} = 2\frac{d\Delta\eta}{d\eta} + 2\Delta\beta + 2\frac{\Delta h}{h} \\ \frac{e}{\cos\varphi}\Delta\varphi = \frac{d\Delta\eta}{d\eta} + \Delta\beta + 2\frac{\Delta h}{h} \end{cases}$$

Substituirt man nun diese letzten Ausdrücke für Δa und $\Delta\varphi$ in den obigen Ausdruck für $\Delta\Delta$, und setzt

$$(51)\qquad L = \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\Delta\lambda + \left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon + \{B+T\}\Delta\nu + C\frac{\Delta h}{h} + D\frac{u}{\cos i} + E\frac{u_1}{\cos i}$$

wo T, B, C, D, E dieselbe Bedeutung haben wie in §. 3 (I), so wird nach der Multiplication mit $d\varepsilon$ und der Integration

$$\int\Delta\Delta d\varepsilon = \frac{\varrho}{a}\int L d\varepsilon + \frac{\varrho}{a}\Delta\beta\int\{T+\overline{T}\}d\varepsilon - \frac{\varrho}{a}\frac{d\Delta\eta}{d\eta}\int T d\varepsilon + \Delta\eta\int\left(\frac{d\Delta}{d\eta}\right)d\varepsilon$$

Es ist aber

$$\left(\frac{d\Delta}{d\eta}\right) = \frac{\varrho}{a}\left(\frac{dT}{d\eta}\right) + T\frac{d\varrho}{ad\eta}$$

und in Folge der früher schon in diesen Abhandlungen eingeführten Bezeichnungen

$$\int T d\varepsilon = W_0;\quad \int\overline{T}d\varepsilon = W_0 + 2\beta$$

indem bis auf Grössen zweiter Ordnung jede Seite der letzten Gleichung der Ausdruck der Function $\delta\frac{h_0}{h}$ ist. Substituirt man diese Ausdrücke und verwandelt η in ε, so bekommt man

$$\left(\overline{\int\Delta\Delta d\varepsilon}\right) = \frac{r}{a}\left(\overline{\int L d\varepsilon}\right) + \left\{\frac{r}{a}\left(\frac{d\overline{W_0}}{d\eta}\right)\Delta\varepsilon + 2\left(\overline{W_0}+\nu\right)\Delta\nu\right\} + \overline{W_0}k$$

wo

$$k = \frac{dr}{ad\varepsilon}\Delta\varepsilon - \frac{rd\Delta\varepsilon}{ad\varepsilon}$$

ist, und die numerischen Werthe von $\left(\frac{d\overline{W_0}}{d\eta}\right)$, $\overline{W_0}$, ν wieder durch die vorhergehenden Rechnungen gegeben sind. Zufolge des zu Anfang dieses § angegebenen Ausdrucks für $\Delta n\delta z$ wird daher

$$(52)\qquad \Delta n\delta z = \int\left\{\frac{r}{a}\left[\left(\overline{\int L d\varepsilon}\right) + \left(\frac{d\overline{W_0}}{d\eta}\right)\Delta\varepsilon + 2\left(\overline{W_0}+\nu\right)\Delta\nu\right] + \overline{W_0}k\right\}d\varepsilon$$

Um die eben eingeführte Hulfsgrösse k zu entwickeln, substituire man die oben gegebenen Ausdrücke für $\Delta\varepsilon$ und $\frac{d.\Delta\varepsilon}{d\varepsilon}$ in den vorstehenden Ausdruck; nimmt man darauf auf die Gleichungen

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos\varepsilon\,,\quad \frac{dr}{ad\varepsilon} = e\sin\varepsilon$$

Rücksicht, so bekommt man

$$k = \frac{e-\cos\varepsilon}{\cos q}\,\Delta q \qquad (53)$$

Ich führe hier noch an, dass

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{2}{3}\,\frac{\Delta n}{n}$$

ist, da $\frac{\Delta a}{a}$ auch in den eben entwickelten Formeln vorkommt.

115

Die Gleichung $$\Delta = \frac{\varrho}{a}T$$

giebt $$\Delta\Delta = \frac{\varrho}{a}\,\Delta T + T\,\Delta\frac{\varrho}{a}$$

Da ferner $$\Delta\frac{\varrho}{a} = \frac{d\varrho}{ad\eta}\Delta\eta + \frac{\varrho}{a}\Delta\beta - \frac{\varrho}{a}\,\frac{\Delta a}{a}$$

ist, so wird

$$\int\Delta T d\varepsilon = \frac{a}{\varrho}\int\Delta\Delta d\varepsilon - \frac{ad\varrho}{\varrho d\eta}\Delta\eta\int T d\varepsilon - \Delta\beta\int T d\varepsilon + \frac{\Delta a}{a}\int T d\varepsilon$$

substituirt man hierin den oben gegebenen Werth von $\int\Delta\Delta d\varepsilon$, so ergiebt sich

$$\int\Delta T d\varepsilon = \int L d\varepsilon + \Delta\eta\int\left(\frac{dT}{d\eta}\right)d\varepsilon - \frac{d.\Delta\eta}{d\eta}\int T d\varepsilon + \Delta\beta\int T d\varepsilon + \frac{\Delta a}{a}\int T d\varepsilon$$

woraus

$$\frac{d\int\Delta T d\varepsilon}{d\eta} = \frac{d\int L d\varepsilon}{d\eta} + \Delta\eta\int\frac{d^2T}{d\eta^2}d\varepsilon - \frac{d^2.\Delta\eta}{d\eta^2}\int T d\varepsilon + \frac{d.\Delta\beta}{d\eta}\int T d\varepsilon + \frac{\Delta a}{a}\int\left(\frac{dT}{d\eta}\right)d\varepsilon$$

folgt. Verwandelt man hierin $\Delta\eta$ in ε, substituirt die oben gegebenen Ausdrücke für $\int T d\varepsilon$ und $\int T d\varepsilon$ durch W_0, und erwägt, dass

$$\frac{d^2.\Delta\varepsilon}{d\varepsilon^2} = -\frac{d\Delta\nu}{d\varepsilon} = -\Delta\varepsilon + \frac{\Delta\chi}{\cos q}$$

aus den Ausdrücken (45) hervorgeht, so bekommt man

$$\left(\frac{d\int\Delta T d\varepsilon}{d\eta}\right) = \left(\frac{d\int L d\varepsilon}{d\eta}\right) + \left\{\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right) + 2(\overline{W}_0+\nu)\right\}\Delta\varepsilon - 2(\overline{W}_0+\nu)\,\frac{\Delta\chi}{\cos q} + \left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{\Delta a}{a}$$

und hieraus

$$\Delta\nu = -\tfrac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{d\int L d\varepsilon}{d\eta}\right) + \left\{\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right) + 2(W_0+\nu)\right\}\Delta\varepsilon - 2(W_0+\nu)\,\frac{\Delta\chi}{\cos q} + \left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{\Delta a}{a}\right\}d\varepsilon \qquad 54)$$

Ich mache darauf aufmerksam, dass in diesen Ausdrücken $\Delta\nu$ linker Hand des Gleichheitszeichens eine andere Bedeutung hat wie rechter Hand desselben, indem $\Delta\nu$ linker Hand die Verbesserung bedeutet, die der vorher berechnete Werth von ν, wegen der Aenderung der in der vorhergehenden Rechnung angewandten osculirenden Elemente, bekommt, während dasselbe Zeichen rechter Hand die durch die zweite Gleichung (45) gegebene Function der Incremente der Elemente bedeutet. Da hieraus keine Verwechselung entstehen kann, so habe ich nicht für nöthig gehalten die Bezeichnung zu ändern.

116.

Gleichwie im §. 5 (I) in Bezug auf die Störungen zweiter Ordnung gezeigt worden ist, könnte man hier auch die Bedingungsgleichung

$$n\frac{d\delta z}{d\varepsilon} = \frac{r}{a}\int T d\varepsilon + 2\frac{r}{a}\nu$$

die aus der dort abgeleiteten leicht hervorgeht, zur Controle der durch die eben entwickelten Ausdrücke zu berechnenden Verbesserungen von $n\delta z$ und ν anwenden, allein diese Rechnungen sind so einfach und gewähren anderweitige Controlen, weshalb ich die Entwickelung der vorstehenden Gleichung hier übergehen werde, die übrigens so wenige Schwierigkeiten darbietet, dass sie wohl jeder selbst wird ausführen können. Ich gehe daher sogleich zur Entwickelung der Verbesserung der Breitenstörungen, oder mit anderen Worten zu der der Function U über.

Aus dem im Art. 112 angeführten Ausdruck für U, verbunden mit den im Vorhergehenden angestellten Betrachtungen, geht hervor, dass für ΔU sich zuerst ein ähnlicher Ausdruck ergiebt, wie der oben für $\Delta\Delta$ erhaltene, nemlich

$$\Delta U = \left(\frac{dU}{d\lambda}\right)\Delta\lambda + \left(\frac{dU}{d\eta}\right)\Delta\eta + \left(\frac{dU}{d\beta}\right)\Delta\beta + \left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon + \left(\frac{dU}{d\nu}\right)\Delta\nu$$
$$+ \left(\frac{dU}{dq}\right)\Delta q + \left(\frac{dU}{da}\right)\Delta a + \left(\frac{dU}{du}\right)\Delta u + \left(\frac{dU}{du_1}\right)\Delta u_1$$

wo die Incremente $\Delta\lambda$, $\Delta\eta$, etc. dieselben sind, wie oben. Für die Berechnung der Differentialquotienten $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$, $\left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right)$ kann ich auf das verweisen, was ich oben über die Berechnung derselben Differentialquotienten von Δ und T gesagt habe, da das Verfahren im jetzigen Falle ganz dasselbe ist. Der angezogene Ausdruck von U giebt ferner

$$\left(\frac{dU}{d\beta}\right)=U$$
$$\left(\frac{dU}{d\nu}\right)=2U+Y$$

wo unter Y die im §. 5 I) unter (85) eingeführte Grösse verstanden wird. Wir bekommen ferner

$$\left(\frac{dU}{dq}\right)=\frac{e}{\cos q}U$$
$$a\left(\frac{dU}{da}\right)=-U$$
$$\left(\frac{dU}{du}\right)=D_1''$$
$$\left(\frac{dU}{du_1}\right)=E_1''$$

wo wieder D_1'' und E_1'' dieselbe Bedeutung haben, wie im §. 5 (I). Stellen wir diese zusammen, so erhalten wir zuerst

$$\Delta U=\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)\Delta\lambda+\left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon+(2U+Y)\Delta\nu+U\frac{e\,\Delta q}{\cos q}-U\frac{\Delta a}{a}$$
$$+D_1''\frac{\Delta u}{\cos i}+E_1''\frac{\Delta u_1}{\cos i}+U\Delta\beta+\left(\frac{dU}{d\eta}\right)\Delta\eta$$

und wenn wir wieder $\Delta\varphi$ und Δa durch (50) eliminiren,

$$\Delta U=\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)\Delta\lambda+\left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon+(2U+Y)\Delta\nu+D_1''\frac{\Delta u}{\cos i}+E_1''\frac{\Delta u_1}{\cos i}$$
$$+\left(\frac{dU}{d\eta}\right)\Delta\eta-U\frac{d\Delta\eta}{d\eta}$$

Setzt man daher

$$\Pi=\left(\frac{dU}{\cos i\,d\lambda}\right)\Delta\lambda+\left(\frac{dU}{\cos i\,d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon+\left(\frac{2U}{\cos i}+\frac{Y}{\cos i}\right)\Delta\nu \qquad (55)$$
$$+\frac{D_1''}{\cos i}\frac{\Delta u}{\cos i}+\frac{E_1''}{\cos i}\frac{\Delta u_1}{\cos i}$$

so wird

$$\int\frac{\Delta U}{\cos i}d\varepsilon=\int\Pi d\varepsilon+\Delta\eta\int\left(\frac{dU}{\cos i\,d\eta}\right)d\varepsilon-\frac{d\Delta\eta}{d\eta}\int\frac{U}{\cos i}d\varepsilon$$

oder da $\overline{\left(\int U d\varepsilon\right)}=u$ und $\overline{\left(\int\left(\frac{dU}{d\eta}\right)d\varepsilon\right)}=u_1$ ist,

$$\frac{\Delta u}{\cos i}=\overline{\left(\int\Pi d\varepsilon\right)}+\frac{u_1}{\cos i}\Delta\varepsilon-\frac{u}{\cos i}\frac{d\Delta\varepsilon}{d\varepsilon} \qquad (56)$$

wo in Bezug auf Δu linker Hand des Gleichheitszeichens dieselbe Bemerkung gilt, die im vor. Art. in Bezug auf $\Delta\nu$ gemacht wurde. Im zweiten und dritten Gliede rechter Hand müssen hier die numerischen Werthe von u_1 und u angewandt werden, die die erste Annäherung gegeben hat.

117.

Die den vorstehenden Integralen hinzuzufügenden willkührlichen Constanten haben dieselbe Form, wie die im Vorhergehenden eingeführten, und werden, falls sie merklich werden sollten, auf dieselbe Art bestimmt.

Zwischen den durch die eben entwickelten Ausdrücke sich ergebenden Verbesserungen der Coefficienten der Säcularänderungen finden einige Relationen statt, die zu kennen nützlich ist, da sie mit zur Controle der Rechnung dienen können. Da die durch diese Ausdrücke erlangten Verbesserungen genau dieselbe Form haben müssen, wie die in der ersten Annäherung erhaltenen Coefficienten, so darf vor Allem in dem Resultat kein ε^2 oder n^2t^2 proportionales Glied vorkommen, sondern die Coefficienten dieses Gliedes, die sich in einigen Theilen des Ausdrucks (52) zeigen, müssen sich in der Summe dieser Theile strenge aufheben. Da ferner in der ersten Annäherung in $nδz$ die Säcularänderungen die folgende Form haben,

$$\left(1-\tfrac{e^2}{2}\right)H(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon+H(0.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$-\tfrac{e}{4}\,H(0.s)\,\varepsilon\sin 2\varepsilon-\tfrac{e}{4}H(0.c)\,\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

in ν die folgende

$$-\tfrac{e}{2}H(0.s)\,\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{2}H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon+\tfrac{1}{2}H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon$$

und in $\frac{u}{\cos i}$ die folgende

$$-eV(0.s)\,\varepsilon$$
$$-V(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon+V(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

so müssen die Verbesserungen dieser Coefficienten, die durch die vorstehenden Ausdrücke erhalten werden, dieselben Relationen darbieten. Seien $\Delta H(0.s)$ und $\Delta H(0.c)$ die erhaltenen Verbesserungen von $H(0.s)$ und $H(0.c)$ und $\Delta V(0.c)$ und $\Delta V(0.s)$ die von $V(0.c)$ und $V(0.s)$, und wie vorher Δq die Verbesserung des Excentricitätswinkels, dann müssen, mit Weglassung der Quadrate und Producte der Verbesserungen, die verbesserten Säcularänderungen die folgenden werden, in $nδz$

$$\left(1-\tfrac{(e+\cos q\,\Delta q)^2}{2}\right)\left(H(0.s)+\Delta H(0.s)\right)\varepsilon\sin\varepsilon+\left(H(0.c)+\Delta H(0.c)\right)\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$-\tfrac{(e+\cos q\,\Delta q)}{4}\left(H(0.s)+\Delta H(0.s)\right)\varepsilon\sin 2\varepsilon-\tfrac{(e+\cos q\,\Delta q)}{4}\left(H(0.c)+\Delta H(0.c)\right)\varepsilon\cos 2\varepsilon;$$

in v

$$-\frac{(e+\cos\varphi\,\Delta q)}{2}(H(0.s)+\Delta H(0.s))\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{2}(H(0.s)+\Delta H(0.s))\varepsilon\cos\varepsilon+\tfrac{1}{2}(H(0.c)+\Delta H(0.c))\varepsilon\sin\varepsilon$$

und in $\frac{u}{\cos i}$

$$-(e+\cos\varphi\Delta\varphi)(V(0.s)+\Delta V(0.s))\varepsilon$$
$$-(V(0.c)+\Delta V(0.c))\varepsilon\sin\varepsilon+(V(0.s)+\Delta V(0.s))\varepsilon\cos\varepsilon$$

und daher in Bezug auf diese Glieder die folgenden Ausdrücke sich ergeben,

$$\Delta n\delta z=\left\{\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\Delta H(0.s)-e\cos\varphi\,H(0.s)\,\Delta q\right\}\varepsilon\sin\varepsilon+\Delta H(0.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{4}\{e.\Delta H(0.s)+\cos\varphi\,H(0.s).\Delta q\}\varepsilon\sin 2\varepsilon-\tfrac{1}{4}\{e.\Delta H(0.c)+\cos\varphi\,H(0.c).\Delta q\}\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

$$\Delta v=-\tfrac{1}{2}\{e\Delta H(0.s)+\cos\varphi\,H(0.s)\Delta\varphi\}\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{2}\Delta H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon+\tfrac{1}{2}\Delta H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$\frac{\Delta u}{\cos i}=-\{e\Delta V(0.s)+\cos\varphi\,V(0.s)\Delta\varphi\}\varepsilon$$
$$-\Delta V(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon+\Delta V(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon$$

Um zu zeigen, dass die Ausdrücke (52), (54) und (56) in der That die Säcularänderungen in dieser Form geben, will ich sie daraus direct entwickeln.

118.

Ich sehe fürerst die Entwickelung der im Vorhergehenden mit L bezeichneten, und durch den Ausdruck (51) gegebenen Function als ausgeführt an, und hebe daraus die folgenden Glieder aus,

$$L=F'(0.s)$$
$$+G'(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon)$$
$$-H'(0.c)\sin\eta+H'(0.s)\cos\eta$$

die die einzigen dieser Function sind, welche zu den Säcularänderungen beitragen. Wir bekommen hieraus

$$\left(\int L d\varepsilon\right)=F'(0.s)\varepsilon+H'(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon-H'(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$
$$\left(\frac{d\int L d\varepsilon}{d\eta}\right)=-G'(1.s)-H'(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon-H'(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon$$

Aus §. 5 (II) bekommen wir ferner mit bloser Rücksicht auf die hier erforderlichen Glieder

$$\left(\frac{d\overline{W}_0}{d\eta}\right) = -G(1.s) \\ -H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$2(\overline{W}_0+\nu) = 2k + 2C + 2G(1.c) \\ +H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$W_0 = \tfrac{1}{2}eH(0.s)\varepsilon \\ +H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$\left(\frac{d^2\overline{W}_0}{d\eta^2}\right) + 2(\overline{W}_0+\nu) = 2k + 2C + G(1.c) \\ +\{2F(1.c) + G(2.c) + H(0.c)\}\cos\varepsilon + \{2F(1.s) + G(2.s) + H(0.s)\}\sin\varepsilon$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{\Delta a}{a},\ \beta = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi},\ \gamma = \frac{\Delta\chi}{\cos\varphi}$$

so geben die Ausdrücke (45), (49), (53)

$$\Delta\varepsilon = \gamma + \beta\sin\varepsilon - e\gamma\cos\varepsilon$$

$$\Delta\nu = \alpha - e\beta - \beta\cos\varepsilon - e\gamma\sin\varepsilon$$

$$2\frac{\Delta h}{h} = -\alpha + 2e\beta$$

$$k = e\beta - \beta\cos\varepsilon$$

und hiemit bekommt man die folgenden Producte

$$\left(\frac{d\overline{W}_0}{d\eta}\right)\Delta\varepsilon = \{-\tfrac{1}{2}\beta H(0.s) + \tfrac{1}{2}e\gamma H(0.c)\}\varepsilon \\ -\gamma H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon - \gamma H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\ +\{\tfrac{1}{2}\beta H(0.s) + \tfrac{1}{2}e\gamma H(0.c)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon + \{-\tfrac{1}{2}\beta H(0.c) + \tfrac{1}{2}e\gamma H(0.s)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon$$

$$2(\overline{W}_0+\nu)\Delta\nu = \{-\tfrac{1}{2}\beta H(0.s) + \tfrac{1}{2}e\gamma H(0.c)\}\varepsilon \\ +(\alpha - e\beta)H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - (\alpha - e\beta)H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon \\ +\{-\tfrac{1}{2}\beta H(0.s) - \tfrac{1}{2}e\gamma H(0.c)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon + \{\tfrac{1}{2}\beta H(0.c) - \tfrac{1}{2}e\gamma H(0.s)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon$$

$$\frac{r}{a}\left[\left(\int L d\varepsilon\right) + \left(\frac{d\overline{W}_0}{d\eta}\right)\Delta\varepsilon + 2(\overline{W}_0+\nu)\Delta\nu\right] = \\ \{F'(0.s) - \tfrac{1}{2}eH'(0.s) - \tfrac{1}{2}e\alpha H(0.s) - \beta(1-\tfrac{1}{2}e^2)H(0.s) + \tfrac{3}{2}e\gamma H(0.c)\}\varepsilon \\ +\{H'(0.s) - eF'(0.s) + \alpha H(0.s) - \gamma(1+e^2)H(0.c)\}\varepsilon\cos\varepsilon \\ -\{H'(0.c) + (\alpha - e\beta)H(0.c) + \gamma H(0.s)\}\varepsilon\sin\varepsilon \\ -\tfrac{1}{2}\{eH'(0.s) + (e\alpha - e^2\beta)H(0.s) - e\gamma H(0.c)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon \\ +\tfrac{1}{2}\{eH'(0.c) + (e\alpha - e^2\beta)H(0.c) + e\gamma H(0.s)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon$$

$$\overline{W}_0 k = -\tfrac{1}{2}\beta(1-e^2)H(0.s)\varepsilon \\ +\tfrac{1}{2}e\beta H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - e\beta H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon \\ -\tfrac{1}{2}\beta H(0.s)\varepsilon\cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}\beta H(0.c)\varepsilon\sin 2\varepsilon$$

Substituirt man diese Ausdrücke in (52), so ergiebt sich nach der Integration

$$\begin{aligned}\Delta n\delta z = {} & \tfrac{1}{2}\{F'(0.s) - \tfrac{1}{2}eH'(0.s) - \tfrac{1}{2}e\alpha H(0.s) - (\tfrac{3}{2}-e^2)\beta H(0.s) + \tfrac{3}{2}e\gamma H(0.c)\}\varepsilon^2 \\ & + \{H'(0.s) - eF'(0.s) + \alpha H(0.s) + \tfrac{1}{2}e\beta H(0.s) - (1+e^2)\gamma H(0.c)\}\varepsilon\sin\varepsilon \\ & \qquad + \{H'(0.c) + \alpha H(0.c) + \gamma H(0.s)\}\varepsilon\cos\varepsilon \\ & - \tfrac{1}{4}\{eH'(0.s) + e\alpha H(0.s) + (1-e^2)\beta H(0.s) - e\gamma H(0.c)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon \\ & \qquad - \tfrac{1}{4}\{eH'(0.c) + e\alpha H(0.c) + (1-e^2)\beta H(0.c) + e\gamma H(0.s)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon\end{aligned} \tag{57}$$

Man bekommt ferner die Producte

$$\left\{\left(\frac{d^2\overline{W}_0}{d\eta^2}\right) + 2(\overline{W}_0+\nu)\right\}\Delta\varepsilon = \beta\{F(1.s) + \tfrac{1}{2}G(2.s) + \tfrac{1}{2}H(0.s)\}$$
$$+\gamma\{2k + 2C + G(1.c) - eF(1.c) - \tfrac{1}{2}eG(2.c) - \tfrac{1}{2}eH(0.c)\}$$

$$2(\overline{W}_0+\nu)\frac{\Delta\chi}{\cos\varphi} = \gamma\{2k+2C+2G(1.c)\}$$
$$-\gamma H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon + \gamma H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$\left(\frac{d\overline{W}_0}{d\eta}\right)\frac{\Delta a}{a} = -\alpha G(1.s) - \alpha H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon - \alpha H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon$$

und hiemit giebt der Ausdruck (54)

$$\begin{aligned}\Delta\nu = {} & \tfrac{1}{2}\{G'(1.s) + \alpha G(1.s) - \beta[F(1.s) + \tfrac{1}{2}G(2.s) + \tfrac{1}{2}H(0.s)] \\ & \qquad + \gamma[G(1.c) + eF(1.c) + \tfrac{1}{2}eG(2.c) + eH(0.c)]\}\varepsilon \\ & - \tfrac{1}{2}\{H'(0.s) + \alpha H(0.s) - \gamma H(0.c)\}\varepsilon\cos\varepsilon \\ & \qquad + \tfrac{1}{2}\{H'(0.c) + \alpha H(0.c) + \gamma H(0.s)\}\varepsilon\sin\varepsilon\end{aligned} \tag{58}$$

womit die bez. Ausdrücke für $\Delta n\delta z$ und $\Delta\nu$ erlangt sind.

119.

Um zu zeigen, dass die eben entwickelten Ausdrücke der im vorvor. Art. verlangten Form gnügen, bedarf es noch der Entwickelung der beiden Functionen

$$F'(0.s) - \tfrac{1}{2}eH'(0.s) \text{ und } G'(1.s) + eH'(0.s)$$

die ich auf die folgende Weise ausführen werde. Aus der Form von L geht hervor, dass $F'(0.s) - \tfrac{1}{2}eH'(0.s)$

das constante Glied in der Entwickelung des Products

$$(1 - e\cos\eta)L$$

ist, und dieses Glied werde ich daher zuerst entwickeln. Das mit $\Delta\lambda$ multiplicirte Glied im Ausdrucke (51) für L ist hier Null, da es sich um Glieder handelt, die vom Index i' unabhängig sind, die übrigen Glieder dieses Ausdrucks werde ich wie folgt stellen,

$$(59)\qquad L=\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon+V\Delta v+(T+X)\left(\Delta v+2\frac{\Delta h}{h}\right)+2\overline{T}\frac{\Delta h}{h}$$
$$+D\frac{u}{\cos i}+E\frac{u_1}{\cos i}$$

Im §. 5 (I) sind die folgenden Ausdrücke entwickelt

$$T=Ma\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)+Nar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$
$$V=M\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)+N\left\{ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)+ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\}$$
$$X=M'a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)+N'ar\frac{d\Omega}{dr}$$
$$D=Ma^2\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon\,dZ}\right)+N\left\{a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ}\right)+a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\right\}$$
$$E=Ma^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

wo

$$M=\frac{1}{\cos^2\varphi}\{-(3-\tfrac{3}{2}e^2)+2e\cos\varepsilon-\tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon$$
$$+e^2\cos(\eta+\varepsilon)-3e\cos\eta+(1-e^2)\cos(\eta-\varepsilon)-e\cos(\eta-2\varepsilon)\}$$
$$N=\frac{1}{\cos^2\varphi}\{e\sin\varepsilon-\tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon$$
$$+e^2\sin(\eta+\varepsilon)-e\sin\eta-(2-e^2)\sin(\eta-\varepsilon)+e\sin(\eta-2\varepsilon)\}$$
$$M'=\frac{1}{\cos^2\varphi}\{-2e^2+2e\cos\varepsilon-e^2\cos(\eta+\varepsilon)+2e\cos\eta-(2-e^2)\cos(\eta-\varepsilon)\}$$
$$N'=\frac{1}{\cos^2\varphi}\{2e\sin\varepsilon-e^2\sin(\eta+\varepsilon)+(2-e^2)\sin(\eta-\varepsilon)\}$$

ist. Bezeichnen wir nun der Kürze wegen die Function $1-e\cos\eta$ mit A, bilden die Producte MA, NA, etc., und nehmen dabei nur auf die von η unabhängigen Glieder in denselben Rücksicht, da die von η abhängigen zu dem zu suchenden constanten Gliede nichts beitragen können, so ergiebt sich mit wenig Mühe,

$$AM=-3,\qquad AN=0,$$
$$AM'=\frac{1}{\cos^2\varphi}\{-3e^2+3e\cos\varepsilon\},\quad AN'=\frac{3e}{\cos^2\varphi}\sin\varepsilon$$

Es wird also hier

$$AT=-3a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$

und hieraus folgt

$$A\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)=-3a\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2}\right)$$

ferner wird

$$AV=-3\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)$$
$$A(T+X)=\frac{1}{\cos^2\varphi}\{-3+3e\cos\varepsilon\}a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)+\frac{3e}{\cos^2\varphi}\sin\varepsilon\;ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke bez. mit den Ausdrücken des vor. Art. für $\Delta\varepsilon$ und Δv, sowie mit

$$\Delta v+2\frac{\Delta h}{h}=e\beta-\beta\cos\varepsilon-e\gamma\sin\varepsilon$$

so bekommt man

$$A\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon = \{-3\gamma - 3\beta\sin\varepsilon + 3e\gamma\cos\varepsilon\}\, a\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2}\right)$$

$$AV.\Delta\nu = \{-3\alpha + 3e\beta + 3\beta\cos\varepsilon + 3e\gamma\sin\varepsilon\}\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)$$

$$A(T+X)\left(.\Delta\nu + 2\frac{\Delta h}{h}\right) = \frac{1}{\cos^2 q}\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\beta + 3(1+e^2)\beta\cos\varepsilon + 3e\gamma\sin\varepsilon \\ -\frac{3}{2}e\beta\cos 2\varepsilon - \frac{3}{2}e^2\gamma\sin 2\varepsilon \end{array}\right\} a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$

$$+\frac{1}{\cos^2 q}\left\{\begin{array}{l} -\frac{3}{2}e^2\gamma + 3e^2\beta\sin\varepsilon \\ -\frac{3}{2}e\beta\sin 2\varepsilon + \frac{3}{2}e^2\gamma\cos 2\varepsilon \end{array}\right\} ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Aus dem Art. 38 (II) sind jetzt die folgenden Glieder zu entnehmen,

$$a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = -b(1.c)\sin\varepsilon + b(1.s)\cos\varepsilon - b(2.c)\sin 2\varepsilon + b(2.s)\cos 2\varepsilon$$

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \tfrac{1}{2}c(0.c) + c(1.c)\cos\varepsilon + c(1.s)\sin\varepsilon + c(2.c)\cos 2\varepsilon + c(2.s)\sin 2\varepsilon$$

woraus

$$a\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2}\right) = -b(1.c)\cos\varepsilon - b(1.s)\sin\varepsilon$$

$$\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right) = -c(1.c)\sin\varepsilon + c(1.s)\cos\varepsilon$$

folgt. Substituirt man diese in die vorstehenden Ausdrücke, multiplicirt, und behält blos die constanten Glieder bei, so wird

$$A\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon = \tfrac{3}{2}\beta b(1.s) - \tfrac{3}{2}e\gamma b(1.c)$$

$$AV.\Delta\nu = \tfrac{3}{2}\beta c(1.s) - \tfrac{3}{2}e\gamma c(1.c)$$

$$A(T+X)\left(.\Delta\nu + 2\frac{\Delta h}{h}\right) = \frac{\beta}{\cos^2 q}\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{2}(1+e^2)b(1.s) - \frac{3}{4}eb(2.s) \\ +\frac{3}{2}e^2c(1.s) - \frac{3}{4}ec(2.s) \end{array}\right\}$$

$$+\frac{\gamma}{\cos^2 q}\left\{\begin{array}{l} -\frac{3}{2}eb(1.c) + \frac{3}{4}e^2b(2.c) \\ -\frac{3}{4}e^2c(0.c) + \frac{3}{4}e^2c(2.c) \end{array}\right\}$$

Wegen der Relation $G(1.s) = -eH(0.s)$ ergiebt sich mit bloser Rücksicht auf das constante Glied aus dem Art. 46 (II)

$$AT = -\tfrac{1}{2}eH(0.s)$$

und hiemit wird sogleich

$$2A\overline{T}\frac{\Delta h}{h} = \tfrac{1}{2}e\alpha H(0.s) - e^2\beta H(0.s)$$

Wegen $u_1 = \frac{du}{d\varepsilon}$ wird

$$Du + Eu_1 = Ma^2\left(\frac{d.u\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)}{d\varepsilon}\right) + N\left\{a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ}\right) + a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\right\}$$

also

$$A(Du+Eu_1) = -3a^2\left(\frac{d.u\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)}{d\varepsilon}\right) = 0$$

da in dem Differentialquotienten kein constantes Glied vorhanden sein kann. Addiren wir nun die eben entwickelten Ausdrücke, so wird zufolge (59)

$$\begin{aligned} AL = &\frac{\beta}{\cos^2\varphi}\left\{\begin{matrix} 3b(1.s) - \frac{3}{4}eb(2.s) \\ +\frac{3}{2}c(1.s) - \frac{3}{4}ec(2.s)\end{matrix}\right\} \\ &+\frac{e\gamma}{\cos^2\varphi}\left\{\begin{matrix} -(3-\frac{3}{2}e^2)b(1.c) + \frac{3}{2}eb(2.c) \\ -\frac{3}{4}ec(0.c) - \frac{3}{2}(1-e^2)c(1.c) + \frac{3}{4}ec(2.c)\end{matrix}\right\} \\ &+\tfrac{1}{2}e\alpha H(0.s) - e^2\beta H(0.s) \\ &= F'(0.s) - \tfrac{1}{2}eH'(0.s) \end{aligned}$$

Aber die Gleichungen (15) (II) geben

$$H(0.s) = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left\{\begin{matrix} 2b(1.s) - \frac{1}{2}eb(2.s) \\ +c(1.s) - \frac{1}{2}ec(2.s)\end{matrix}\right\}$$

$$H(0.c) = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left\{\begin{matrix} (2-e^2)b(1.c) - \frac{1}{2}eb(2.c) \\ +\frac{1}{2}ec(0.c) + (1-e^2)c(1.c) - \frac{1}{2}ec(2.c)\end{matrix}\right\}$$

und es wird also

$$F'(0.s) - \tfrac{1}{2}eH'(0.s) = \tfrac{1}{2}e\alpha H(0.s) + (\tfrac{3}{2}-e^2)\beta H(0.s) - \tfrac{3}{2}e\gamma H(0.c)$$

woraus hervorgeht, dass der Coefficient von ε^2 des Ausdrucks (57) in der That gleich Null ist, wie im Art. 117 verlangt wurde. Eliminiren wir durch Hülfe der vorstehenden Gleichung $F'(0.s)$ aus dem Coefficienten von $\varepsilon\sin\varepsilon$ in (57), so wird dieser Coefficient

$$(1-\tfrac{1}{2}e^2)H'(0.s) + (1-\tfrac{1}{2}e^2)\alpha H(0.s) - (e-e^2)\beta H(0.s) - (1-\tfrac{1}{2}e^2)\gamma H(0.c)$$

Setzt man daher $\quad \Delta H(0.c) = H'(0.c) + \alpha H(0.c) + \gamma H(0.s)$

$$\Delta H(0.s) = H'(0.s) + \alpha H(0.s) - \gamma H(0.c)$$

so wird (57)

$$\begin{aligned} (60)\quad \Delta n\delta z = &\left\{(1-\tfrac{1}{2}e^2)\Delta H(0.s) - \beta e\cos^2\varphi\, H(0.s)\right\}\varepsilon\sin\varepsilon + \Delta H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon \\ &-\tfrac{1}{4}\left\{e\,\Delta H(0.s) + \beta\cos^2\varphi\, H(0.s)\right\}\varepsilon\sin 2\varepsilon - \tfrac{1}{4}\left\{e\,\Delta H(0.c) + \beta\cos^2\varphi H(0.c)\right\}\varepsilon\cos 2\varepsilon \end{aligned}$$

mit der im Art. 117 verlangten Form übereinstimmend, da $\beta = \frac{\Delta q}{\cos\varphi}$ ist.

120.

Es ist klar, dass die Function $G'(1.s) + eH'(0.s)$ dem constanten Gliede der Entwickelung des Products

$$2(\cos(\eta-\varepsilon) + e\cos\eta)L$$

gleich ist, und wir müssen daher jetzt dieses Glied entwickeln. Die oben angeführten Ausdrücke für M und N geben

$$\left(\frac{dM}{d\varepsilon}\right) = \frac{1}{\cos^2\varphi}\{-2e\sin\varepsilon + e^2\sin 2\varepsilon$$
$$-e^2\sin(\eta+\varepsilon) + (4-e^2)\sin(\eta-\varepsilon) - 2e\sin(\eta-2\varepsilon)\}$$
$$\left(\frac{dN}{d\varepsilon}\right) = \frac{1}{\cos^2\varphi}\{e\cos\varepsilon - e^2\cos 2\varepsilon$$
$$+e^2\cos(\eta+\varepsilon) + (2-e^2)\cos(\eta-\varepsilon) - 2e\cos(\eta-2\varepsilon)\}$$

Multipliciren wir zuerst diese mit dem Factor $2(\cos(\eta-\varepsilon) + e\cos\eta)$, den ich zur Abkürzung B nennen werde, und nehmen in dem Product wieder nur die von η unabhängigen Glieder auf, so ergiebt sich

$$B\left(\frac{dM}{d\varepsilon}\right) = -\frac{2e}{\cos^2\varphi}\sin\varepsilon + \frac{e^2}{\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon$$
$$B\left(\frac{dN}{d\varepsilon}\right) = \frac{2-e^2}{\cos^2\varphi} - \frac{e^2}{\cos^2\varphi}\cos 2\varepsilon$$

und wir erhalten ferner

$$BM = 4\,,\quad BN = 0$$
$$BM' = -\frac{2-3e^2}{\cos^2\varphi} - \frac{e^2}{\cos^2\varphi}\cos 2\varepsilon$$
$$BN' = -\frac{2e}{\cos^2\varphi}\sin\varepsilon - \frac{e^2}{\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon$$
$$B\overline{T} = 0$$

Setzt man nun die Entwickelungen auf dieselbe Art fort wie im vor. Art., so ergiebt sich

$$B\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon = \frac{1}{\cos^2\varphi}\{\beta[-e+\tfrac{1}{2}e^2\cos\varepsilon + e\cos 2\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\cos 3\varepsilon]$$
$$+\gamma[-(2e+\tfrac{1}{2}e^3)\sin\varepsilon + 2e^2\sin 2\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^3\sin 3\varepsilon]\}\,a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$
$$+\frac{1}{\cos^2\varphi}\{\beta'[(2-\tfrac{1}{2}e^2)\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\sin 3\varepsilon]$$
$$+\gamma'[(2-e^2)-(2e-\tfrac{3}{2}e^3)\cos\varepsilon - e^2\cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^3\cos 3\varepsilon]\}\,ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$
$$+\{4\beta'\sin\varepsilon + 4\gamma - 4\gamma e\cos\varepsilon\}\,a\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2}\right)$$

$$B\nu\Delta\nu = -\{4\beta\cos\varepsilon + 4\gamma e\sin\varepsilon\}\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)$$

$$B(T+X)\left(\Delta\nu + 2\frac{\Delta h}{h}\right) =$$
$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\{\beta[2e-e^3)-(2-\tfrac{3}{2}e^2)\cos\varepsilon - e^2\cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^2\cos 3\varepsilon]$$
$$+\gamma[-(2e-\tfrac{1}{2}e^3\sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^3\sin 3\varepsilon]\}\,a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$
$$+\frac{1}{\cos^2\varphi}\{\beta[-\tfrac{3}{2}e^2\sin\varepsilon + (e-e^3)\sin 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^2\sin 3\varepsilon]$$
$$+\gamma[e^2+\tfrac{1}{2}e^3\cos\varepsilon - e^2\cos 2\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^3\cos 3\varepsilon]\}\,ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Da die übrigen Glieder von BL Nichts geben, so wird zuerst, wenn wir auch diejenigen constanten Glieder der vorstehenden Ausdrücke weglassen, die auch Nichts geben können,

$$BL = \{\beta[-2\cos\varepsilon + e\cos 2\varepsilon] + \tfrac{\gamma}{\cos^2 q}[-4e\sin\varepsilon + 2e^2\sin 2\varepsilon]\}a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$
$$+\{\beta[2\sin\varepsilon + e\sin 2\varepsilon] + \tfrac{\gamma}{\cos^2 q}[2 - 2e(1-e^2)\cos\varepsilon - 2e^2\cos 2\varepsilon]\}ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$
$$+\{4\beta\sin\varepsilon - 4\gamma e\cos\varepsilon\}a\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2}\right)$$
$$+\{-4\beta\cos\varepsilon - 4\gamma e\sin\varepsilon\}\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)$$

und nach der Substitution der oben angeführten Glieder der Differentialquotienten von Ω wird das constante Glied

$$BL = \beta\begin{Bmatrix} -3b(1.s) + \frac{1}{2}eb(2.s) \\ -\ c(1.s) + \frac{1}{2}ec(2.s) \end{Bmatrix}$$
$$+\tfrac{\gamma}{\cos^2 q}\begin{Bmatrix} 4e(1-e^2)b(1.c) - e^2b(2.c) \\ +c(0.c) + e(1-e^2)c(1.c) - e^2c(2.c) \end{Bmatrix}$$
$$= G'(1.s) + eH'(0.s)$$

Suchen wir nun die constanten Glieder in den Producten von T mit

$$C = 2\cos\varepsilon + \cos(\eta - 2\varepsilon) - (1-2e^2)\cos\eta$$

und

$$D = -2\sin(\eta-\varepsilon) + 2e\sin\varepsilon - e\sin(\eta-2\varepsilon) - e\sin\eta$$

Durch die Multiplicationen von M und N mit diesen Factoren, und blose Beibehaltung der von η unabhängigen Glieder der Producte findet man zuerst

$$CT = \{3 - 6\cos\varepsilon + e\cos 2\varepsilon\}a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + \{-2\sin\varepsilon + e\sin 2\varepsilon\}ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$
$$DT = \tfrac{1}{\cos^2\varphi}\{-(8e - 4e^3)\sin\varepsilon + 2e^2\sin 2\varepsilon\}a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$
$$+\tfrac{1}{\cos^2\varphi}\{2 + 2e(1-e^2)\cos\varepsilon - 2e^2\cos 2\varepsilon\}a\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

und wenn man die mehrmals angewandten Ausdrücke von $a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ und $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ substituirt und in den Producten blos die constanten Glieder aufnimmt, wird

$$CT = -3b(1.s) + \tfrac{1}{2}eb(2.s) - c(1.s) + \tfrac{1}{2}ec(2.s)$$
$$DT = \tfrac{1}{\cos^2\varphi}\{(4e - 2e^3)b(1.c) - e^2b(2.c) + c(0.c) + e(1-e^2)c(1.c) - e^2c(2.c)\}$$

Es wird also zufolge des oben erhaltenen Ausdrucks für BL,

$$G'(1.s) + eH'(0.s) = \beta CT + \gamma DT$$

wenn rechter Hand blos die constanten Glieder berücksichtigt werden. Unter dieser Bedingung ist aber augenscheinlich

$$CT = F(1.s) + \tfrac{1}{2}G(2.s) - (\tfrac{1}{2} - e^2)H(0.s)$$
$$DT = -G(1.c) - eF(1.c) - \tfrac{1}{2}eG(2.c) + \tfrac{1}{2}eH(0.c)$$

womit schliesslich

$$G'(1.s) + eH'(0.s) = \beta\{F(1.s) + \tfrac{1}{2}G(2.s) - (\tfrac{1}{2} - e^2)H(0.s)\}$$
$$-\gamma\{G(1.c) + eF(1.c) + \tfrac{1}{2}eG(2.c) - \tfrac{1}{2}eH(0.c)\}$$

erhalten wird. Eliminirt man durch diese Gleichung $G'(1.s)$ aus dem Coefficienten von ε des Ausdrucks (58), und bedenkt, dass $G(1.s) = -eH(0.s)$ ist, so wird dieser Coefficient

$$-\tfrac{1}{2}\{eH'(0.s) + e\alpha H(0.s) + \beta(1-e^2)H(0.s) - e\gamma H(0.c)\}$$

Führen wir ausserdem die oben gegebenen Ausdrücke von $\Delta H(0.s)$ und $\Delta H(0.c)$ ein, so verwandelt sich (58) in

$$\Delta v = -\tfrac{1}{2}\{e\Delta H(0.s) + \beta\cos^2\varphi\, H(0.s)\}\varepsilon \qquad (61)$$
$$-\tfrac{1}{2}\Delta H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Delta H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon$$

welches die Form ist, die zufolge des Art. 117 die Säcularänderungen in Δv haben müssen.

121.

Wenden wir uns jetzt zu den Breitenstörungen, und nehmen an, dass von der im Art. 116 mit H bezeichneten Function die folgenden Glieder erhalten seien,

$$H = T'(0.s) + V'(0.s)\cos\eta - V'(0.c)\sin\eta$$

die die Einzigen sind, aus welchen die Verbesserungen der Säcularänderungen in Δu hervorgehen können. Hieraus ziehen wir

$$\left(\int H\,d\varepsilon\right) = T'(0.s)\,\varepsilon - V'(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon + V'(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

Von u entnehmen wir aus dem Art. 50 (II) die folgenden Glieder

$$\frac{u}{\cos i} = -eV(0.s)\,\varepsilon - V(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon + V(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

woraus

$$\frac{u_1}{\cos i} = -V(0.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon - V(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon$$

sich ergiebt. Multiplicirt man diese bez. mit

$$\frac{d\Delta\varepsilon}{d\varepsilon} = \beta\cos\varepsilon + e\gamma\sin\varepsilon$$
$$\Delta\varepsilon = \gamma + \beta\sin\varepsilon - e\gamma\cos\varepsilon$$

so ergiebt sich

$$\frac{u_1}{\cos i}\cdot\Delta\varepsilon = \{-\tfrac{1}{2}\beta V(0.s) + \tfrac{1}{2}e\gamma V(0.c)\}\,\varepsilon$$
$$-\gamma\, V(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon \qquad -\gamma V(0.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$+\{-\tfrac{1}{2}\beta V(0.c)+\tfrac{1}{2}e\gamma V(0.s)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon+\{\tfrac{1}{2}\beta V(0.s)+\tfrac{1}{2}e\gamma V(0.c)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon$$
$$\frac{u}{\cos i}\cdot\frac{d.\Delta\varepsilon}{d\varepsilon} = \{\tfrac{1}{2}\beta V(0.s) - \tfrac{1}{2}e\gamma V(0.c)\}\,\varepsilon$$
$$-e^2\gamma V(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon \qquad -e\beta V(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$+\{-\tfrac{1}{2}\beta V(0.c)+\tfrac{1}{2}e\gamma V(0.s)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon+\{\tfrac{1}{2}\beta V(0.s)+\tfrac{1}{2}e\gamma V(0.c)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

und hiemit erhalten wir

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = \{T'(0.s) - \beta V(0.s) + e\gamma V(0.c)\}\,\varepsilon$$
$$(62)\qquad -\{V'(0.c)+\gamma(1-e^2)V(0.s)\}\,\varepsilon\sin\varepsilon+\{V'(0.s)+e\beta V(0.s)-\gamma V(0.c)\}\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

122.

Wir haben jetzt die Function

$$T'(0.s) + eV'(0.s)$$

zu bestimmen, und es ist klar, dass diese dem constanten Gliede in der Entwickelung des Products

$$(1+2e\cos\eta)\,\Pi$$

gleich sein muss. Dieses soll daher jetzt entwickelt werden. Aus §. 5 (I) haben wir

$$U = Qa^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i;\quad Y = Qa^2r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ}\right)\cos i$$

wo

$$Q = e\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon$$
$$+\tfrac{1}{2}e^2\sin(\eta+\varepsilon) - \tfrac{3}{2}e\sin\eta + (1+\tfrac{1}{2}e^2)\sin(\eta-\varepsilon) - \tfrac{1}{2}e\sin(\eta-2\varepsilon)$$

ist. Hieraus finden wir, wenn wieder die von η abhängigen Glieder im Product übergangen werden,

$$(1+2e\cos\eta)\;Q = 0$$

und daher wird auch

$$(1+2e\cos\eta)\,U = 0;\;\; (1+2e\cos\eta)\,Y = 0$$

Es ergiebt sich ferner aus §. 5 (I), dass

$$D_1'' = PW\cos i;\;\; E_1'' = PW_1\cos i$$

wo W und W_1 von η unabhängig sind, und

$$P = e\sin\varepsilon - e\sin\eta + \sin(\eta-\varepsilon)$$

ist. Die Multiplication giebt hier wieder in demselben Sinne wie oben

$$(1+2e\cos\eta)\,P = 0$$

woraus

$$(1+2e\cos\eta)\,D_1'' = 0;\;\; (1+2e\cos\eta)\,E_1'' = 0$$

folgt. Da nun wieder für die betreffenden Glieder $\Delta\lambda = 0$ ist, so wird zufolge (55) auch

$$(1 + 2e\cos\eta)\,\Pi = 0$$

oder mit Worten: in der Entwickelung dieser Function ist kein constantes Glied vorhanden. Es ist daher auch

$$T'(0.s) + eV'(0.s) = 0$$

Eliminiren wir durch diese Gleichung $T'(0.s)$ aus dem mit ε multiplicirten Gliede des Ausdrucks (62), so wird der Coefficient dieses Gliedes

$$-\{V'(0.s) + \beta V(0.s) - e\gamma V(0.c)\}$$

und setzen wir

$$\Delta V(0.s) = V'(0.s) + e\beta V(0.s) - \gamma V(0.c)$$
$$\Delta V(0.c) = V'(0.c) + \gamma\cos^2\varphi\, V(0.s)$$

so geht der Ausdruck (62) über in

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = -\{e\Delta V(0.s) + \beta\cos^2\varphi V(0.s)\}\varepsilon - \Delta V(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon + \Delta V(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon \qquad (63)$$

welcher auch die Form hat, die im Art. 117 verlangt wurde.

123.

Bei der Anwendung des in diesem § entwickelten Verfahrens zur Verbesserung der mit fehlerhaften elliptischen Elementen berechneten Störungscoefficienten braucht man, die Säcularänderungen anbelangend, vermittelst der allgemeinen Ausdrücke (52), (54), (56), nur die in $\Delta n\delta z$ und Δu mit $\varepsilon\sin\varepsilon$ und $\varepsilon\cos\varepsilon$ multiplicirten Glieder zu berechnen, da die übrigen, kleineren, Glieder durch die eben abgeleiteten Ausdrücke (60), (61), (63), sich aus denselben einfach ergeben. Man kann übrigens auch diese kleineren Glieder aus den eben genannten allgemeinen Formeln berechnen, und durch die zuletzt genannten Ausdrücke prüfen, ob man sie richtig berechnet hat. Wenn ausser der Verbesserung der Coefficienten der Säcularänderungen auch die anderer Störungscoefficienten merklich wird, so ist es am Einfachsten, die genannten in $\Delta n\delta z$ und Δu mit $\varepsilon\sin\varepsilon$ und $\varepsilon\cos\varepsilon$ multiplicirten Coefficienten zugleich mit den anderen durch die in dieser Abhandlung erklärten numerischen Multiplicationen zu berechnen; sollte aber der Fall eintreffen, dass blos die Verbesserung der Coefficienten der Säcularänderungen für merklich erachtet werden kann, so wird dieses durch vollständig entwickelte Aus-

drücke der Coefficienten $H'(0.c)$, $H'(0.s)$, $V'(0.c)$, $V'(0.s)$ geschehen können. Ich werde daher diese Entwickelungen ausführen.

Aus dem für T im §. 5 (II) gegebenen Ausdruck folgt mit bloser Rücksichtnahme auf die Glieder, die für unsern jetzigen Zweck in Anwendung kommen,

$$\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right) = -G(1.c)\cos(-\eta+\varepsilon) - G(1.s)\sin(-\eta+\varepsilon)$$
$$-H(1.c)\cos(\quad\eta+\varepsilon) - H(1.s)\sin(\eta+\varepsilon)$$

Sei ferner

$$V+X+T = -M(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon) + M(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon)$$
$$-N(0.c)\sin\eta \qquad + N(0.s)\cos\eta$$
$$-N(1.c)\sin(\eta+\varepsilon) \quad + N(1.s)\cos(\eta+\varepsilon)$$
$$T+T+X = -P(0.c)\sin\eta \qquad + P(0.s)\cos\eta$$
$$D = \quad Q(1.c)\cos(-\eta+\varepsilon) - Q(1.s)\sin(-\eta+\varepsilon)$$
$$+R(0.c)\cos\eta \qquad - R(0.s)\sin\eta$$
$$+R(1.c)\cos(\eta+\varepsilon) \quad - R(1.s)\sin(\eta+\varepsilon)$$
$$E = \quad S(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon) + S(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon)$$
$$+T(1.c)\sin(\eta+\varepsilon) \quad + T(1.s)\cos(\eta+\varepsilon)$$

Die numerischen Werthe aller dieser Coefficienten sind bekannt, wenn man die Störungen zweiter Ordnung berechnet hat, da man alsdann die numerischen Werthe der Coefficienten nicht nur von T, sondern auch von V, X, D, E kennt. Multiplicirt man nun die vorstehenden Ausdrücke nach Anleitung des Ausdrucks (51) mit

$$\Delta\varepsilon = \gamma + \beta\sin\varepsilon - e\gamma\cos\varepsilon$$
$$\Delta v = \alpha - e\beta - \beta\cos\varepsilon - e\gamma\sin\varepsilon$$
$$2\frac{\Delta h}{h} = -\alpha + 2e\beta$$
$$\frac{\Delta u}{\cos i} = -e\mu + \lambda\sin\varepsilon + \mu\cos\varepsilon$$
$$\frac{\Delta u_1}{\cos i} = \lambda\cos\varepsilon - \mu\sin\varepsilon$$

wovon die beiden letzten die Ausdrücke (46) und (47) sind, so bekommt man, wenn man die Bedeutung, die $H'(0.c)$ und $H'(0.s)$ im Art. 118 beigelegt worden ist, berücksichtigt,

$$H'(0.c) = \alpha\,\{\quad N(0.c) - P(0.c)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\beta\,\{\quad G(1.c) - H(1.c) + M(1.c) - N(1.c) + 2e[2P(0.c) - N(0.c)]\}$$
$$+\tfrac{1}{2}e\gamma\{\quad G(1.s) - H(1.s) + M(1.s) - N(1.s)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\lambda\,\{-\,Q(1.c) + R(1.c) + S(1.c) - T(1.c)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\mu\,\{-2eR(0.s) - Q(1.s) + R(1.s) + S(1.s) - T(1.s)\}$$

$$
\begin{aligned}
H'(0.s) = \alpha\,\{ & \quad N(0.s) - P(0.s)\}\\
+\tfrac{1}{2}\beta\,\{ & - G(1.s) - H(1.s) - M(1.s) - N(1.s) + 2e[2P(0.s) - N(0.s)]\}\\
+\tfrac{1}{2}e\gamma\,\{ & \quad G(1.c) + H(1.c) + M(1.c) + N(1.c)\}\\
+\tfrac{1}{2}\lambda\,\{ & - Q(1.s) - R(1.s) + S(1.s) + T(1.s)\}\\
+\tfrac{1}{2}\mu\,\{ & - 2eR(0.c) + Q(1.c) + R(1.c) - S(1.c) - T(1.c)\}
\end{aligned}
$$

124.

Für die Entwickelung von $V'(0.c)$ und $V'(0.s)$, deren Bedeutung aus dem Art. 121 erhellt, nehme ich zuerst aus dem §. 5 (II)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dU}{\cos i\, d\varepsilon}\right) = & - U(1.s)\sin(-\eta+\varepsilon) - U(1.c)\cos(-\eta+\varepsilon)\\
& - V(1.s)\sin(\eta+\varepsilon) \quad - V(1.c)\cos(\eta+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

und setze ferner

$$
\begin{aligned}
\frac{2U+Y}{\cos i} = & + A(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon) - A(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon)\\
& + B(0.s)\cos\eta \qquad - B(0.c)\sin\eta\\
& + B(1.s)\cos(\eta+\varepsilon) \quad - B(1.c)\sin(\eta+\varepsilon)\\
\frac{D''_1}{\cos i} = & - C(1.s)\sin(-\eta+\varepsilon) + C(1.c)\cos(-\eta+\varepsilon)\\
& - D(0.s)\sin\eta \qquad + D(0.c)\cos\eta\\
& - D(1.s)\sin(\eta+\varepsilon) \quad + D(1.c)\cos(\eta+\varepsilon)\\
\frac{E''_1}{\cos i} = & \quad E(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon) + E(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon)\\
& + F(1.s)\cos(\eta+\varepsilon) \quad + F(1.c)\sin(\eta+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

wo die numerischen Werthe der Coefficienten auch bekannt sind. Multiplicirt man diese mit den im vor. Art. angegebenen Factoren nach Maassgabe des Ausdrucks (55), so bekommt man

$$
\begin{aligned}
V'(0.s) = & \alpha B(0.s)\\
& + \tfrac{1}{2}\beta\,\{ - U(1.s) - V(1.s) - A(1.s) - B(1.s) - 2eB(0.s)\}\\
& + \tfrac{1}{2}e\gamma\,\{ \quad U(1.c) + V(1.c) + A(1.c) + B(1.c)\}\\
& + \tfrac{1}{2}\lambda\,\{ - C(1.s) - D(1.s) + E(1.s) + F(1.s)\}\\
& + \tfrac{1}{2}\mu\,\{ - 2eD(0.c) + C(1.c) + D(1.c) - E(1.c) - F(1.c)\}\\
V'(0.c) = & \alpha B(0.c)\\
& + \tfrac{1}{2}\beta\,\{ \quad U(1.c) - V(1.c) + A(1.c) - B(1.c) - 2eB(0.c)\}\\
& + \tfrac{1}{2}e\gamma\,\{ \quad U(1.s) - V(1.s) + A(1.s) - B(1.s)\}\\
& + \tfrac{1}{2}\lambda\,\{ - C(1.c) + D(1.c) + E(1.c) - F(1.c)\}\\
& + \tfrac{1}{2}\mu\,\{ - 2eD(0.s) - C(1.s) + D(1.s) + E(1.s) - F(1.s)\}
\end{aligned}
$$

125.

Die bis hieher abgehandelte Verbesserung der Störungscoefficienten ist nur ein Theil der ganzen Verbesserung, indem noch die Verbesserung zu berücksichtigen ist, die Δn in den Integrationsdivisoren bewirkt. Diese muss hier ein wenig anders ausgeführt werden, wie die im Art. 56 (II) erklärte, die von dem Unterschiede zwischen dem osculirenden und dem wahren Werthe der mittleren Bewegung herrührte. Während dort zwischen dem n_0 der Zähler und dem n der Nenner unterschieden werden musste, muss hier dieser Unterschied wegfallen, oder es müssen mit anderen Worten die Integrationsdivisoren grade so genommen werden, wie sie in der Berechnung der Störungscoefficienten angewandt werden. Nennen wir daher wieder im Allgemeinen F die Function, deren Integral wegen Δn zu verbessern ist, so muss die Variation von

$$\int F d\varepsilon = \frac{\gamma_c}{i-i'\mu} \sin\{(i-i'\mu)\varepsilon + A\} - \frac{\gamma_s}{i-i'\mu} \cos\{i-i'\mu)\varepsilon + A\}$$

angewandt werden, und diese wird

$$\Delta \int F d\varepsilon = \varphi(i,i') \int F d\varepsilon$$

wo

$$\varphi(i,i') = -\frac{i'\mu}{i-i'\mu} \cdot \frac{\Delta n}{n}$$

ist, und sich, abgesehen von dem Werthe von Δn, von der a. a. O. mit $f(i,i')$ bezeichneten Grösse blos dadurch unterscheidet, dass $i'\mu$ statt i im Zähler enthalten ist. Es sind nun die Ausdrücke des Art. 56 (II) für $\Delta P(i,i')$, etc. mit der Abänderung anzuwenden, dass darin $\varphi(i,i')$ statt $f(i,i')$ substituirt werden muss. Setzt man daher hier

$$\Delta P(i,i') = \left(\frac{F(i,i')}{i-i'\mu}\right) \varphi(i,i') + \left(\frac{G(i+1,i')}{i+1-i'\mu}\right) \varphi(i+1,i') + \left(\frac{H(i-1,i')}{i-1-i'\mu}\right) \varphi(i-1,i')$$

$$\Delta Q(i,i') = \left(\frac{G(i+1,i')}{i+1-i'\mu}\right) \varphi(i+1,i') - \left(\frac{H(i-1,i')}{i-1-i'\mu}\right) \varphi(i-1,i')$$

$$\Delta R(i,i') = R(i,i')\varphi(i,i') + \frac{\Delta P(i,i') - \frac{e}{2}\Delta P(i+1,i') - \frac{e}{2}\Delta P(i-1,i')}{i-i'\mu}$$

$$\Delta S(i,i') = S(i,i')\varphi(i,i') + \frac{\Delta Q(i,i')}{i-i'\mu}$$

$$\Delta Y(i,i') = \left(\frac{T(i,i')}{i-i'\mu}\right) \varphi(i,i') + \left(\frac{U(i+1,i')}{i+1-i'\mu}\right) \varphi(i+1,i') + \left(\frac{V(i-1,i')}{i-1-i'\mu}\right) \varphi(i-1,i')$$

so werden die Verbesserungen

$$\Delta n\delta z = \Sigma' \Delta R(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\} - \Sigma' \Delta R(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}$$
$$\Delta v = \tfrac{1}{2}\Sigma' \Delta S(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\} + \tfrac{1}{2}\Sigma' \Delta S(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}$$
$$\frac{\Delta u}{\cos i} = \Sigma' \Delta Y(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\} + \Sigma' \Delta Y(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}$$

126.

Ich komme jetzt zur Anwendung des vorhergehenden Inhalts dieses § auf unser Beispiel. Aus den im Art. 109 gefundenen Verbesserungen der unserm Beispiel zu Grunde gelegten osculirenden Elemente ergab sich in der Bedeutung der Artt. 118 und 111, *)

$$\log\alpha = 6.4303;\ \log\beta = 6.3528;\ \log\gamma = 7.1446n$$
$$\log\lambda = 4.625n;\ \log\mu = 5.433;$$

und hiemit erhält man

$$\Delta\varepsilon = -(7.1446) + 2(6.0518)\sin\varepsilon + 2(5.7724)\cos\varepsilon$$
$$\Delta v = (6.3983) - 2(6.0518)\cos\varepsilon + 2(5.7724)\sin\varepsilon$$
$$2\frac{\Delta h}{h} = -(6.3638)$$
$$\frac{\Delta u}{\cos i} = -(4.362) - 2(4.324)\sin\varepsilon + 2(5.132)\cos\varepsilon$$
$$\frac{\Delta u_1}{\cos i} = -2(4.324)\cos\varepsilon - 2(5.132)\sin\varepsilon$$

Durch den Ausdruck (48) ergab sich

$$\Delta\lambda = (5.6528)$$

und durch (53)

$$k = (5.2816) - 2(6.0518)\cos\varepsilon$$

In diesen Ausdrücken sind die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten, und alle sind in Theilen des Radius angesetzt.

127.

Die numerischen Werthe der Factoren, mit welchen die eben berechneten Functionen multiplicirt werden müssen, sind alle im Vorhergehenden entweder ohne Weiteres enthalten, oder können durch einfache Additionen daraus erhalten werden, ich lasse daher sogleich die für den Ausdruck (51) erforderlichen Producte folgen.

*) Wegen des geringen Betrages von $\Delta\theta$ in diesem Beispiel durfte hier $\Delta\chi = \Delta\pi$ gesetzt werden, während $\Delta\chi = \Delta\pi - 2\sin^2\frac{1}{2}i\,.\,\Delta\theta$ ist.

$\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\Delta\lambda$					
$i,\ i'$	−sin	cos	$i,\ i'$	−sin	cos
0, −2	+0″.001	−0″.001	2, −3	+0″.007	+0″.006
	0.000	0.000		−0.002	−0.002
	−0.001	+0.001		−0.00694	−0.00572
1, −2	−0.008	+0.005	3, −3	+0.004	0.000
	+0.002	−0.001		−0.001	0.000
	+0.008	−0.005		−0.004	0.000
2, −2	−0.002	+0.001	4, −3	−0.006	−0.005
	0.000	0.000		+0.002	+0.001
	+0.002	−0.001		+0.006	+0.005
3, −2	+0.008	−0.005	2, −4	+0.001	+0.004
	−0.002	+0.002		0.000	−0.001
	−0.008	+0.005		−0.001	−0.004
0, −3	0.000	0.000	3, −4	+0.003	−0.005
	−0.00040	−0.00006		−0.001	+0.002
	0.000	0.000		−0.003	+0.006
1, −3	−0.00390	+0.00004	4, −4	−0.001	−0.004
	+0.00117	+0.00014		0.000	+0.001
	+0.00423	−0.00002		+0.001	+0.005

	$\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon$		$(B+T)\Delta v$		$C\frac{\Delta h}{h}$	
$i,\ i'$	−sin	cos	−sin	cos	−sin	cos
0,0,0		−0″.00012		−0″.00028		+0″.00002
−1,1,0	−0″.00042	−0.03824	+0″.01712	+0.00024	0″.00000	−0.00002
0,1,0	−0.001	+0.001	−0.003	−0.002	0.000	0.000
−1,2,0	−0.004	+0.007	+0.008	−0.004	0.000	0.000
1,0,0	−0.00240	+0.00234	−0.00597	+0.00585	−0.00010	+0.00002
2,0	−0.006	+0.017	+0.006	+0.002		
	+0.002	−0.004	0.000	0.000		
	+0.004	−0.010	−0.007	−0.002		
0, −1	0.000	−0.001	+0.001	−0.008		
	+0.001	−0.004	0.000	−0.001		
	+0.003	−0.004	0.000	+0.010		
1, −1	−0.015	+0.006	+0.004	+0.012	0.000	−0.002
	−0.013	+0.004	+0.001	+0.003	0.000	+0.001
	0.000	0.000	−0.005	−0.017	0.000	+0.001
2, −1	−0.004	−0.002	−0.008	0.000		
	+0.004	+0.004	−0.001	−0.001		
	+0.001	+0.002	+0.009	+0.002		
3, −1	+0.024	+0.001	0.000	−0.007		
	−0.007	0.000	0.000	+0.001		
	−0.018	−0.001	0.000	+0.007		
0, −2	+0.003	−0.001	+0.010	−0.003		
	−0.005	−0.003	−0.005	+0.003		
	−0.002	−0.002	−0.006	0.000		

1, −2	−0″.047	−0″.019	−0″.056	+0″.017	+0″.003	−0″.002
	+0.022	+0.015	+0.018	−0.006	−0.001	+0.001
	+0.017	+0.003	+0.046	−0.014	−0.001	+0.001
2, −2	+0.176	+0.254	+0.072	−0.059	−0.014	+0.010
	−0.080	−0.116	−0.021	+0.017	+0.007	−0.005
	−0.092	−0.130	−0.059	+0.049	+0.007	−0.005
3, −2	+0.009	−0.010	−0.015	+0.040		
	−0.006	+0.002	+0.003	−0.012		
	−0.001	+0.008	+0.012	−0.033		
0, −3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	−0.00131	−0.00195	−0.00225	−0.00040	0.00000	−0.00002
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1, −3	−0.00873	−0.00893	−0.01361	−0.00644	+0.00059	−0.00023
	+0.00235	+0.01090	+0.00691	+0.00269	−0.00030	+0.00012
	+0.00353	+0.00405	+0.00900	+0.00544	−0.00030	+0.00012
2, −3	+0.010	+0.106	+0.042	+0.034	−0.005	0.000
	−0.001	−0.052	−0.015	−0.010	+0.002	0.000
	−0.00499	−0.06139	−0.03512	−0.02872	+0.00241	+0.00011
3, −3	+0.173	−0.219	−0.067	−0.033	+0.008	+0.007
	−0.073	+0.092	+0.021	+0.016	−0.004	−0.003
	−0.116	+0.150	+0.057	+0.041	−0.004	−0.003
4, −3	−0.004	−0.011	+0.031	0.000		
	0.000	+0.007	−0.010	0.000		
	+0.004	+0.005	−0.027	−0.001		
1, −4	0.000	−0.001	−0.002	−0.002		
	−0.001	+0.002	0.000	+0.001		
	0.000	0.000	+0.002	0.000		
2, −4	−0.006	+0.022	+0.002	+0.016		
	+0.009	−0.010	0.000	−0.007		
	+0.004	−0.013	−0.002	−0.012		
3, −4	+0.109	−0.045	+0.007	−0.034	0.000	+0.004
	−0.047	+0.018	−0.002	+0.015	0.000	−0.002
	−0.077	+0.032	−0.007	+0.036	0.000	−0.002
4, −4	−0.193	−0.075	−0.006	+0.052	+0.002	−0.005
	+0.078	+0.031	+0.002	−0.016	−0.001	+0.003
	+0.148	+0.055	+0.006	−0.046	−0.001	+0.003

	$D\frac{.tu}{\cos i}$		$E\frac{.tu_1}{\cos i}$	
i, i'	−sin	cos	−sin	cos
0,0,0		+0″.00020		−0″.00020
−1,1,0	+0″.00118	−0.00027	0″.00000	+0.00026
0,1,0	0.000	0.000	0.000	0.000
−1,2,0	0.000	0.000	0.000	0.000
1,0,0	+0.00041	+0.00010	+0.00011	−0.00004
0,−3	0.000	0.000	0.000	0.000
	−0.00003	+0.00003	−0.00012	0.00000
	0.000	0.000	0.000	0.000

1, −3	+0″.00066	+0″.00040	−0″.00031	−0″.00022
	−0.00007	−0.00002	+0.00020	+0.00014
	−0.00086	−0.00049	+0.00020	+0.00014
2, −3	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.000
	+0.00075	+0.00005	+0.00005	−0.00007

Ueberhaupt weiter zu gehen wie bis $i'=4$ hielt ich in dieser Rechnung für unnöthig, da die Verbesserungen der Störungscoefficienten, mit Ausnahme derer, die den kleinsten Divisor erhalten, ersichtlich sehr klein ausfallen werden.

Aus den vorstehenden Werthen ergab sich durch Addition und Integration

$$\int L d\varepsilon$$

i, i	cos	sin	i, i'	cos	sin
0,0,0	−0″.00038 ε		3, −2	+0″.001	+0″.011
−1,1,0	+0.01788	−0″.03802		−0.002	−0.002
0,1,0	−0.004	−0.001		+0.002	−0.015
−1,2,0	+0.002	+0.002	0, −3	0.000	0.000
1,0,0	+0.00827 ε	+0.00795 ε		+0.091	+0.053
2,0	0.000	+0.010		0.000	0.000
	+0.001	−0.001	1, −3	+0.5567	+0.3385
	−0.003	−0.012		+0.0107	+0.0146
0, −1	−0.003	+0.026		−0.0151	−0.0088
	+0.002	−0.008	2, −3	+0.057	+0.153
	−0.002	−0.005		−0.008	−0.033
1, −1	−0.017	+0.025		+0.965	+2.107
	−0.007	+0.005	3, −3	+0.060	−0.125
	+0.014	+0.046		−0.019	+0.036
2, −1	−0.007	0.000		−0.070	+0.197
	+0.001	+0.001	4, −3	+0.007	−0.005
	+0.015	+0.006		−0.002	+0.002
3, −1	+0.009	−0.002		−0.009	+0.005
	−0.002	0.000	1, −4	+0.005	+0.008
	−0.011	+0.004		−0.002	+0.005
0, −2	−0.020	+0.007		−0.001	0.000
	−0.033	0.000	2, −4	−0.005	+0.069
	+0.005	+0.001		+0.006	−0.011
1, −2	−0.356	+0.003		−0.003	+0.074
	+0.032	+0.007	3, −4	+0.074	−0.050
	−0.100	+0.022		−0.019	+0.013
2, −2	+0.178	+0.081		−0.144	+0.119
	−0.041	−0.045	4, −4	−0.076	−0.012
	−0.468	−0.287		+0.022	+0.005
				+0.096	+0.041

128.

Die noch für $\Delta n\delta z$ nach (52) erforderlichen Producte sind die folgenden:

	$\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)\Delta\varepsilon$		$2(\overline{W}+\nu)\Delta\nu$		$\overline{W}k$	
i,i'	cos	sin	cos	sin	cos	sin
0,0	−0″.05146		−0″.05790		−0″.09086	
0,0	+0.00024 ε		+0.00024 ε		+0.00009 ε	
1,0	−0.925	+0″.124	+0.207	+0.163	+0.012	+0″.013
1,0	−0.00361 ε	−0.00112 ε	0.00020 ε	+0.00065 ε	−0.00004 ε	+0.00005 ε
2,0	+0.434	+0.017	− 0.131	−0.027	−0.091	−0.075
2,0	+0.00006 ε	+0.00034 ε	−0.00006 ε	−0.00034 ε	+0.00009 ε	−0.00029 ε
−1,−1	+0.014	−0.010	+0.001	+0.002	0.000	0.000
0,−1	0.000	+0.001	0.000	−0.009	−0.003	−0.008
1,−1	−0.073	+0.025	+0.006	+0.017	0.000	+0.001
2,−1	+0.007	+0.009	−0.007	−0.007	−0.003	−0.008
3,−1	−0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0,−2	+0.016	+0.010	+0.004	+0.001	+0.007	−0.006
1,−2	+0.014	−0.044	+0.033	+0.002	+0.028	−0.020
2,−2	−0.292	−0.404	−0.066	+0.042	+0.002	−0.003
3,−2	−0.020	+0.037	+0.020	−0.038	+0.028	−0.020
0,−3	−0.014	−0.031	+0.002	+0.003	−0.006	+0.003
1,−3	−0.0806	−0.0437	−0.0747	−0.0426	−0.0799	+0.0005
2,−3	−0.004	+0.938	+0.168	−0.004	+0.003	0.000
3,−3	+0.023	+0.030	−0.066	+0.049	−0.079	0.000
4,−3	+0.006	+0.001	−0.007	−0.001	−0.004	−0.003
1,−4	0.000	0.000	0.000	0.000	−0.002	0.000
2,−4	−0.003	+0.013	+0.005	−0.004	−0.001	−0.003
3,−4	−0.051	+0.019	0.000	+0.011	−0.002	+0.001
4,−4	+0.028	+0.012	−0.002	−0.008	−0.001	−0.003

und die für $\Delta\nu$ nach (54) erforderlichen die folgenden:

	$\left\{\left(\frac{d^2\overline{W}}{d\eta^2}\right)+2(\overline{W}+\nu)\right\}\Delta\varepsilon$		$-2(\overline{W}+\nu)\frac{\Delta\chi}{\cos\varphi}$		$\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)\frac{\Delta a}{a}$	
i,i'	sin	−cos	sin	−cos	sin	−cos
0,0		+0″.00424		+0″.03355		+0″.00001
1,0	+0″.056	−0.026	+0″.926	−1.129	−0″.217	−0.179
1,0	0 ε	0 ε	+0.00361 ε	+0.00112 ε	+0.00022 ε	−0.00070 ε
2,0	−0.002	+0.003	−0.002	+0.008	+0.007	+0.001
−1,−1	+0.001	−0.001	+0.011	−0.008	+0.002	+0.003
0,−1	0.000	−0.001	−0.004	+0.008	0.000	0.000
1,−1	−0.016	+0.006	+0.097	−0.033	−0.005	−0.014
2,−1	+0.001	0.000	−0.002	−0.003	0.000	0.000
3,−1	+0.002	0.000	+0.004	0.000	0.000	−0.001

0,−2	+0″.004	−0″.001	+0″.015	+0″.013	−0″.002	+0″.002
1,−2	−0.033	−0.031	+0.052	+0.056	+0.007	−0.006
2,−2	+0.044	+0.068	+0.268	+0.378	+0.079	−0.056
3,−2	+0.002	−0.004	−0.001	+0.002	0.000	0.000
0,−3	−0.002	+0.001	−0.014	−0.029	+0.006	−0.003
1,−3	+0.0261	+0.0224	−0.0251	−0.0259	+0.0012	−0.0005
2,−3	+0.004	+0.025	−0.002	−0.957	−0.182	0.000
3,−3	+0.021	−0.026	+0.046	−0.060	−0.013	−0.010
4,−3	−0.002	−0.001	+0.002	0.000	0.000	0.000
2,−4	0.000	+0.008	+0.002	−0.022	−0.004	−0.001
3,−4	+0.015	−0.007	+0.045	−0.015	−0.003	−0.009
4,−4	−0.012	−0.004	−0.022	−0.008	−0.002	+0.005

Hieraus ergeben sich durch die Ausdrücke (52) und (54) die folgenden Verbesserungen der Störungscoefficienten:

	$\Delta n\delta z$		Δv	
	sin	cos	cos	sin
0,0		$-0''.1518\,\varepsilon$	$-0''.00011\,\varepsilon$	
1,0	−0″.70	−1.30	+0.38	−0″.67
1,0	$+0.00444\,\varepsilon$	$-0.00753\,\varepsilon$	$-0.00222\,\varepsilon$	$-0.00377\,\varepsilon$
2,0	−0.03	+0.07	0.00	+0.01
2,0	$-0.00005\,\varepsilon$	$+0.00031\,\varepsilon$		
0,−1	+0.01	−0.01	0.00	0.00
1,−1	−0.12	−0.19	+0.04	−0.07
0,−2	+0.01	+0.02	+0.15	−0.09
1,−2	−1.05	+0.02	+0.26	+0.01
2,−2	−0.52	+0.47	+0.31	+0.24
3,−2	+0.03	0.00	0.00	0.00
0,−3	−0.05	+0.02	−0.04	−0.01
1,−3	−5.80	+2.77	−0.31	−0.22
2,−3	+1.22	−3.29	−0.61	−1.61
3,−3	−0.10	−0.03	+0.03	−0.07
1,−4	0.00	+0.02	0.00	−0.01
2,−4	+0.01	−0.22	+0.01	−0.08
3,−4	−0.09	−0.07	+0.06	−0.05
4,−4	+0.03	0.00	−0.02	0.00

129.

Die Säcularänderungen der vorstehenden Ausdrücke habe ich vollständig durch die allgemeinen Ausdrücke mit den anderen Coefficienten zugleich berechnet. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass sie den Bedingungen, welche durch die Ausdrücke (60) und (61) ausgedrückt sind, so nahe wie möglich gnügen, indem nur Unterschiede von Einer oder höchstens zwei Einheiten in der letzten Decimale übrig bleiben, wenn man diese Bedingungen auf sie anwendet.

Da die Verbesserungen der Coefficienten der übrigen Störungen so klein ausgefallen sind, so habe ich nicht für nöthig erachtet, die Verbesserungen der Breitenstörungen zu berechnen. Blos die Verbesserung der Coefficienten der Säcularänderungen habe ich nach den Ausdrücken des Art. 124 und des Ausdrucks (63) berechnet. Jene Ausdrücke geben

$$V'(0.s) = +0''.00102\ ;\quad V'(0.c) = +0''.01085$$

und da die erste Annäherung

$$V(0.s) = +1''.3839\ ;\quad V(0.c) = +7''.8569$$

gegeben hat, so folgt aus (63)

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = -0''.00133\,\varepsilon - 0''.00893\,\varepsilon \sin\varepsilon + 0.01201\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

Ich bemerke noch, dass man sowohl in diesem Ausdruck für Δu, so wie in denen des vor. Art. für $\Delta n\delta z$ und Δv der Kleinheit der Coefficienten wegen ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen ohne Weiteres nt für ε setzen darf.

130.

Durch die Ausdrücke des Art. 125 habe ich ferner die von der Verbesserung der Integrationsfactoren herrührende Verbesserung der Störungscoefficienten wie folgt gefunden:

	$\Delta n\delta z$		Δv		$\frac{\Delta u}{\cos i}$	
	sin	cos	cos	sin	sin	cos
0,−2	+0″.01	+0″.01	0″.00	0″.00		
1,−2	−0.23	−0.24	+0.03	−0.02		
2,−2	−0.25	−0.17	+0.14	−0.09		
0,−3	+0.18	+0.08	+0.10	−0.05	+0″.06	−0″.03
1,−3	+10.43	+11.97	+0.43	−0.19	−0.04	−0.07
2,−3	−6.19	+0.01	+3.12	0.00	+0.36	+0.87
3,−3	+0.15	−0.01	−0.01	−0.01		
2,−4	+0.01	0.00	+0.01	0.00		
3,−4	+0.01	−0.02	−0.01	−0.02		
2,−5	+0.08	+0.01	−0.01	0.00		
3,−5	0.00	−0.05	0.00	−0.02		
4,−5	0.00	0.00	0.00	0.00		
2,−6	−0.38	−0.04	−0.01	0.00		
3,−6	+0.02	−0.09	−0.01	−0.05		

Addirt man diese zu den vorhergehenden, so stehen die ganzen Verbesserungen wie folgt:

	$\Delta n\delta z$		Δv		$\frac{\Delta u}{\cos i}$	
	sin	cos	cos	sin	sin	cos
0,0		$-0''.1518nt$	$-0''.00011nt$			$-0''.00133nt$
1,0	$-0''.70$	-1.30	$+0.38$	$-0''.67$		
1,0	$+0.00444nt$	$-0.00753nt$	$-0.00222nt$	$-0.00377nt$	$-0''.00893nt$	$+0.01201nt$
2,0	-0.03	$+0.07$	0.00	$+0.01$		
2,0	$-0.00005nt$	$+0.00031nt$				
0,−1	$+0.01$	-0.01	0.00	0.00		
1,−1	-0.12	-0.19	$+0.04$	-0.07		
0,−2	$+0.02$	$+0.03$	$+0.15$	-0.09		
1,−2	-1.28	-0.22	$+0.29$	-0.01		
2,−2	-0.77	$+0.30$	$+0.45$	$+0.15$		
3,−2	$+0.03$	0.00	0.00	0.00		
0,−3	$+0.13$	$+0.10$	$+0.06$	-0.06	$+0.06$	-0.03
1,−3	$+4.63$	$+14.74$	$+0.12$	-0.41	-0.04	-0.07
2,−3	-4.97	-3.28	$+2.51$	-1.61	$+0.36$	$+0.87$
3,−3	$+0.05$	-0.04	$+0.02$	-0.08		
1,−4	0.00	$+0.02$	0.00	-0.01		
2,−4	$+0.02$	-0.22	$+0.02$	-0.08		
3,−4	-0.08	-0.09	$+0.05$	-0.07		
4,−4	$+0.03$	0.00	-0.02	0.00		
2,−5	$+0.08$	$+0.01$	-0.01	0.00		
3,−5	0.00	-0.05	0.00	-0.02		
2,−6	-0.38	-0.04	-0.01	0.00		
3,−6	$+0.02$	-0.09	-0.01	-0.05		

Hiebei ist noch die Verbesserung der willkührlichen Constanten zu berücksichtigen, die, wie schon oben erwähnt, genau so ausgeführt wird, wie die früheren analogen Bestimmungen. Es fand sich diese:

$$k = +0''.77$$
$$k_1 = -5.32$$
$$k_2 = -3.00$$
$$c - c_0 = +3.0$$

und hiemit geht die Abtheilung der vorstehenden Tafel, die von $i' = 0$ abhängt, in die folgende über:

	$\Delta n\delta z$		Δv	
	sin	cos	cos	sin
0,0			$-0''.35$	
0,0			$-0.00011nt$	
1,0	$-6''.00$	$+1''.70$	$+3.04$	$+0''.83$
1,0	$+0.00444nt$	$-0.00753nt$	$-0.00222nt$	$-0.00377nt$
2,0	$+0.08$	$+0.12$	0.00	$+0.01$
2,0	$-0.00005nt$	$+0.00031nt$		

und es bekommt ausserdem die mittlere Anomalie g den Zuwachs:

$$+3''.0 + 0''.0035t$$

wo wie früher der mittlere Sonnentag die Einheit von t ist.

131.

Es ist schliesslich noch die vom Mars bewirkte Ungleichheit langer Periode wegen der Verbesserung von n zu berichtigen. Hiefür werde ich den betreffenden Divisor neu berechnen. Dem Vorhergehenden zufolge ist der berichtigte Werth der wahren mittleren täglichen Bewegung

$$n = 857''.9364$$

hieraus folgt für den Mars $\frac{n'}{n}$ oder

$$\mu = 2.199062$$

und

$$11 - 5\mu = +\,0.004690$$

hieraus und aus den übrigen im Art. 24 (II) berechneten numerischen Werthen erhalten wir für diese Ungleichheit

$$n\delta z = +\,11''.90 \sin\{(11-5\mu)\varepsilon - 5(c'-\mu c)\} + 26.33 \cos\{(11-5\mu)\varepsilon - 5(c'-\mu c)\}$$

Es wäre nun noch für die Egeria zu ermitteln, ob von den Ungleichheiten langer Periode, die in ihren Argumenten die Anomalien zweier störenden Planeten enthalten, und deren Berechnung in den Artt. 87 u. f. erklärt worden ist, einige merklich werden.

Ich habe mehrere von diesen untersucht, aber keine merkliche, oder wenigstens nur sehr kleine Coefficienten gefunden, die ich hier übergehen werde.

132.

In aller Strenge müsste man mit den in diesem § gefundenen Verbesserungen der Störungscoefficienten die Berechnung der Unterschiede zwischen dem der Rechnung ursprünglich zu Grunde gelegten System von osculirenden Elementen und den genaueren im vor. § angewandten Systemen wiederholen, allein da die Verbesserungen, die hieraus hervorgehen, voraussichtlich sehr unbedeutend sein werden, so unterlasse ich es, und stelle sogleich das ganze erhaltene Resultat zusammen. Dieses besteht aus der Summe der im Art. 94 und 130 erhaltenen Glieder,

und ist, nachdem man in den Säcularänderungen für n den in Theilen des Radius ausgedrückten Betrag der wahren mittleren Bewegung während eines Julianischen Jahres substituirt hat, das folgende:

$$g = 19^{\circ}\ 37'\ 51''.7 + 857''.9364\,(t.365{,}25) - 0''.432\,t_1^2$$

und

	$n\delta z$		ν		$\frac{u}{\cos i}$	
	sin	cos	cos	sin	sin	cos
0,0			−21″.87			+5″.72
			+0.07895t			−0.16496t
			+0.533t_1^2			+2.121t_1^2
	+820″.80	−677″.90	−409.85	−338″.40	−111″.17	−22.08
1,0	−1.79225t	−4.66557t	+0.89945t	−2.33220t	−11.99471t	+2.12967t
	−10.231t_1^2	+2.206t_1^2	+5.144t_1^2	+1.101t_1^2	−1.848t_1^2	−10.679t_1^2
	−19.55	+13.50	+1.64	−0.11	−0.52	−0.21
2,0	+0.02700t	+0.09110t	+0.00465t	−0.00360t	−0.01979t	+0.02453t
	+0.016t_1^2	+0.157t_1^2	+0.085t_1^2	+0.062t_1^2	+0.553t_1^2	+1.080t_1^2
	+0.10	−0.08	−0.05	−0.09	−0.02	−0.04
3,0	+0.00023t	+0.00020t	+0.00017t	−0.00011t	−0.00032t	+0.00044t
	+0.005t_1^2	−0.002t_1^2	+0.005t_1^2	+0.002t_1^2	+0.012t_1^2	+0.023t_1^2
−2,−1	+0.30	−0.18	+0.21	+0.04	+0.08	+0.04
−1,−1	−3.31	+5.93	−2.00	−3.72	+2.12	+3.03
	+0.00252t	+0.00226t	+0.00166t	−0.00146t		
0,−1	+20.45	−12.36	+2.44	−1.01	+10.47	+5.98
	+0.00371t	+0.00257t	+0.00119t	−0.00085t		
1,−1	+39.90	−116.02	−13.96	−40.64	−7.98	−5.06
	−0.00184t	−0.00112t	+0.00075t	−0.00055t		
2,−1	+0.20	+2.09	−0.62	+0.04	−5.08	−0.71
	−0.00216t	−0.00043t	+0.00114t	−0.00027t		
3,−1	−0.03	−0.76	0.00	−0.65	+0.15	−0.01
4,−1	+0.01	+0.04	−0.01	+0.02	+0.02	0.00
−2,−2	+0.02	−0.01	+0.02	−0.01	+0.03	0.00
−1,−2	−0.25	+0.49	+0.02	−0.58	−0.05	+0.16
0,−2	+11.11	+12.67	+5.90	−6.15	+8.94	−4.48
	+0.00843t	−0.00519t	+0.00331t	+0.00202t		
1,−2	−177.61	−167.37	+44.61	−38.92	−12.85	+11.59
	+0.02551t	−0.01799t	−0.00339t	−0.00219t		
2,−2	−190.08	−132.82	+113.42	−79.54	−5.13	+3.89
	−0.00419t	+0.00630t	+0.00222t	+0.00325t		
3,−2	+3.26	+3.45	+0.77	+0.14	+0.52	−0.90
	−0.00075t	+0.00272t	+0.00032t	+0.00122t		
4,−2	+0.30	+0.08	−0.23	+0.08	−0.01	+0.03
−1,−3	+0.41	+0.25	−0.01	−0.05	−0.02	+0.06
0,−3	−18.74	−10.28	−10.99	+5.81	−6.49	+4.06
	+0.00439t	+0.00067t	+0.00179t	−0.00094t	+0.00702t	+0.02212t
1,−3	−622.59	−638.26	−48.41	+19.74	+2.70	+12.42
	−0.02913t	−0.57196t	−0.00272t	+0.01672t	−0.01665t	−0.00287t

2, −3	+744″.30	−2″.61	−358″.11	−1″.75	−38″.66	−94″.14
	+0.01768t	+0.06260t	−0.00860t	+0.03086t	−0.00149t	+0.02569t
3, −3	+3.92	−14.83	−13.36	−10.37	−0.69	−1.04
	−0.00349t	−0.01033t	+0.00143t	−0.00369t	−0.02019t	−0.00438t
4, −3	−0.42	+0.04	−0.11	−0.30	+0.20	+0.21
	−0.00020t	+0.00003t	+0.00017t	−0.00017t	−0.00090t	+0.00060t
5, −3	−0.07	+0.10	+0.06	+0.09		
0, −4	−0.23	−0.15	−0.20	+0.07	−0.20	−0.04
1, −4	−2.49	+0.72	−1.17	−0.07	+0.36	+1.17
2, −4	+31.18	−4.27	−11.14	−2.86	−4.10	−2.91
3, −4	+5.35	−17.43	−3.98	−11.14	−3.20	+0.17
4, −4	+1.43	+4.77	−1.29	+3.47	+0.25	+0.05
5, −4	+0.10	−0.02	−0.11	+0.10	−0.09	+0.05
6, −4	−0.03	−0.04	+0.03	−0.04		
0, −5	−0.01	−0.03	−0.02	+0.01	−0.03	0.00
1, −5	−0.43	+0.60	−0.29	−0.19	−0.05	+0.43
2, −5	+18.22	+3.51	−2.94	−0.21	−0.46	−0.48
3, −5	+0.19	−13.04	−0.57	−7.24	−3.07	+2.37
4, −5	+2.35	+2.07	−1.84	+1.48	+0.19	−0.63
5, −5	−1.29	+0.01	+1.06	+0.05	−0.05	+0.07
6, −5	−0.04	+0.04	+0.07	+0.04	−0.01	−0.03
1, −6	+0.26	−0.14	+0.18	+0.11	+0.07	−0.29
2, −6	+19.52	+1.47	+1.40	+0.35	−0.31	+0.18
3, −6	−4.18	+12.46	+1.88	+5.75	+1.82	−2.48
4, −6	+2.32	+0.19	−1.25	+0.37	−0.25	−0.67
5, −6	−0.85	+0.55	+0.64	+0.43	+0.15	+0.11
6, −6	+0.11	−0.38	−0.08	−0.32	−0.02	−0.03
7, −6	−0.01	−0.02	0.00	−0.03	+0.01	0.09
2, −7	+0.08	−0.07	+0.04	+0.05	−0.06	−0.02
3, −7	−0.57	+1.77	+0.12	+0.58	+0.14	−0.14
4, −7	+0.79	+0.22	−0.48	+0.21	−0.20	−0.24
5, −7	−0.27	+0.39	+0.21	+0.27	+0.16	0.00
6, −7	−0.10	−0.34	+0.08	−0.28	−0.05	+0.03
7, −7	+0.11	−0.07	−0.10	+0.05	+0.01	0.00
2, −8	0.00	−0.04	0.00	+0.02		
3, −8	−0.58	+1.45	+0.03	+0.21	+0.05	−0.01
4, −8	+0.79	+0.35	−0.44	+0.22	−0.16	−0.18
5, −8	−0.10	+0.16	+0.08	+0.11	+0.07	−0.03
6, −8	−0.11	−0.13	+0.08	−0.11	−0.02	+0.05
7, −8	+0.13	0.00	−0.11	0.00	0.00	−0.02
8, −8	−0.03	+0.03	+0.03	+0.03		
3, −9	−0.45	+0.57	−0.02	−0.06		
4, −9	−0.61	−0.33	+0.27	−0.13		
5, −9	−0.04	+0.06	+0.04	+0.04		
6, −9	−0.04	−0.01	+0.03	−0.02		
7, −9	+0.06	−0.03	−0.05	−0.02		
8, −9	−0.02	+0.05	+0.01	+0.04		
4, −10	−0.11	−0.08	+0.03	−0.02		
5, −10	−0.03	+0.05	+0.03	+0.03		
6, −10	−0.02	−0.02	+0.01	−0.02		
7, −10	+0.02	−0.02	−0.02	−0.01		
8, −10	0.00	+0.03	0.00	+0.02		

Es bedeutet hier t das Julianische Jahr und

$$t_1 = \frac{t}{100}$$

Zu den vorstehenden Gliedern kommt noch die im Art. 131 berechnete vom Mars bewirkte Ungleichheit langer Periode, sowie die im Art. 59 (II) gegebenen vom Saturn und Mars verursachten Ungleichheiten, mit Weglassung jedoch der von $i' = 0$ abhängigen Glieder, da diese schon den vorstehenden einverleibt sind.

Es ist ferner noch zufolge des Art. 94 hinzuzufügen:

1) wenn man die Ekliptik zur Fundamentalebene wählt,

$$\Gamma = +0''.00382\,t$$
$$\delta_2 u = \quad 0''.000\,t_1^2$$
$$- 0''.071\,t_1^2 \sin\varepsilon + 0''.012\,t_1^2 \cos\varepsilon$$

2) wenn man den Aequator zur Fundamentalebene wählt,

$$\Gamma = +0''.00459\,t$$
$$\delta_2 u = +0''.012\,t_1^2$$
$$+ 0''.824\,t_1^2 \sin\varepsilon - 0''.115\,t_1^2 \cos\varepsilon$$

wo t und t_1 dieselbe Bedeutung haben wie oben.

§. 10. Verwandelung der von osculirenden Elementen abhängigen Störungen in solche, welche von den mittleren Elementen abhängen. Bestimmung der mittleren Elemente.

133.

Mit den im vor. § erhaltenen Störungen kann die Berechnung derselben als beendigt angesehen werden, da sie den Bedingungen der Aufgabe vollständig gnügen, und es könnten dieselben ohne Weiteres in Tafeln gebracht werden. Allein es hat nicht nur Interesse, sondern es ist auch nützlich die Störungen kennen zu lernen, die den mittleren Elementen entsprechen, und ich werde daher zeigen, wie diese aus jenen erhalten werden können. Die den mittleren Elementen entsprechenden Störungen sind in ihrem Gesammtbetrage jedenfalls die kleinsten, folglich immer kleiner wie jene, und daher die Anwendung derselben die vortheilhafteste. In unserem Beispiel ist der Unterschied nicht unbeträchtlich, da in dem Ausdruck für $n\delta z$ die Coefficienten

+820″.80 und −677″.90 und in dem von u die Coefficienten −111″.47 und −22″.08 des Arguments 1,0 gänzlich wegfallen, und im Ausdruck für v statt der Coefficienten −409″.85 und −338″.40 desselben Arguments sehr kleine Coefficienten eintreten, während alle übrigen Störungscoefficienten sich nur sehr wenig ändern.

134.

Nennen wir wie vorher die Elemente, auf welche sich die als gegeben angesehenen Störungen $n\delta z$, v und $\frac{u}{\cos i}$ beziehen, c_0, a_0, φ_0, π_0, i_0, θ_0 und beziehen die Elemente, welchen die gesuchten Störungen $n\delta(z)$, (v) und $\frac{(u)}{\cos i}$ angehören sollen, mit (c), (a), (φ), (χ), (i), (σ). Es ist nun für die allgemeine Auflösung unserer Aufgabe gleichgültig, ob diese letztgenannten Elemente mittlere sind oder nicht, nur muss jedenfalls vorausgesetzt werden, dass die einzelnen Elemente dieser beiden Systeme nur um Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte von einander verschieden sind. Aus dem Umstande, dass v und r ideale Coordinaten sind, folgt schon, dass aus jedem der beiden genannten Elementensysteme und den denselben entsprechenden Störungen stets dieselben Werthe von v und r hervorgehen müssen, und wir haben daher fürerst den beiden folgenden Systemen von Gleichungen Gnüge zu leisten,

$$\begin{aligned}
&nt + c_0 + n\delta z = \bar{\varepsilon} - e_0 \sin \bar{\varepsilon} \;;\; && nt + (c) + n\delta(z) = (\varepsilon) - (e)\sin(\varepsilon)\\
&\bar{r}\cos\bar{f} = a_0\cos\bar{\varepsilon} - a_0 e_0 \;;\; && (r)\cos(f) = (a)\cos(\varepsilon) - (a)(e)\\
&r\sin\bar{f} = a_0\cos\varphi_0\sin\varepsilon \;;\; && (r)\sin(f) = (a)\cos(\varphi)\sin(\varepsilon)\\
&v = \bar{f} + \pi_0 \;;\; && v = (f) + (\chi)\\
&r = r(1+\nu) \;;\; && r = (r)(1+(\nu))\\
&a_0^{\,3} n_0^{\,2} = k^2(1+m) \;;\; && (a)^3 n^2 = k^2(1+m)
\end{aligned}$$

in welchen dem Vorhergehenden zufolge jedenfalls n der wahre Werth der mittleren Bewegung ist.

135.

Da wir in der Ermittelung von $n\delta(z)$, (ν), etc. die Cuben und höheren Potenzen der störenden Kräfte übergehen werden, so können wir die vorgegebene Aufgabe leicht durch Hülfe des auf mehrere Veränderliche ausgedehnten Taylorschen Theorems lösen. Sei zu diesem Zwecke

$$\Delta n\delta z = n\delta(z) - n\delta z$$
$$\Delta c = (c) - c_0$$
$$\Delta\varphi = (\varphi) - \varphi_0$$
$$\Delta\chi = (\chi) - \pi_0$$

dann wird, da erstlich bei der Anwendung des einen oder des andern der obigen beiden Systeme von Ausdrücken v stets denselben Werth erhalten muss,

$$0 = \Delta v = \left(\frac{df}{dg}\right)(\Delta n\delta z + \Delta c) + \left(\frac{d\bar{f}}{d\varphi}\right)\Delta\varphi + \Delta\chi$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\bar{f}}{dg^2}\right)(\Delta n\delta z + \Delta c)^2 + \left(\frac{d^2\bar{f}}{dg\,d\varphi}\right)(\Delta n\delta z + \Delta c)\Delta\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\bar{f}}{d\varphi^2}\right)\Delta\varphi^2$$

wo $g = nt + c_0$ ist. Aus dieser Gleichung bekommt man mit bloser Rücksicht auf die Glieder erster Ordnung

$$\Delta n\delta z + \Delta c = -\frac{\left(\frac{d\bar{f}}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{d\bar{f}}{dg}\right)}\Delta\varphi - \frac{1}{\left(\frac{d\bar{f}}{dg}\right)}\Delta\chi$$

woraus

$$(\Delta n\delta z + \Delta c)^2 = \frac{\left(\frac{d\bar{f}}{d\varphi}\right)^2}{\left(\frac{df}{dg}\right)^2}\Delta\varphi^2 + 2\frac{\left(\frac{d\bar{f}}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{df}{dg}\right)^2}\Delta\varphi\Delta\chi + \frac{1}{\left(\frac{df}{dg}\right)^2}\Delta\chi^2$$

folgt. Durch die Substitution dieses Ausdrucks in die vorstehende Gleichung zieht man aus derselben

$$\Delta n\delta z = -\Delta c - \frac{\left(\frac{df}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{df}{dg}\right)}\Delta\varphi - \frac{1}{\left(\frac{df}{dg}\right)}\Delta\chi$$
$$- \left\{\frac{\left(\frac{d^2f}{d\varphi^2}\right)}{2\left(\frac{df}{dg}\right)} - \frac{\left(\frac{d^2f}{dg\,d\varphi}\right)\left(\frac{df}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{df}{dg}\right)^2} + \frac{\left(\frac{d^2f}{dg^2}\right)\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2}{2\left(\frac{df}{dg}\right)^3}\right\}\Delta\varphi^2$$
$$+ \left\{\frac{\left(\frac{d^2f}{dg\,d\varphi}\right)}{\left(\frac{df}{dg}\right)^2} - \frac{\left(\frac{d^2f}{dg^2}\right)\left(\frac{df}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{df}{dg}\right)^3}\right\}\Delta\varphi\Delta\chi - \frac{\left(\frac{d^2f}{dg^2}\right)}{2\left(\frac{df}{dg}\right)^3}\Delta\chi^2$$

wo ich der Kürze wegen f statt $\bar{f}$ geschrieben habe. Die Coefficienten dieser Gleichung können für den Zweck ihrer Entwickelung auf einfachere Ausdrücke hingeführt werden; setzt man

$$H = \frac{\left(\frac{df}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{df}{dg}\right)}, \quad K = \frac{1}{\left(\frac{df}{dg}\right)}$$

dann ergiebt sich ohne Mühe, dass

$$\Delta n\delta z = -\Delta c - H\Delta\varphi - K\Delta\chi$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left\{H\left(\frac{dH}{dg}\right) - \left(\frac{dH}{d\varphi}\right)\right\}\Delta\varphi^2 + \left\{H\left(\frac{dK}{dg}\right) - \left(\frac{dK}{d\varphi}\right)\right\}\Delta\varphi\,\Delta\chi$$
$$+ \tfrac{1}{2}K\left(\frac{dK}{dg}\right)\Delta\chi^2$$

wird.

136.

Wenn wir fortwährend zur Abkürzung f statt $\bar{f}$, r statt r, a, φ, etc. statt a_0, φ_0, etc. schreiben, so ist

$$\left(\frac{df}{dg}\right) = \frac{a^2\cos\varphi}{r^2}\ ;\quad \left(\frac{df}{d\varphi}\right) = \frac{\sin f}{\cos\varphi}(2 + e\cos f)$$

und hieraus folgt

$$H = \frac{r^2\sin f}{a^2\cos^2\varphi}(2 + e\cos f)\ ;\quad K = \frac{r^2}{a^2\cos\varphi}$$

woraus durch Zuziehung der Gleichungen

$$\left(\frac{dr}{dg}\right) = \frac{ae\sin f}{\cos\varphi}\ ;\quad \left(\frac{dr}{d\varphi}\right) = -a\cos\varphi\cos f$$

die folgenden Ausdrücke erhalten werden:

$$\left(\frac{dH}{dg}\right) = \frac{r}{a\cos^3\varphi}\{3e + (2+e^2)\cos f\}$$
$$\left(\frac{dH}{d\varphi}\right) = \frac{r^2\sin f}{a^2\cos^3\varphi}(2e + \cos f)$$
$$\left(\frac{dK}{dg}\right) = \frac{2re\sin f}{a\cos^2\varphi}$$
$$\left(\frac{dK}{d\varphi}\right) = \frac{r^2 e}{a^2\cos^2\varphi} - 2\frac{r}{a}\cos f$$

Alle diese Ausdrucke können auf endliche Functionen der excentrischen Anomalie hingeführt werden, und man findet durch die betreffenden Substitutionen leicht

$$H = \frac{2-e^2}{\cos\varphi}\sin\varepsilon - \frac{e}{2\cos\varphi}\sin 2\varepsilon$$
$$K = \frac{2+e^2}{2\cos\varphi} - \frac{2e}{\cos\varphi}\cos\varepsilon + \frac{e^2}{2\cos\varphi}\cos 2\varepsilon$$
$$\left(\frac{dH}{dg}\right) = -\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{2}{\cos\varphi}\cos\varepsilon$$
$$\left(\frac{dH}{d\varphi}\right) = \frac{e}{\cos^2\varphi} - \sin\varepsilon + \frac{1-2e^2}{2\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon$$
$$\left(\frac{dK}{dg}\right) = \frac{2e}{\cos\varphi}\sin\varepsilon$$
$$\left(\frac{dK}{d\varphi}\right) = 3\frac{2e-e^3}{2\cos^2\varphi} - \frac{2}{\cos^2\varphi}\cos\varepsilon + \frac{e^3}{2\cos^2\varphi}\cos 2\varepsilon$$

vermittelst welcher der Ausdruck für $\Delta n\delta z$ des vor. Art. in den folgenden übergeht:

$$\begin{aligned}\Delta n\delta z = &-\Delta c\\ &-\left\{\frac{2-e^2}{\cos\varphi}\sin\varepsilon - \frac{e}{2\cos\varphi}\sin 2\varepsilon\right\}\Delta q\\ &-\left\{\frac{2+e^2}{2\cos\varphi} - \frac{2e}{\cos\varphi}\cos\varepsilon + \frac{e^2}{2\cos\varphi}\cos 2\varepsilon\right\}\Delta\chi\\ &+\left\{\frac{e-2e^3}{4\cos^2\varphi}\sin\varepsilon + \frac{3-e^2}{4\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon - \frac{e}{4\cos^2\varphi}\sin 3\varepsilon\right\}\Delta\varphi^2\\ &-\left\{\frac{2e-e^3}{2\cos^2\varphi} - \frac{4-e^2}{2\cos^2\varphi}\cos\varepsilon + \frac{4e-e^3}{2\cos^2\varphi}\cos 2\varepsilon - \frac{e^2}{2\cos^2\varphi}\cos 3\varepsilon\right\}\Delta\varphi\,\Delta\chi\\ &+\left\{\frac{4e+e^3}{4\cos^2\varphi}\sin\varepsilon - \frac{e^2}{\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon + \frac{e^3}{4\cos^2\varphi}\sin 3\varepsilon\right\}\Delta\chi^2\end{aligned} \tag{64}$$

in welchem allenthalben $\bar{\varepsilon}$ statt ε, e_0 und φ_0 statt e und φ gedacht werden muss.

137.

Setzt man ferner

$$\begin{aligned}\Delta r &= (r) - \bar{r}\\ \Delta v &= (v) - v\\ \Delta a &= (a) - a_0\\ \Delta n &= n - n_0\end{aligned}$$

dann giebt die Bedingung, dass auch r durch die Veränderung der Elemente seinen Werth nicht ändern darf,

$$(r)\,(1+(v)) = \bar{r}\,(1+v)$$

woraus

$$\Delta v = -\frac{(1+v)\,\Delta r}{r+\Delta r}$$

folgt. Aber bis auf Grössen dritter Ordnung ist

$$\frac{\Delta r}{\bar{r}} = \Delta\log\bar{r} + \tfrac{1}{2}(\Delta\log\bar{r})^2$$

und hiemit wird

$$\frac{\Delta v}{1+v} = -\Delta\log\bar{r} + \tfrac{1}{2}(\Delta\log r)^2$$

Da nun wegen $a_0^3\, n_0^2 = k^2(1+m)$

$$\log\bar{r} = \log k^2(1+m) - \tfrac{2}{3}\log n_0 + 2\log\cos\varphi_0 - \log(1+e_0\cos\bar{f})$$

wird, so stellt sich $\log\bar{r}$ als Function von n_0, φ_0 oder e_0, und $\bar{f}$ dar. Aber vermöge der hier stattfindenden Gleichung $\Delta v = 0$ wird

$$\Delta\bar{f} = -\Delta\chi$$

da $v = f + \pi_0$ ist, und es wird daher

$$\Delta \log \bar{r} = -\tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n_0} + \left(\frac{d\log r}{d\varphi_0}\right)\Delta\varphi - \left(\frac{d\log r}{df}\right)\Delta\chi$$
$$+\tfrac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{n_0}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\log r}{d\varphi_0^2}\right)\Delta\varphi^2 - \left(\frac{d^2\log \bar{r}}{d\varphi_0\, df}\right)\Delta\varphi\,\Delta\chi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\log \bar{r}}{df^2}\right)\Delta^2\chi^2$$

und hiemit

$$\frac{\Delta\nu}{1+\nu} = \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n} - \left(\frac{d\log r}{d\varphi}\right)\Delta\varphi + \left(\frac{d\log r}{df}\right)\Delta\chi$$
$$-\tfrac{1}{9}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 - \tfrac{2}{3}\left(\frac{d\log r}{d\varphi}\right)\frac{\Delta n}{n}\Delta\varphi + \tfrac{2}{3}\left(\frac{d\log r}{df}\right)\frac{\Delta n}{n}\Delta\chi$$
$$-\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d^2\log r}{d\varphi^2}\right) - \left(\frac{d\log r}{d\varphi}\right)^2\right\}\Delta\varphi^2 + \left\{\left(\frac{d^2\log r}{d\varphi\, df}\right) - \left(\frac{d\log r}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\log r}{df}\right)\right\}\Delta\varphi\,\Delta\chi$$
$$-\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d^2\log r}{df^2}\right) - \left(\frac{d\log r}{df}\right)^2\right\}\Delta\chi^2$$

wo ich wieder zur Abkürzung r, f, φ, etc. statt $\bar{r}$, $\bar{f}$, φ_0, etc. geschrieben habe.

Die Differentiation des obigen Ausdrucks für $\log \bar{r}$ giebt

$$\left(\frac{d\log r}{d\varphi}\right) = -\frac{2e}{\cos\varphi} - \frac{r\cos f}{a\cos\varphi}$$
$$\left(\frac{d\log r}{df}\right) = \frac{er\sin f}{a\cos^2\varphi}$$
$$\left(\frac{d^2\log r}{d\varphi^2}\right) = -\frac{2}{\cos^2\varphi} + \frac{er\cos f}{a\cos^2\varphi} + \frac{r^2\cos^2 f}{a^2\cos^2\varphi}$$
$$\left(\frac{d^2\log r}{d\varphi\, df}\right) = \frac{r\sin f}{a\cos\varphi} - \frac{er^2\sin f\cos f}{a^2\cos^3\varphi}$$
$$\left(\frac{d^2\log r}{df^2}\right) = \frac{er\cos f}{a\cos^2\varphi} + \frac{e^2r^2\sin^2 f}{a^2\cos^4\varphi}$$

Substituirt man diese Ausdrücke und führt wieder die excentrische Anomalie ein, so erhält man

$$\frac{\Delta\nu}{1+\nu} = \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n} + \left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos\varphi}\cos\varepsilon\right\}\Delta\varphi + \frac{e}{\cos\varphi}\sin\varepsilon\,.\,\Delta\chi$$
$$-\tfrac{1}{9}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 + \left\{\frac{2e}{3\cos\varphi} + \frac{2}{3\cos\varphi}\cos\varepsilon\right\}\frac{\Delta n}{n}\Delta\varphi + \frac{2e}{3\cos\varphi}\sin\varepsilon\,.\,\frac{\Delta n}{n}\Delta\chi$$
$$+\left\{\frac{2+e^2}{2\cos^2\varphi} + \frac{3e}{2\cos^2\varphi}\cos\varepsilon\right\}\Delta\varphi^2 + \frac{1+e^2}{\cos^2\varphi}\sin\varepsilon\,.\,\Delta\varphi\,\Delta\chi$$
$$+\left\{\frac{e^2}{2\cos^2\varphi} - \frac{e}{2\cos^2\varphi}\cos\varepsilon\right\}\Delta\chi^2 \qquad (65)$$

wo wieder $\bar{\varepsilon}$, e_0, φ_0, statt ε, e, φ gedacht werden muss.

138.

Für die Verwandelung der Breitenstörungen ist an sich klar, dass sie auch so ausgeführt werden muss, dass die Breite des Planeten über der Fundamentalebene oder die auf dieser Ebene senkrechte Coordinate

desselben nicht dadurch geändert werde. Nun hat mit Zuziehung der gegebenen Elemente diese Coordinate den folgenden Ausdruck

$$r\sin b = r\sin i_0 \sin(v-\theta_0) + a_0(1+\nu)u$$

und mit Zuziehung der gesuchten Elemente ist

$$r\sin b = r\sin(i)\sin\big(v-(\sigma)\big) + (a)\big(1+(\nu)\big)(u)$$

und es müssen also die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen gleichwie die linken einander stets gleich sein. Setzt man nun

$$\Delta u = \frac{(a)\ (1+(\nu))}{a_0\ (1+\nu)}\ (u) - u$$

so geben die vorstehenden Gleichungen

$$\Delta u = \frac{\overline{r}}{a_0}\sin i_0 \sin(v-\theta_0) - \frac{\overline{r}}{a_0}\sin(i)\sin\big(v-(\sigma)\big)$$

oder wenn man die Anomalie $\overline{f}$ durch die Gleichung $v = \overline{f} + \pi_0$ einführt,

$$\Delta u = \frac{\overline{r}}{a_0}\sin i_0 \sin(\overline{f}+\pi_0-\theta_0) - \frac{\overline{r}}{a_0}\sin(i)\cos\big((\sigma)-\theta_0\big)\sin(\overline{f}+\pi_0-\theta_0)$$
$$+\frac{\overline{r}}{a_0}\sin(i)\sin\big((\sigma)-\theta_0\big)\cos(\overline{f}+\pi_0-\theta_0)$$

Führt man die excentrische Anomalie in diesen Ausdruck ein, und setzt

$$\sin(i)\sin\big((\sigma)-\theta_0\big) = \beta\cos i_0$$
$$\sin(i)\cos\big((\sigma)-\theta_0\big) = \gamma\cos i_0 + \sin i_0$$

so geht sie in die folgende über

$$\Delta u = -e_0\{\beta\cos(\pi_0-\theta_0) - \gamma\sin(\pi_0-\theta_0)\}\cos i_0 \tag{66}$$
$$+\{\beta\cos(\pi_0-\theta_0) - \gamma\sin(\pi_0-\theta_0)\}\cos i_0\cos\bar{\varepsilon}$$
$$-\{\beta\sin(\pi_0-\theta_0) + \gamma\cos(\pi_0-\theta_0)\}\cos i_0\sin\bar{\varepsilon}$$

welche β und γ giebt, wenn Δu gegeben ist. Aus β und γ erhält man durch die vorhergehenden Gleichungen, oder durch deren Entwickelung (i) und (σ). Da diese Gleichungen denen im Art. 105 angewandten analog sind, so können wir ihre Entwickelung sogleich hinschreiben. Es wird dem angezogenen Art. zufolge

$$(i) = i_0 + \gamma + \beta^2\frac{\cos i_0}{2\sin i_0} + \gamma^2\frac{\sin i_0}{2\cos i_0}$$
$$(\sigma) = \theta_0 + \beta\frac{\cos i_0}{\sin i_0} - \beta\gamma\frac{\cos^2 i_0}{\sin^2 i_0}$$

welchen ich sogleich die Ausdrücke für die Länge des Perihels (π) und die des Knotens (θ) hinzufüge, die schliesslich angewandt werden müssen. Derselbe Art. giebt

$$(\theta) = \theta_0 + \frac{\beta}{\sin i_0} - \beta\gamma\frac{2-3\sin^2 i_0}{2\sin^2 i_0\cos i_0} + \Delta\Gamma$$
$$(\pi) = (\chi) + \beta\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i_0 + \beta\gamma\frac{(1+2\cos i_0)\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}i_0}{2\cos i_0} + \Delta\Pi$$

wo $\Delta\Pi$ noch zu bestimmen ist. In der Anwendung wird man gewöhnlich mit den folgenden Ausdrücken ausreichen,

$$(\theta) = (\sigma) + 2\sin^2\tfrac{1}{2}i_0((\sigma) - \theta_0)$$
$$(\pi) = (\chi) + 2\sin^2\tfrac{1}{2}i_0((\sigma) - \theta_0)$$

die aus den vorhergehenden hervorgehen, wenn man darin die Glieder zweiter Ordnung übergeht.

139.

Die vorliegende Aufgabe verlangt eigentlich ursprünglich, dass sowohl die Länge l wie die Breite b des Planeten auf der Fundamentalebene, und der Radius Vector r durch die Einführung des neuen Elementensystems unveränderte Werthe behalten, und im Vorhergehenden haben wir auch sowohl die Variation von r wie die von $r\sin b$ gleich Null gemacht, woraus folgt, dass auch die Variation von b gleich Null gemacht worden ist. Statt der Variation von l haben wir aber die von v gleich Null gemacht, und es ist daher noch übrig, auch die von l gleich Null zu machen, diese Bedingung wird die im vor. Art. eingeführte Grösse $\Delta\Pi$ bestimmen, die nur von der zweiten Ordnung sein kann. Die Gleichungen, die wir dazu anwenden wollen, sind die (21) (I), und es ist an sich klar, dass wir die dritte derselben hiefür nicht brauchen, indem die im Vorhergehenden schon für b oder Δu angewandte mit dem Product dieser in r identisch ist. Für das gegebene Elementensystem haben wir also, wenn wir die Grössen dritter und höherer Ordnung übergehen,

$$\left.\begin{aligned}\cos b\sin(l-\theta_0-\Gamma) &= \cos i_0\sin(v-\theta_0) - s\left(\operatorname{tg} i_0 + \frac{q}{2\cos^3 i_0}\right)\\ \cos b\cos(l-\theta_0-\Gamma) &= \cos(v-\theta_0) + \frac{sp}{2\cos^2 i_0}\end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

und für das unbekannte Elementensystem erhalten wir ähnliche von (θ), (i), (σ), (s), (p), (q) abhängige Gleichungen. Da

$$\Delta s = (s) - s$$

gesetzt wird, und $u = s\frac{r}{a_0}$ ist, so giebt der Ausdruck für Δu des vor. Art.

$$\Delta s = \beta\cos i_0\cos(v-\theta_0) - \gamma\cos i_0\sin(v-\theta_0)$$

Da ferner zufolge des Art. 11 (I)

$$p = -s\cos(v-\theta_0) + \frac{ds}{dv}\sin(v-\theta_0)$$
$$q = \quad s\sin(v-\theta_0) + \frac{ds}{dv}\cos(v-\theta_0)$$

so wird auch mit der hier erforderlichen Genauigkeit

$$(p) = -(s)\cos(v-\theta_0) + \frac{d(s)}{dv}\sin(v-\theta_0)$$
$$(q) = \quad (s)\sin(v-\theta_0) + \frac{d(s)}{dv}\cos(v-\theta_0)$$

Substituirt man hierin die aus den vorstehenden Gleichungen hervorgehenden Ausdrücke für (s) und $\frac{d(s)}{dv}$, so bekommt man

$$(p) = p - \beta\cos i_0$$
$$(q) = q - \gamma\cos i_0$$

und hiemit wird unser zweites System von Gleichungen

$$\cos b\sin(l-(\theta)-\Gamma) = \cos(i)\sin(v-(\sigma)) - (s)\,\mathrm{tg}\,(i) - \frac{(s)(q-\gamma\cos i_0)}{2\cos^3 i_0}$$
$$\cos b\cos(l-(\theta)-\Gamma) = \cos(v-(\sigma)) + \frac{(s)(p-\beta\cos i_0)}{2\cos^2 i_0}$$

die mit den Gleichungen (67) identificirt werden müssen.

140.

Sei

$$\Delta i = (i) - i_0$$
$$\Delta\sigma = (\sigma) - \theta_0$$
$$\Delta\theta = (\theta) - \theta_0$$

dann geben die eben aufgestellten Gleichungen bis auf Grössen dritter Ordnung

$$\cos b\sin(l-\theta_0-\Gamma-\Delta\theta) =$$
$$\sin(v-\theta_0)\{\cos i_0 - \sin i_0\,\Delta i - \tfrac{1}{2}\cos i_0\,\Delta i^2 - \tfrac{1}{2}\cos i_0\,\Delta\sigma^2\}$$
$$+\cos(v-\theta_0)\{-\cos i_0\,\Delta\sigma + \sin i_0\,\Delta i\,\Delta\sigma\}$$
$$-s\left(\mathrm{tg}\,i_0 + \frac{q}{2\cos^3 i_0}\right)$$
$$-\mathrm{tg}\,i_0\,\Delta s - \frac{(2\,\Delta i-\gamma)\,\Delta s}{2\cos^2 i_0} - \frac{(2\,\Delta i-\gamma)s}{2\cos^2 i_0} - \frac{q\,\Delta s}{2\cos^3 i_0}$$
$$\cos b\cos(l-\theta_0-\Gamma-\Delta\theta) =$$
$$\cos(v-\theta_0)\{1-\tfrac{1}{2}\Delta\sigma^2\} + \sin(v-\theta_0)\,\Delta\sigma$$
$$+\frac{sp}{2\cos^2 i_0} - \frac{\beta\,\Delta s}{2\cos i_0} - \frac{\beta s}{2\cos i_0} + \frac{p\,\Delta s}{2\cos^2 i_0}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $1-\frac{1}{2}\Delta\theta^2$, die zweite mit $\Delta\theta$ und addirt, so bekommt man

$$\cos b \sin(l-\theta_0-\Gamma) = \cos i_0 \sin(v-\theta_0) - s\left(\operatorname{tg} i_0 + \frac{q}{2\cos^3 i_0}\right)$$
$$+\sin(v-\theta_0)\{-\sin i_0 . \Delta i - \tfrac{1}{2}\cos i_0 . \Delta i^2 - \tfrac{1}{2}\cos i_0 . \Delta\sigma^2 - \tfrac{1}{2}\cos i_0 \Delta\theta^2 + . \Delta\sigma\Delta\theta\}$$
$$+\cos(v-\theta_0)\{-\cos i_0 \Delta\sigma + \Delta\theta + \sin i_0 \Delta i \Delta\sigma\}$$
$$-\operatorname{tg} i_0 \Delta s - \frac{(2\Delta i-\gamma)\Delta s}{2\cos^2 i_0} - \frac{(2\Delta i-\gamma)s}{2\cos^2 i_0} - \frac{q\Delta s}{2\cos^3 i_0}$$

woraus schon $\Delta\Gamma$ bestimmt werden kann. Um aber zu zeigen, dass auch die zweite analoge Gleichung denselben Werth von $\Delta\Gamma$ giebt, multiplicire ich ferner die erste der obigen Gleichungen mit $-\Delta\theta$, die zweite mit $1-\frac{1}{2}\Delta\theta^2$ und addire, wodurch

$$\cos b \cos(l-\theta_0-\Gamma) = \cos(v-\theta_0) + \frac{sp}{2\cos^2 i_0}$$
$$+\cos(v-\theta_0)\{\cos i_0 \Delta\sigma\Delta\theta - \tfrac{1}{2}\Delta\sigma^2 - \tfrac{1}{2}\Delta\theta^2\}$$
$$+\sin(v-\theta_0)\{\Delta\sigma - \cos i_0 \Delta\theta + \sin i_0 \Delta i\Delta\theta\}$$
$$+\frac{(2\sin i_0 . \Delta\theta-\beta).\Delta s}{2\cos i_0} + \frac{(2\sin i_0 \Delta\theta-\beta)s}{2\cos i_0} + \frac{p.\Delta s}{2\cos^2 i_0}$$

erlangt wird. Aus dem vorvor. Art. erhalten wir nun

$$\Delta i = \gamma + \beta^2 \frac{\cos i_0}{2\sin i_0} + \gamma^2 \frac{\sin i_0}{2\cos i_0}$$
$$\Delta\sigma = \beta\frac{\cos i_0}{\sin i_0} - \beta\gamma\frac{\cos^2 i_0}{\sin^2 i_0}$$
$$.\Delta\theta = \beta\frac{1}{\sin i_0} - \beta\gamma\frac{2-3\sin^2 i_0}{2\sin^2 i_0\cos i_0} + .\Delta\Gamma$$

und es ist ausserdem

$$s = q\sin(v-\theta_0) - p\cos(v-\theta_0)$$
$$\Delta s = \beta\cos i_0\cos(v-\theta_0) - \gamma\cos i_0\sin(v-\theta_0)$$

Hiemit ergiebt sich

$$-\sin i_0 . i\Delta - \tfrac{1}{2}\cos i_0 . \Delta i^2 - \tfrac{1}{2}\cos i_0 . \Delta\sigma^2 - \tfrac{1}{2}\cos i_0 . \Delta\theta^2 + . \Delta\sigma . \Delta\theta = -\gamma\sin i_0 - \frac{\gamma}{2\cos i_0}$$
$$-\cos i_0 \Delta\sigma + \Delta\theta + \sin i_0 \Delta i \Delta\sigma = \beta\sin i_0 + \frac{\beta\gamma}{2\cos i_0} + \Delta\Gamma$$
$$-\operatorname{tg} i_0 \Delta s = -\beta\sin i_0\cos(v-\theta_0) + \gamma\sin i_0\sin(v-\theta_0)$$
$$-\frac{(2\Delta i-\gamma).\Delta s}{2\cos^2 i_0} = -\frac{\beta\gamma}{2\cos i_0}\cos(v-\theta_0) + \frac{\gamma^2}{2\cos i_0}\sin(v-\theta_0)$$
$$-\frac{(2\Delta i-\gamma)s}{2\cos^2 i_0} = -\frac{q\gamma}{2\cos^2 i_0}\sin(v-\theta_0) + \frac{p\gamma}{2\cos^2 i_0}\cos(v-\theta_0)$$
$$-\frac{q.\Delta s}{2\cos^3 i_0} = \frac{q\gamma}{2\cos^2 i_0}\sin(v-\theta_0) - \frac{q\beta}{2\cos^2 i_0}\cos(v-\theta_0)$$

$$\cos i_0 \Delta\sigma\Delta\theta - \tfrac{1}{2}\Delta\sigma^2 - \tfrac{1}{2}\Delta\theta^2 = -\tfrac{1}{2}\beta^2$$
$$\Delta\sigma - \cos i_0 \Delta\theta + \sin i_0 \Delta i \Delta\theta = \tfrac{1}{2}\beta\gamma - \cos i_0 \Delta\Gamma$$
$$\frac{(2\sin i_0\Delta\theta-\beta)\Delta s}{2\cos i_0} = \tfrac{1}{2}\beta^2\cos(v-\theta_0) - \tfrac{1}{2}\beta\gamma\sin(v-\theta_0)$$
$$\frac{(2\sin i_0\Delta\theta-\beta)s}{2\cos i_0} = \frac{q\beta}{2\cos i_0}\sin(v-\theta_0) - \frac{p\beta}{2\cos i_0}\cos(v-\theta_0)$$
$$\frac{p\Delta s}{2\cos^2 i_0} = -\frac{p\gamma}{2\cos i_0}\sin(v-\theta_0) + \frac{p\beta}{2\cos i_0}\cos(v-\theta_0)$$

wodurch die eben abgeleiteten Gleichungen in die folgenden übergehen,

$$\cos b \sin (l-\theta_0-\Gamma) = \cos i_0 \sin (v-\theta_0) - s\left(\operatorname{tg} i_0 + \frac{q}{2\cos^3 i_0}\right) + \cos (v-\theta_0)\left\{\Delta\Gamma + \frac{p\gamma - q\beta}{2\cos^2 i_0}\right\}$$

$$\cos b \cos (l-\theta_0-\Gamma) = \cos (v-\theta_0) + \frac{sp}{2\cos^2 i_0} + \sin (v-\theta_0)\left\{-\cos i_0\, \Delta\Gamma + \frac{q\beta - p\gamma}{2\cos i_0}\right\}$$

Setzt man daher

$$\Delta\Gamma = \frac{q\beta - p\gamma}{2\cos^2 i_0}$$

so werden diese Gleichungen beide mit den (67) identisch, womit die Aufgabe gelöst ist. Es ist leicht zu finden, dass man dem vorstehenden Ausdruck für $\Delta\Gamma$ die folgenden Formen geben kann,

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta s \frac{ds}{dv} - s\frac{d\Delta s}{dv}}{2\cos^3 i_0}$$

oder

$$\Delta\Gamma = \frac{a_0}{r}\frac{\Delta u \frac{du}{d\varepsilon} - u\frac{d\Delta u}{d\varepsilon}}{2\cos\varphi_0 \cos^3 i_0}$$

In der Regel werden diese Ausdrücke unmerklich sein. Für einen etwaigen Fall, in welchem dieser Ausdruck von $\Delta\Gamma$ merklich werden sollte, bemerke ich, dass er aus einem constanten und einem veränderlichen Theile besteht. Nur der constante Theil darf in den Ausdrücken für (θ) und (π) des Art. 138 angewandt werden, der veränderliche Theil muss dem durch die Elemente i_0, θ_0, etc. ursprünglich berechneten Werthe von Γ hinzugefügt werden.

141.

Indem wir zur Anwendung der eben entwickelten Ausdrücke übergehen, wollen wir zuerst den Ausdruck (64) vornehmen. Setzen wir

$$\bar{A} = -\frac{2-e_0^2}{\cos\varphi_0}\sin\bar{\varepsilon} + \frac{e_0}{2\cos\varphi_0}\sin 2\bar{\varepsilon}$$

$$\bar{B} = -\frac{2+e_0^2}{2\cos\varphi_0} + \frac{2e_0}{\cos\varphi_0}\cos\bar{\varepsilon} - \frac{e_0^2}{2\cos\varphi_0}\cos 2\bar{\varepsilon}$$

und fassen vorläufig die Glieder zweiter Ordnung dieses Ausdrucks unter dem allgemeinen Zeichen C zusammen, so giebt er

$$n\delta(z) = n\delta z - \Delta c + \bar{A}\Delta\varphi + \bar{B}\Delta\chi + C$$

Da die Coefficienten dieses Ausdrucks Functionen der Anomalie $\bar{\varepsilon}$ sind, die mit $n\delta z$ durch folgende Gleichung verbunden sind,

$$nt + c + n\delta z = \bar{\varepsilon} - e_0 \sin\bar{\varepsilon}$$

während $n\delta z$ selbst im Vorhergehenden durch die Anomalie ε_0 ausgedrückt ist, die von der folgenden Gleichung abhängt,

$$nt + c = \varepsilon_0 - e_0 \sin \varepsilon_0$$

so muss $\bar{\varepsilon}$ in diesen Coefficienten auf ε_0 hingeführt werden. Es braucht dieses aber nur mit $\bar{A}$ und $\bar{B}$ vorgenommen zu werden, da daraus in C nur Grössen dritter Ordnung entstehen würden. Es ist leicht einzusehen, dass

$$\bar{A} = A + \frac{dA}{dg} n\delta z$$

$$\bar{B} = B + \frac{dB}{dg} n\delta z$$

wird, wenn

$$A = -\frac{2-e_0^2}{\cos \varphi_0} \sin \varepsilon_0 + \frac{e_0}{2 \cos \varphi_0} \sin 2\varepsilon_0$$

$$B = -\frac{2+e_0^2}{2 \cos \varphi_0} + \frac{2e_0}{\cos \varphi_0} \cos \varepsilon_0 - \frac{e_0^2}{2 \cos \varphi_0} \cos 2\varepsilon_0$$

ist. Da

$$\frac{dA}{dg} = \frac{dA}{d\varepsilon} \frac{1}{1 - e_0 \cos \varepsilon_0}; \quad \frac{dB}{dg} = \frac{dB}{d\varepsilon} \frac{1}{1 - e_0 \cos \varepsilon_0}$$

ist, und die Differentialquotienten von A und B nach ε durch $1 - e_0 \cos \varepsilon_0$ theilbar sind, so wird

$$\frac{dA}{dg} = -\frac{e_0}{\cos \varphi_0} - \frac{2}{\cos \varphi_0} \cos \varepsilon_0; \quad \frac{dB}{dg} = -\frac{2e_0}{\cos \varphi_0} \sin \varepsilon_0$$

und

$$n\delta(z) = n\delta z - \Delta c + A \Delta\varphi + B \Delta\chi + \frac{dA}{dg} n\delta z \Delta\varphi + \frac{dB}{dg} n\delta z \Delta\chi + C$$

142.

Der eben entwickelte Ausdruck enthält alle Glieder, die, wenn man die Grössen dritter Ordnung übergeht, der Strenge nach erforderlich sind; allein es ist noch ein Umstand zu betrachten. Wir sind jetzt im Begriff, den Ort des Planeten von den Elementen (c), (φ), (χ), etc. abhängig zu machen, während im vorstehenden Ausdruck $n\delta(z)$ immer noch von ε_0 und c abhängt. Da man die Werthe der Elemente e_0 und c kennt, so kann man auch jedenfalls $n\delta(z)$ durch diese berechnen; allein bequemer und angemessener ist es, den Ausdruck für $n\delta(z)$ so einzurichten, dass er auch von (e) oder (φ) und (c) abhängig wird, und es ist klar, dass diese Reduction wieder so ausgeführt werden muss, dass $n\delta(z)$

seinen Werth dadurch nicht ändert. Bezeichnen wir die von (φ) und (c) abhängige excentrische Anomalie mit ε, so wird

$$nt + (c) = \varepsilon - \sin(\varphi)\sin\varepsilon$$

und ausserdem ist

$$nt + c = \varepsilon_0 - \sin\varphi_0 \sin\varepsilon_0$$

Setzt man daher wieder

$$\Delta c = (c) - c$$
$$\Delta\varphi = (\varphi) - \varphi_0$$
$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$$

so wird bis auf Grössen zweiter Ordnung, die hier übergangen werden dürfen,

$$\Delta c = \Delta\varepsilon - e_0\cos\varepsilon\,\Delta\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\varphi_0\,\Delta\varphi$$

woraus

$$\varepsilon_0 = \varepsilon - \frac{\Delta c}{1 - e\cos\varepsilon} - \frac{\sin\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon}\cos\varphi\,\Delta\varphi$$

folgt. Der im Vorhergehenden ermittelte Ausdruck für $n\delta z$ ist überdies in seinen Argumenten Function von $i'\mu c$, wo auch c durch (c) zu ersetzen ist, wofür die einfache Relation

$$c = (c) - \Delta c$$

dient. Wenden wir diese Sätze auf den im vor. Art. entwickelten Ausdruck an, übergehen wie immer die Grössen dritter Ordnung, und substituiren die Ausdrücke für A, B und C, so bekommen wir

$$\begin{aligned}
n\delta(z) = n\delta z &- \left\{1 + \frac{dn\delta z}{d\varepsilon}\frac{1}{1 - e\cos\varepsilon} + \frac{dn\delta z}{dc}\right\}\Delta c \\
&+ \left\{-\frac{2 - e^2}{\cos\varphi}\sin\varepsilon + \frac{e}{2\cos\varphi}\sin 2\varepsilon - \left[\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{2}{\cos\varphi}\cos\varepsilon\right] n\delta z - \frac{dn\delta z}{d\varepsilon}\frac{\sin\varepsilon\cos\varphi}{1 - e\cos\varepsilon}\right\}\Delta\varphi \\
&+ \left\{-\frac{2 + e^2}{2\cos\varphi} + \frac{2e}{\cos\varphi}\cos\varepsilon - \frac{e^2}{2\cos\varphi}\cos 2\varepsilon - \frac{2e}{\cos\varphi}\sin\varepsilon\,.\,n\delta z\right\}\Delta\chi \\
&+ \left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{2}{\cos\varphi}\cos\varepsilon\right\}\Delta c\,\Delta\varphi + \frac{2e}{\cos\varphi}\sin\varepsilon\,.\,\Delta c\,\Delta\chi \\
&+ \left\{\frac{5e - 6e^3}{4\cos^2\varphi}\sin\varepsilon + \frac{7 - 5e^2}{4\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon - \frac{e}{4\cos^2\varphi}\sin 3\varepsilon\right\}\Delta\varphi^2 \\
&+ \left\{-\frac{e^3}{2\cos^2\varphi} + \frac{4 - e^2}{2\cos^2\varphi}\cos\varepsilon - \frac{6e - 3e^3}{2\cos^2\varphi}\cos 2\varepsilon + \frac{e^2}{2\cos^2\varphi}\cos 3\varepsilon\right\}\Delta\varphi\,\Delta\chi \\
&+ \left\{\frac{4e + e^3}{4\cos^2\varphi}\sin\varepsilon - \frac{e^2}{\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon + \frac{e^3}{4\cos^2\varphi}\sin 3\varepsilon\right\}\Delta\chi^2
\end{aligned}$$

Wenn Δc, $\Delta\varphi$ und $\Delta\chi$ gegeben sind, so wird die Berechnung dieses Ausdrucks am Einfachsten auf dieselbe Art wie die in dieser Abhandlung vorhergehenden Berechnungen Ausdrücke ähnlicher Beschaffenheit ausgeführt. Es werden nemlich die erforderlichen Producte

mechanisch gebildet und schliesslich addirt. Wenn die Störungscoefficienten nicht viel grösser sind, wie in dem hier gewählten Beispiel, so ist durch dieses Verfahren die Berechnung des vorstehenden Ausdrucks sehr einfach und kostet nur wenig Zeit. Für die Ausführung dieser Multiplicationen bemerke ich, dass

$$\frac{1}{1-e\cos\varepsilon} = \frac{1}{\cos\varphi} + \frac{2\beta}{\cos\varphi}\cos\varepsilon + \frac{2\beta^2}{\cos\varphi}\cos 2\varepsilon + \text{etc.}$$

$$\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\sin\varepsilon + \frac{\beta}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\sin 2\varepsilon + \frac{\beta^2}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\sin 3\varepsilon + \text{etc.}$$

wo wie früher $\beta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ist.

143.

Auf dieselbe Art müssen die Ausdrücke (65) und (66) entwickelt werden. Der (65) giebt zuerst

$$\begin{aligned}(v) = v &+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n} + \left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}\Delta\varphi + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi \\ &- \frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\,n\delta z\,\Delta\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\,n\delta z\,\Delta\chi \\ &+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}v + \left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}\Delta\varphi\,.\,v + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi\,.\,v + D\end{aligned}$$

wo D die Summe der Glieder der zweiten Ordnung in (65) bezeichnet. Der vorstehende Ausdruck verlangt, dass man immer noch in dem daraus nach der Substitution der betreffenden Grössen hervorgehenden die durch c und e_0 zu berechnende Anomalie ε_0 substituire. Durch die im vor. Art. entwickelten Ausdrücke verwandelt man ihn aber in einen solchen, in welchem die durch (c) und (e) zu berechnende Anomalie zu setzen ist. Diese Verwandelung giebt

$$\begin{aligned}(v) = v &+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n} + \left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}\Delta\varphi + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi \\ &+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}v + \left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}\Delta\varphi\,.\,v + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi\,.\,v \\ &- \frac{dv}{d\varepsilon}\,\frac{\Delta c}{1-e\cos\varepsilon} - \frac{dv}{dc}\Delta c - \frac{dv}{d\varepsilon}\,\frac{\sin\varepsilon\cos\varphi}{1-e\cos\varepsilon}\Delta\varphi \\ &- \frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta\varphi\,.\,n\delta z + \frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta\chi\,.\,n\delta z \\ &- \tfrac{1}{9}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 + \left\{\frac{2e}{3\cos\varphi} + \frac{2}{3\cos\varphi}\cos\varepsilon\right\}\frac{\Delta n}{n}\Delta\varphi + \frac{2e}{3\cos\varphi}\sin\varepsilon\,.\,\frac{\Delta n}{n}\,.\,\Delta\chi \\ &+ \frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta c\,\Delta\varphi - \frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta c\,\Delta\chi \\ &+ \left\{\frac{2+e^2}{2\cos^2\varphi} + \frac{3e}{2\cos^2\varphi}\cos\varepsilon + \frac{\sin^2\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\right\}\Delta\varphi^2 \\ &+ \left\{\frac{1+e^2}{\cos^2\varphi}\sin\varepsilon - \frac{e\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\right\}\Delta\varphi\,\Delta\chi + \left\{\frac{e^2}{2\cos^2\varphi} - \frac{e\cos\varepsilon}{2\cos^2\varphi}\right\}\Delta\chi^2\end{aligned}$$

wo wieder allenthalben e_0 und φ_0 für e und φ gelesen werden muss.

Die hier nach ihrer Entwickelung in unendliche Reihen anzuwendenden Functionen sind ausser den schon im vor. Art. angeführten

$$\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} = \frac{2\beta^2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi} + \frac{2\beta}{\cos\varphi}\cos\varepsilon + \frac{2\beta^2}{\cos\varphi}\cos 2\varepsilon + \text{etc.}$$

$$\frac{\sin^2\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} = \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} + \frac{\beta}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\cos\varepsilon - \frac{\cos\varphi}{2\cos^4\frac{1}{2}\varphi}\cos 2\varepsilon - \frac{\beta\cos\varphi}{2\cos^4\frac{1}{2}\varphi}\cos 3\varepsilon - \text{etc.}$$

$$\frac{e\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} = \beta^2\sin\varepsilon + \frac{\beta}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\sin 2\varepsilon + \frac{\beta^2}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\sin 3\varepsilon + \text{etc.}$$

144.

Gehen wir zur Entwickelung des Ausdrucks (66) über, und setzen zur Abkürzung

$$B = \beta\cos(\pi_0-\theta_0) - \gamma\sin(\pi_0-\theta_0)$$
$$C = \beta\sin(\pi_0-\theta_0) + \gamma\cos(\pi_0-\theta_0)$$

dann wird er

$$\frac{\Delta u}{\cos i_0} = -e_0 B - C\sin\bar{\varepsilon} + B\cos\bar{\varepsilon}$$

und substituiren wir hier den Ausdruck für Δu, so wird

$$\frac{(u)}{\cos i} = \left\{\frac{u}{\cos i} - e_0 B - C\sin\bar{\varepsilon} + B\cos\bar{\varepsilon}\right\}\frac{a_0(1+\nu)}{(a)(1+(\nu))}$$

Die erste Entwickelung giebt hier

$$\begin{aligned}\frac{(u)}{\cos i} = {} & \frac{u}{\cos i} - eB - C\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon \\ & + \tfrac{2}{3}\frac{u}{\cos i}\frac{\Delta n}{n} - \tfrac{2}{3}eB\frac{\Delta n}{n} - \tfrac{2}{3}C\frac{\Delta n}{n}\sin\varepsilon + \tfrac{2}{3}B\frac{\Delta n}{n}\cos\varepsilon \\ & - \frac{u}{\cos i}((\nu)-\nu) + eB((\nu)-\nu) + C((\nu)-\nu)\sin\varepsilon - B((\nu)-\nu)\cos\varepsilon \\ & - C\frac{\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}n\delta z - B\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}n\delta z\end{aligned}$$

wo wieder ε_0 angewandt werden muss. Führt man die weitere Reduction aus um ε einzuführen, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{(u)}{\cos i} = {} & \frac{u}{\cos i} - eB - C\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon \\ & - \frac{\frac{du}{d\varepsilon}}{\cos i}\frac{\Delta c}{1-e\cos\varepsilon} - \frac{\frac{du}{dc}}{\cos i}\Delta c - \frac{\frac{du}{d\varepsilon}}{\cos i}\frac{\sin\varepsilon\cos\varphi}{1-e\cos\varepsilon}\Delta\varphi \\ & + \tfrac{2}{3}\frac{u}{\cos i}\frac{\Delta n}{n} - \tfrac{2}{3}eB\frac{\Delta n}{n} - \tfrac{2}{3}C\frac{\Delta n}{n}\sin\varepsilon + \tfrac{2}{3}B\frac{\Delta n}{n}\cos\varepsilon \\ & - \frac{u}{\cos i}((\nu)-\nu) + eB((\nu)-\nu) + C((\nu)-\nu)\sin\varepsilon - B((\nu)-\nu)\cos\varepsilon \\ & - C\frac{\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}n\delta z - B\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}n\delta z \\ & + \frac{\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}C.\Delta c + \frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}B.\Delta c \\ & + \frac{\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\cos\varphi\, C.\Delta\varphi + \frac{\sin^2\varepsilon\cos\varphi}{1-e\cos\varepsilon}B.\Delta\varphi\end{aligned}$$

wo ich alle Glieder angesetzt habe, obgleich in der Regel viele derselben unmerklich sein werden.

145.

Die im Vorhergehenden eingeführten Aenderungen der elliptischen Elemente wollen wir nun so bestimmen, dass die mittleren Elemente daraus hervorgehen. Setzen wir

$$n\delta z = a_1 \sin\varepsilon + a_2 \sin 2\varepsilon + a_3 \sin 3\varepsilon + \ldots$$
$$+ b_1 \cos\varepsilon + b_2 \cos 2\varepsilon + b_3 \cos 3\varepsilon + \ldots$$

indem es sich hier nur um die Glieder handelt, die vom Index i' unabhängig sind, substituiren diesen Ausdruck nebst den anderen Ausdrücken in den Ausdruck für $n\delta(z)$ des Art. 142, und nehmen hiebei nur auf das constante Glied und die mit $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ multiplicirten Glieder Rücksicht, so ergiebt sich

$$n\delta(z) = \left\{ \begin{array}{l} -\Delta c \left\{ 1 + \frac{\beta}{\cos\varphi} a_1 + \frac{2\beta^2}{\cos\varphi} a_2 + \frac{3\beta^3}{\cos\varphi} a_3 + \ldots \right\} \\ + \Delta\varphi \left\{ \left(\frac{\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi} \right) b_1 + \frac{\cos\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} \beta b_2 + \frac{3\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} \beta^2 b_3 + \ldots \right\} \\ - \Delta\chi \left\{ \frac{2+e^2}{2\cos\varphi} + \frac{e}{\cos\varphi} a_1 \right\} + \Delta c\, \Delta\varphi \frac{e}{\cos\varphi} - \Delta\varphi\, \Delta\chi \frac{e^2}{2\cos^2\varphi} \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} a_1 - \Delta c \left\{ \frac{1+\beta^2}{\cos^2\varphi} a_1 + \frac{2\beta(1+\beta^2)}{\cos\varphi} a_2 + \frac{3\beta^2(1+\beta^2)}{\cos\varphi} a_3 + \ldots \right\} \\ - \Delta\varphi \left\{ \frac{2-e^2}{\cos\varphi} + \left(\frac{\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} \beta + \frac{e}{\cos\varphi} \right) a_1 - \left(\frac{(1-\beta^2)\cos\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi} \right) a_2 \right. \\ \qquad \left. - \frac{3\beta(1-\beta^2)\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} a_3 + \ldots \right\} \\ + \Delta\chi \frac{e}{\cos\varphi} b_2 + \Delta c\, \Delta\chi \frac{2e}{\cos\varphi} + \Delta\varphi^2 \frac{5e-6e^3}{4\cos^2\varphi} + \Delta\chi^2 \frac{4e+e^3}{4\cos^2\varphi} \end{array} \right\} \sin\varepsilon$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} b_1 + \Delta c \left\{ \frac{1-\beta^2}{\cos\varphi} b_1 + \frac{2\beta(1-\beta^2)}{\cos\varphi} b_2 + \frac{3\beta^2(1-\beta^2)}{\cos\varphi} b_3 + \ldots \right. \\ + \Delta\varphi \left\{ \left(\frac{\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} \beta - \frac{e}{\cos\varphi} \right) b_1 + \left(\frac{(1+\beta^2)\cos\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi} \right) b_2 \right. \\ \qquad \left. + \frac{3\beta(1+\beta^2)}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} b_3 + \ldots \right\} \\ + \Delta\chi \left\{ \frac{2e}{\cos\varphi} - \frac{e}{\cos\varphi} a_2 \right\} + \Delta c\, \Delta\varphi \frac{2}{\cos\varepsilon} + \Delta\varphi\, \Delta\chi \frac{4-e^2}{2\cos^2\varphi} \end{array} \right\} \cos\varepsilon$$

Wenn nun $n\delta(z)$ sich auf die mittleren Elemente beziehen soll, so müssen den in diesen Abhandlungen gegebenen Definitionen zufolge in dem vorstehenden Ausdruck die Coefficienten von $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ jeder für sich gleich Null sein. Damit ferner das Element (c) vollständig in

$$nt + (c) = (g)$$

enthalten sei, muss überdiess das constante Glied des vorstehenden Ausdrucks auch gleich Null sein. Setzen wir nun diese drei Coefficienten jeden für sich gleich Null, entwickeln aus diesen Gleichungen die Ausdrücke für $\Delta\varphi$, $\Delta\chi$, Δc und übergehen dabei wie immer die Grössen dritter Ordnung in Bezug auf die störende Kraft, so bekommen wir

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi = {} & \frac{\cos\varphi}{2-e^2}a_1 - \cos\varphi\cos^6\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{5+10\beta^2+7\beta^4-4\beta^6+2\beta^8}{2(2-e^2)^3}\beta a_1^2 \\
& - \cos\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{4-3\beta^2+\beta^4}{(2-e^2)^2}\beta^2 a_1 a_2 + \frac{3\cos^4\varphi}{2(2-e^2)^2\cos^4\frac{1}{2}\varphi}\beta a_1 a_3 + \ldots \\
& + \cos\varphi\cos^4\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{1+3\beta^2+9\beta^4+2\beta^6}{4e(2-e^2)}b_1^2 \\
& + \cos\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{4+5\beta^2+\beta^4}{2(2-e^2)}\beta^2 b_1 b_2 + 3\cos\varphi\,\frac{2+e^2}{8(2-e^2)\cos^4\frac{1}{2}\varphi}\beta b_1 b_3 + \ldots \\
\Delta\chi = {} & -\frac{\cos\varphi}{2e}b_1 + \frac{\cos^6\frac{1}{2}\varphi}{2e^2(2-e^2)}(1+4\beta^2+4\beta^4+\beta^6+2\beta^8)a_1 b_1 \\
& + \frac{\cos\varphi(2-\beta^2)}{4(2-e^2)\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\beta a_1 b_2 - \frac{3\cos^3\varphi}{8(2-e^2)\cos^6\frac{1}{2}\varphi}a_1 b_3 - \ldots \\
& + \tfrac{1}{8}(6+5\beta^2+\beta^4)\beta b_1 b_2 + 3\frac{2+e^2}{32\cos^6\frac{1}{2}\varphi}b_1 a_3 + \ldots \\
\Delta c = {} & \frac{2+e^2}{4e}b_1 - \frac{\cos^{10}\frac{1}{2}\varphi}{2e^2(2-e^2)\cos\varphi}(1+8\beta^2+58\beta^4+53\beta^6+30\beta^8+26\beta^{10}+4\beta^{12})a_1 b_1 \\
& + \frac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{4(2-e^2)}(2-15\beta^2+6\beta^4+\beta^6)\beta a_1 b_2 + \frac{3\cos^2\varphi}{8(2-e^2)\cos^2\frac{1}{2}\varphi}(1+8\beta^2+\beta^4)a_1 b_3 + \ldots \\
& - \frac{2+e^2}{16\cos\varphi}(2+\beta^2+\beta^4)\beta b_1 a_2 - 3\frac{2+e^2}{32\cos\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi}(1+\beta^4)b_1 a_3 - \ldots
\end{aligned}$$

Wenn hiedurch $\Delta\varphi$, $\Delta\chi$, Δc berechnet sind, so bekommt man

$$\begin{aligned}
(\varphi) &= \varphi_0 + \Delta\varphi \\
(\chi) &= \pi_0 + \Delta\chi \\
(c) &= c + \Delta c
\end{aligned}$$

wo nun (φ), (χ) und (c) mittlere Elemente sind.

146.

Um die mittleren Elemente (i) und (σ) zu erhalten, setze ich mit Uebergehung der kleinen Glieder, die schon in den vorstehenden Formeln wohl nie etwas Merkliches werden geben können, und daher in den jetzt zu entwickelnden um so mehr unmerklich sein werden,

$$\begin{aligned}
n\delta z &= a\sin\varepsilon + b\cos\varepsilon \\
(v) - v &= f\cos\varepsilon + g\sin\varepsilon \\
\frac{u}{\cos i} &= h\sin\varepsilon + k\cos\varepsilon
\end{aligned}$$

Die Substitution dieser so wie der übrigen Ausdrücke in den Ausdruck für $\frac{(u)}{\cos i}$ des Art. 144 giebt, wenn wir nur die beiden mit $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ multiplicirten Glieder aufnehmen,

$$\frac{(u)}{\cos i} = \left\{\begin{array}{l} h - C + \Delta c\left(\frac{k(1-\beta^2)}{\cos\varphi} + \frac{B}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right) \\ - \Delta\varphi\left(\frac{h\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} - \frac{c\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right)\gamma + \frac{2}{3}(h-C)\frac{\Delta n}{n} \\ + eBg + \left(\frac{1}{2\cos\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi}\right)\beta Ca - \frac{\beta Bb}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} \end{array}\right\} \sin\varepsilon$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} k + B - \Delta c\left(\frac{h(1+\beta^2}{\cos\varphi} - \frac{C}{\cos\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right) \\ + \Delta\varphi\left(\frac{k\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} + \frac{B\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right)\beta + \frac{2}{3}(k+B)\frac{\Delta n}{n} \\ + eBf - \left(\frac{1}{2\cos\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi} + \frac{1}{\cos\varphi}\right)\beta Cb - \frac{\beta Ba}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} \end{array}\right\} \cos\varepsilon$$

Da nun, wenn B und C mittleren Elementen entsprechen sollen, auch diese beiden Coefficienten jeder für sich gleich Null sein müssen, so bekommen wir durch die Auflösung der beiden aus diesen Bedingungen entstehenden Gleichungen

$$C = \quad h - ekq - \frac{\beta}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\,ha + \frac{\beta}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\,kb$$

$$B = -k - ekf + \frac{3\beta+\beta^3}{2\cos\varphi}\,hb - \frac{\beta}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\,ka$$

hat man hieraus C und B berechnet, so erhält man β und γ aus den folgenden

$$\beta = \quad B\cos(\pi_0-\theta_0) + C\sin(\pi_0-\theta_0)$$
$$\gamma = -B\sin(\pi_0-\theta_0) + C\cos(\pi_0-\theta_0)$$

und dann wird zufolge des Art. 138

$$\Delta i = \gamma \qquad + \tfrac{1}{2}\beta^2\operatorname{cotg} i_0 + \tfrac{1}{2}\gamma^2\operatorname{tg} i_0$$
$$\Delta\sigma = \beta\operatorname{cotg} i_0 - \beta\gamma\operatorname{cotg}^2 i_0$$

worauf

$$(i) = i_0 + \Delta i$$
$$(\sigma) = \theta_0 + \Delta\sigma$$
$$(\theta) = (\sigma) + 2\sin^2\tfrac{1}{2}i_0\,.\,\Delta\sigma$$
$$(\pi) = (\chi) + 2\sin^2\tfrac{1}{2}i_0\,.\,\Delta\sigma$$

wird. Statt der beiden letzten dieser kann man auch, wenn man es für nöthig halten sollte, die im Art. 138 für (θ) und (π) besonders angeführten anwenden.

Nachdem diese Bestimmungen ausgeführt worden sind, werden durch die Ausdrücke der Artt. 142, 143, 144 die Coefficienten in $n\delta(z)$, (ν), $\frac{(u)}{\cos i}$ berechnet.

147.

Zur Anwendung der vorstehenden Entwickelungen auf unser Beispiel übergehend, entnehme ich zuerst aus dem Art. 132 die folgenden numerischen Werthe

$$a_1 = +820''.80\,;\quad b_1 = -677''.90$$
$$a_2 = -\ 19.55\,;\quad b_2 = +\ 13.50$$
$$a_3 = +\ \ 0.10\,;\quad b_3 = -\ \ 0.08$$

von welchen indess nur a_1 und b_1 hier von merklichem Einfluss sind. Es ergiebt sich hiemit durch die Ausdrücke des Art. 145

$$\Delta\varphi = \quad +6'\ 53''.64$$
$$\Delta\chi = +1^0\ \ 4\ \ 35.1$$
$$\Delta c = -\ 1\ \ \ 5\ \ \ 4.1$$

und hiemit habe ich sofort die Verbesserung der Coefficenten von $n\delta z$ und ν berechnet. Die dazu erforderlichen Factoren und übrigen Hülfsgrössen haben die folgenden numerischen Werthe, für $n\delta(z) - n\delta z$ ist

$$-\frac{\Delta c}{1-e\cos\varepsilon} = (8.27867) + 2(6.9084)\cos\varepsilon + 2(5.538)\cos 2\varepsilon$$
$$\log(-\ \mu\Delta c) = 7.8194$$
$$-\ (-2\mu\Delta c) = 8.1204$$
$$-\ (-3\mu\Delta c) = 8.2965$$
$$-\ (-4\mu\Delta c) = 8.4215$$
$$-\ (-5\mu\Delta c) = 8.5184$$
$$-\ (-6\mu\Delta c) = 8.5973$$

$$-\left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{2}{\cos\varphi}\cos\varepsilon\right\}.\Delta\varphi = -(6.234) - 2(7.3037)\cos\varepsilon$$

$$-\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\cos\varphi\,.\,\Delta\varphi = -2(7.0000)\sin\varepsilon - 2(5.629)\sin 2\varepsilon - 2(4.260)\sin 3\varepsilon$$

$$-\frac{2e}{\cos\varphi}\sin\varepsilon\,.\,\Delta\chi = -2(7.2039)\sin\varepsilon$$

$$\left\{-\frac{2-e^2}{\cos\varphi}\sin\varepsilon + \frac{e}{2\cos\varphi}\sin 2\varepsilon\right\}.\Delta\varphi = -827''.32\sin\varepsilon + 17''.65\sin 2\varepsilon$$

$$\left\{-\frac{2+e^2}{2\cos\varphi} + \frac{2e}{\cos\varphi}\cos\varepsilon - \frac{e^2}{2\cos\varphi}\cos 2\varepsilon\right\}.\Delta\chi = -3903''.3 + 661''.91\cos\varepsilon - 14''.08\cos 2\varepsilon$$

$$\left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{2}{\cos\varphi}\cos\varepsilon\right\}\Delta c\,\Delta\varphi = -0''.67 - 15''.71\cos\varepsilon$$

$$\frac{2e}{\cos\varphi}\sin\varepsilon\,.\,\Delta c\,\Delta\chi = -12''.49\sin\varepsilon$$

$$\left\{\frac{3e-6e^3}{4\cos^2\varphi}\sin\varepsilon + \frac{7-5e^2}{4\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon - \frac{e}{4\cos^2\varphi}\sin 3\varepsilon\right\}.\Delta\varphi^2 = +0''.09\sin\varepsilon + 1''.46\sin 2\varepsilon - 0''.02\sin 3\varepsilon$$

$$\left\{-\frac{e^3}{2\cos^2\varphi}+\frac{4-e^2}{2\cos^2\varphi}\cos\varepsilon-\frac{6e-3e^3}{2\cos^2\varphi}\cos 2\varepsilon+\frac{e^2}{2\cos^2\varphi}\cos 3\varepsilon\right\}\Delta\varphi\,\Delta\chi=$$
$$0''.00+15''.63\cos\varepsilon-1''.99\cos 2\varepsilon+0''.03\cos 3\varepsilon$$

$$\left\{\frac{4e+e^3}{4\cos^2\varphi}\sin\varepsilon-\frac{e^2}{\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon+\frac{e^3}{4\cos^2\varphi}\sin 3\varepsilon\right\}.\Delta\chi^2=$$
$$+6''.25\sin\varepsilon-0''.53\sin 2\varepsilon+0''.01\sin 3\varepsilon$$

Für $(\nu)-\nu$ werden ausser den vorstehenden Ausdrücken für $\frac{\Delta c}{1-e\cos\varepsilon}$, den Logarithmen von $-i''\mu.\Delta c$, und $\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\cos\varphi.\Delta\varphi$, die folgenden gebraucht.

$$\left\{\frac{e}{\cos\varphi}+\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}.\Delta\varphi=(6.234)+2(7.0027)\cos\varepsilon$$

$$\frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi=2(6.9029)\sin\varepsilon$$

$$\tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}=-(5.903)=-16''.49$$

$$-\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}.\Delta\varphi=-2(7.0032)\sin\varepsilon-2(5.633)\sin 2\varepsilon$$

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}.\Delta\chi=(5.837)+2(6.9067)\cos\varepsilon+2(5.536)\cos 2\varepsilon$$

$$\left\{\frac{e}{\cos\varphi}+\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}\Delta\varphi=+35''.33+415''.15\cos\varepsilon$$

$$\frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi=+330''.96\sin\varepsilon$$

$$\tfrac{1}{9}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2=0.00$$

$$\tfrac{2}{3}\left\{\frac{e}{\cos\varphi}+\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}\frac{\Delta n}{n}\Delta\varphi=0''.00-0''.03\cos\varepsilon$$

$$\tfrac{2}{3}\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\frac{\Delta n}{n}\Delta\chi=-0''.03\sin\varepsilon$$

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta c\,\Delta\varphi=-7''.87\sin\varepsilon-0''.34\sin 2\varepsilon-0''.01\sin 3\varepsilon$$

$$-\frac{1}{\cos\varphi}\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta c\,\Delta\chi=+0''.27+6''.30\cos\varepsilon+0''.27\cos 2\varepsilon+0''.01\cos 3\varepsilon$$

$$\left\{\frac{2+e^2}{2\cos^2\varphi}+\frac{3e}{2\cos^2\varphi}\cos\varepsilon+\frac{\sin^2\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\right\}\Delta\varphi^2=+1''.25+0''.12\cos\varepsilon-0''.41\cos 2\varepsilon-0''.02\cos 3\varepsilon$$

$$\left\{\frac{1+e^2}{\cos^2\varphi}\sin\varepsilon-\frac{e\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\right\}\Delta\varphi\,\Delta\chi=+7''.87\sin\varepsilon-0''.33\sin 2\varepsilon-0''.01\sin 3\varepsilon$$

$$\left\{\frac{e^2}{2\cos^2\varphi}-\frac{e\cos\varepsilon}{2\cos^2\varphi}\right\}\Delta\chi^2=+0''.27-3''.12\cos\varepsilon$$

und hiemit ergeben sich die folgenden Unterschiede:

	$n\delta(z) - n\delta z$		$(v) - v$	
	sin	cos	cos	sin
0,0		+0″.1		+17″.89
1,0	−820″.78	+677.54	+411″.82	+338.63
2,0	+17.24	−12.78	+0.14	−0.38
3,0	0.00	−0.03	+0.02	+0.02
−2,−1	+0.02	−0.02	0.00	+0.02
−1,−1	+0.04	+0.05	+0.05	−0.03
0,−1	−0.17	+0.10	−0.20	−0.15
1,−1	+2.19	+0.82	−0.81	+0.28
2,−1	+0.06	+0.40	−0.04	+0.16
3,−1	+0.04	−0.01	−0.03	0.00
−1,−2	+0.01	−0.05	+0.02	0.00
0,−2	+0.09	+0.77	+0.07	−0.41
1,−2	+3.14	−2.84	−0.52	−1.55
2,−2	+5.79	−7.41	−3.28	−4.30
3,−2	+0.78	−0.19	−0.34	−0.06
4,−2	−0.05	+0.02	−0.01	+0.01
−1,−3	+0.07	+0.07	+0.02	−0.07
0,−3	+0.27	+2.35	+0.51	−1.07
1,−3	+11.44	−12.27	−1.20	+1.99
2,−3	+2.19	+28.50	−0.93	+13.75
3,−3	−1.37	+2.01	+0.08	+1.35
4,−3	−0.01	+0.07	+0.01	+0.07
1,−4	−0.07	−0.08	−0.05	+0.07
2,−4	+0.15	+1.19	−0.15	+0.37
3,−4	+1.02	+0.39	−0.60	+0.26
4,−4	−0.34	+0.20	+0.26	+0.12
5,−4	−0.02	−0.01	+0.01	+0.01
1,−5	−0.06	−0.03	−0.01	+0.02
2,−5	−0.15	+0.71	−0.01	+0.09
3,−5	+0.89	+0.03	−0.24	+0.04
4,−5	−0.13	+0.22	+0.10	+0.14
5,−5	0.00	−0.12	0.00	−0.10
1,−6	−0.04	+0.04	−0.02	+0.01
2,−6	−0.07	+0.71	+0.02	−0.05
3,−6	−0.75	−0.31	+0.35	−0.08
4,−6	0.00	+0.14	+0.03	+0.09
5,−6	−0.05	−0.08	+0.04	−0.07
6,−6	−0.02	+0.01	−0.03	0.00

	$t$sin	$t$cos	$t$cos	$t$sin
0,0		+0″.00614	−0″.00390	
1,0	+0″.08887	−0.03359	−0.04447	−0″.01711
2,0	+0.01285	+0.01075	−0.00573	+0.00304
3,0	−0.00019	−0.00021	−0.00027	−0.00006

−1, −1	+0.00004	−0″.00009	+0″.00003	+0″.00003
0, −1	0.00000	−0.00003	0.00000	0.00000
1, −1	+0.00002	−0.00003	0.00000	−0.00001
2, −1	+0.00001	−0.00009	−0.00001	−0.00005
0, −2	−0.00001	+0.00009	−0.00004	0.00000
1, −2	+0.00030	+0.00046	−0.00003	+0.00008
2, −2	−0.00033	−0.00014	+0.00014	−0.00005
3, −2	−0.00015	−0.00005	+0.00007	−0.00002
0, −3	−0.00088	+0.00123	−0.00043	−0.00047
1, −3	+0.01084	−0.00053	+0.00034	+0.00020
2, −3	−0.00141	+0.00208	+0.00066	+0.00078
3, −3	+0.00038	−0.00035	−0.00016	−0.00011
4, −3	+0.00005	+0.00001	−0.00002	0.00000

	$l_1^2 \sin$	$l_1^2 \cos$	$l_1^2 \cos$	$l_1^2 \sin$
0,0		+0″.006	+0″.024	
1,0	−0″.040	−0.194	+0.022	−0″.098
2,0	+0.019	−0.030	−0.008	−0.007
3,0	0.000	0.000	0.000	0.000

Ich bemerke hiezu Folgendes. Weiter wie bis $i' = 6$ habe ich zu gehen nicht für nöthig gehalten, indem bei den folgenden kleinen Coefficienten die Verbesserungen unmerklich oder nur sehr unbedeutend ausfallen würden. In den kleinen Störungsgliedern werden meistens nur von den ganzen Ausdrücken von $n\delta(z)$ und (v) nur das erste Glied von

$$\frac{dn\delta z}{d\varepsilon} \frac{\Delta c}{1 - e\cos\varepsilon}, \quad \frac{dv}{d\varepsilon} \frac{\Delta c}{1 - e\cos\varepsilon}$$

und die Glieder $\frac{dn\delta z}{dc} \Delta c$, $\frac{dv}{dc} \Delta c$ merklich, und alle übrigen Glieder hätten im Grunde übergangen werden können. Wenn man zum vorstehenden Ausdruck von $n\delta(z) - n\delta z$ den Ausdruck von $n\delta z$ des Art. 132 addirt, müssen in Folge des Vorhergehenden das constante Glied und die Coefficienten von $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ gleich Null werden. In Bezug auf die beiden ersten findet diese Bedingung auch zur Gnüge statt, aber in dem Coefficienten von $\cos\varepsilon$ bleiben 0″.36 übrig. Ich habe meine Entwickelungen und Rechnungen, nachdem ich dieses bemerkt hatte, noch einmal durchgesehen, woraus sich ergeben hat, dass diese 0″.36 von den übergangenen Gliedern dritter Ordnung herrühren, die in dem grossen Werth von $\Delta\chi$, welcher hier statt findet, um so viel hervortreten; übrigens ist dieser Umstand ohne weitere Folgen auf das Resultat. Die Glieder zweiter Ordnung in $\Delta\chi$ betragen in diesem Beispiel −93″.6.

Der vorstehende Ausdruck von $n\delta(z)-n\delta z$ giebt ferner zu erkennen, dass die Umwandelung der osculirenden Elemente in mittlere ein kleines Glied in der mittleren Bewegung, und eines in der Säcularänderung der mittleren Länge bewirkt. Beide sind aber sehr unbedeutend, denn jenes beträgt jährlich nur 0″.006, und dieses im ersten Jahrhundert nur 0″.006.

148.

Gehen wir nun zu den Breitenstörungen über, so ist erstlich

$$a = +820''.80\ ,\quad b = -677''.90$$
$$f = +411.82\ ,\quad g = +338.63$$
$$h = -111.47\ ,\quad k = -\ 22.08$$

und hieraus folgt durch die Ausdrücke des Art. 146, da die Glieder zweiter Ordnung hier höchst unbedeutend sind,

$$C = -111''.47\,;\quad B = +22''.08$$

und hieraus folgt

$$\Delta i = -48''.59\,;\quad \Delta\sigma = -5'52''.47$$
$$(\theta)-(\sigma) = (\pi)-(\chi) = -14''.61$$

Die Grössen, die nun zur Berechnung von (u) durch den Ausdruck des Art. 144 erforderlich sind, sind ausser den auch hier anzuwendenden, schon oben gegebenen Ausdrücken von $\frac{\Delta c}{1-e\cos\varepsilon}$, den Logarithmen von $(-i'\mu\Delta c)$, $\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\cos\varphi\Delta\varphi$ und $\frac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}$, die folgenden,

$$-((\nu)-\nu) = -\ (5.934) - 2(6.9993)\cos\varepsilon - 2(6.9144)\sin\varepsilon$$
$$-C\,\tfrac{\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} = \quad (5.364) + 2(6.4343)\cos\varepsilon + 2(5.064)\cos 2\varepsilon$$
$$-B\,\tfrac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} = -2(5.737)\sin\varepsilon - 2(4.367)\sin 2\varepsilon$$
$$\tfrac{\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\,C\Delta c = +0''.09 + 2''.12\cos\varepsilon + 0''.09\cos 2\varepsilon$$
$$\tfrac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\,B\Delta c = -0''.43\sin\varepsilon - 0''.03\sin 2\varepsilon$$
$$\tfrac{\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\cos\varphi\,C\Delta\varphi = \quad 0''.00\sin\varepsilon - 0''.11\sin 2\varepsilon$$
$$\tfrac{\sin^2\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\cos\varphi\,B\Delta\varphi = +0''.02 + 0''.00\cos\varepsilon - 0''.02\cos 2\varepsilon$$

und hiemit erhielt ich die folgenden Verbesserungen

	$\frac{(u)}{\cos i} - \frac{u}{\cos i}$	
	sin	cos
0,0		−2″.10
1,0	+111″.47	+22.08
2,0	+0.26	−0.16
−1,−1	−0.04	+0.10
0,−1	0.00	0.00
1,−1	−0.15	+0.09
2,−1	−0.20	+0.02
0,−2	0.00	0.00
1,−2	−0.24	−0.22
2,−2	−0.20	−0.15
3,−2	+0.03	+0.05
0,−3	−0.19	−0.21
1,−3	−0.06	−0.03
2,−3	+3.41	−1.67
3,−3	+0.49	+0.09

	t sin	t cos
0,0		−0″.00103
1,0	−0″.03863	−0.22811
2,0	+0.01932	−0.02594
3,0	+0.00044	−0.00061
0,−3	0.00000	0.00000
1,−3	−0.00002	−0.00005
2,−3	−0.00006	−0.00096
3,−3	−0.00115	−0.00025
4,−3	−0.00007	−0.00004

	t_1^2 sin	t_1^2 cos
0,0		+0″.023
1,0	+0″.202	−0.036
2,0	−0.022	+0.018
3,0	−0.005	−0.002

149.

Fügen wir nun die eben berechneten Grössen den im Art. 132 erhaltenen Störungen hinzu, so ergeben sich die folgenden, auf die mittleren Elemente sich beziehenden Störungen:

	$n\delta(z)$		(ν)		$\frac{(u)}{\cos i}$	
	sin	cos	cos	sin	sin	cos
0,0			$-3''.98$			$+3''.62$
			$+0.07505t$			$-0.16599t$
			$+0.557t_1^2$			$+2.144t_1^2$
1,0	0	0	$+1.97$	$+0''.23$	0	0
	$-1''.70338t$	$-4''.69916t$	$+0.85498t$	$-2.34931t$	$-12''.03334t$	$+1.90156t$
	$-10.271t_1^2$	$+2.012t_1^2$	$+5.166t_1^2$	$+1.003t_1^2$	$-1.646t_1^2$	$-10.715t_1^2$
2,0	-2.31	$+0.72$	$+1.78$	-0.49	-0.26	-0.37
	$+0.03985t$	$+0.10185t$	$-0.00108t$	$-0.00056t$	$-0.00047t$	$-0.00144t$
	$+0.035t_1^2$	$+0.127t_1^2$	$+0.077t_1^2$	$+0.055t_1^2$	$+0.531t_1^2$	$+1.098t_1^2$
3,0	$+0.10$	-0.11	-0.03	-0.07	-0.02	-0.04
	$+0.00004t$	$-0.00001t$	$-0.00010t$	$-0.00017t$	$+0.00012t$	$-0.00017t$
	$+0.005t_1^2$	$-0.002t_1^2$	$+0.005t_1^2$	$+0.002t_1^2$	$+0.007t_1^2$	$+0.021t_1^2$
−2,−1	$+0.32$	-0.20	$+0.21$	$+0.06$	$+0.08$	$+0.04$
−1,−1	-3.27	$+5.98$	-1.95	-3.75	$+2.08$	$+3.13$
	$+0.00256t$	$+0.00217t$	$+0.00169t$	$-0.00143t$		
0,−1	$+20.28$	-12.26	$+2.24$	-1.16	$+10.47$	$+5.98$
	$+0.00371t$	$+0.00254t$	$+0.00119t$	$-0.00085t$		
1,−1	$+42.09$	-115.20	-14.77	-40.36	-8.13	-4.97
	$-0.00182t$	$-0.00115t$	$+0.00075t$	$-0.00056t$		
2,−1	$+0.26$	$+2.49$	-0.66	$+0.20$	-5.28	-0.69
	$-0.00215t$	$-0.00052t$	$+0.00113t$	$-0.00032t$		
3,−1	-0.01	-0.77	-0.03	-0.65	$+0.15$	-0.01
4,−1	$+0.01$	$+0.04$	-0.01	$+0.02$	$+0.02$	0.00
−2,−2	$+0.02$	-0.01	$+0.02$	-0.01	$+0.03$	0.00
−1,−2	-0.24	$+0.44$	$+0.04$	-0.58	-0.05	$+0.16$
0,−2	$+11.20$	$+13.44$	$+5.97$	-6.56	$+8.94$	-4.48
	$+0.00812t$	$-0.00510t$	$+0.00327t$	$+0.00202t$		
1,−2	-174.17	-170.21	$+44.09$	-40.47	-13.09	$+11.37$
	$+0.02581t$	$-0.01753t$	$-0.00342t$	$-0.00211t$		
2,−2	-184.29	-140.23	$+110.14$	-83.84	-5.33	$+3.74$
	$-0.00452t$	$+0.00616t$	$+0.00236t$	$+0.00320t$		
3,−2	$+4.04$	$+3.26$	$+0.43$	$+0.08$	$+0.55$	-0.85
	$-0.00090t$	$+0.00267t$	$+0.00039t$	$+0.00120t$		
4,−2	$+0.25$	$+0.10$	-0.24	$+0.09$	-0.01	$+0.03$
−1,−3	$+0.48$	$+0.32$	$+0.01$	-0.12	-0.02	$+0.06$
0,−3	-18.47	-7.93	-10.48	$+4.74$	-6.68	$+3.85$
	$+0.00351t$	$+0.00190t$	$+0.00136t$	$-0.00144t$	$+0.00702t$	$+0.02212t$
1,−3	-611.15	-650.53	-49.61	$+21.73$	$+2.64$	$+12.39$
	$-0.01829t$	$-0.57249t$	$-0.00238t$	$+0.01692t$	$-0.01667t$	$-0.00292t$
2,−3	$+746.49$	$+25.91$	-359.04	$+12.00$	-35.25	-95.81
	$+0.01627t$	$+0.06468t$	$-0.00794t$	$+0.03164t$	$-0.00155t$	$+0.02473t$
3,−3	$+2.55$	-12.82	-13.28	-9.02	-0.20	-0.95
	$-0.00311t$	$-0.01068t$	$+0.00127t$	$-0.00380t$	$-0.02134t$	$+0.00413t$
4,−3	-0.43	$+0.11$	-0.10	-0.23	$+0.20$	$+0.21$
	$-0.00015t$	$+0.00004t$	$+0.00015t$	$-0.00017t$	$-0.00097t$	$+0.00056t$
5,−3	-0.07	$+0.10$	$+0.06$	$+0.09$		

0,−4	−0″.23	−0″.15	−0″.20	+0″.08	−0″.20	−0.04
1,−4	−2.56	+0.64	−1.22	0.00	+0·36	+1.17
2,−4	+31.33	−3.08	−11.29	−2.49	−4·10	−2.91
3,−4	+6.37	−17.04	−4.58	−10.88	−3·20	+0.17
4,−4	+1.09	+4.97	−1.03	+3.59	+0·25	+0.05
5,−4	+0.08	−0.03	−0.10	+0.11	−0·09	+0.05
6,−4	−0.03	−0.04	+0.03	−0.04		
0,−5	−0.01	−0.03	−0.02	+0.01	−0.03	0.00
1,−5	−0.49	+0.57	−0.30	−0.17	−0.05	+0.43
2,−5	+18.07	+4.22	−2.95	−0.12	−0.46	−0.48
3,−5	+1.08	−13.01	−0.83	−7.20	−3.07	+2.37
4,−5	+2.22	+2.29	−1.74	+1.62	+0.19	−0.63
5,−5	−1.29	−0.11	+1.06	−0.05	−0.05	+0.07
6,−5	−0.04	+0.04	+0.07	+0.04	−0.01	−0.03
1,−6	+0.22	−0.10	+0.16	+0.12	+0.07	−0.29
2,−6	+19.45	+2.18	+1.42	+0.30	−0.31	+0.18
3,−6	−4.93	+12.15	+2.23	+5.67	+1.82	−2.48
4,−6	+2.32	+0.33	−1.22	+0.46	−0.25	−0.67
5,−6	−0.90	+0.47	+0.68	+0.36	+0.15	+0.11
6,−6	+0.09	−0.37	−0.11	−0.32	−0.02	−0.03
7,−6	−0.01	−0.02	0.00	−0.03	+0.01	0.00
2,−7	+0.08	−0.07	+0.04	+0.05	−0.06	−0.02
3,−7	−0.57	+1.77	+0.12	+0.58	+0.14	−0.14
4,−7	+0.79	+0.22	−0.48	+0.21	−0.20	−0.24
5,−7	−0.27	+0.39	+0.21	+0.27	+0.16	0.00
6,−7	−0.10	−0.34	+0.08	−0.28	−0.05	+0.03
7,−7	+0.11	−0.07	−0.10	+0.05	+0.01	0.00
2,−8	0.00	−0.04	0.00	+0.02		
3,−8	−0.58	+1.45	+0.03	+0.21	+0.05	−0.01
4,−8	+0.79	+0.35	−0.44	+0.22	−0.16	−0.18
5,−8	−0.10	+0.16	+0.08	+0.11	+0.07	−0.03
6,−8	−0.11	−0.13	+0.08	−0.11	−0.02	+0.05
7,−8	+0.13	0.00	−0.11	0.00	0.00	−0.02
8,−8	−0.03	+0.03	+0.03	+0.03		
3,−9	−0.45	+0.57	−0.02	−0.06		
4,−9	−0.61	−0.33	+0.27	−0.15		
5,−9	−0.04	+0.06	+0.04	+0.04		
6,−9	−0.04	−0.01	+0.03	−0.02		
7,−9	+0.06	−0.03	−0.05	−0.02		
8,−9	−0.02	+0.05	+0.01	+0.04		
4,−10	−0.11	−0.08	+0.03	−0.02		
5,−10	−0.03	+0.05	+0.03	+0.03		
6,−10	−0.02	−0.02	+0.01	−0.02		
7,−10	+0.02	−0.02	−0.02	−0.01		
8,−10	0.00	+0.03	0.00	+0.02		

Hiezu kommen noch die oft erwähnten Saturn- und Marsstörungen, für welche die betreffenden Verbesserungen sehr klein ausfallen würden, so wie die Ausdrücke für Γ und $\delta_2 u$, die im Art. 132 gegeben sind. Die Grösse $\Delta\Gamma$ wird völlig unmerklich.

Die mittleren Elemente sind nun der vorstehenden Berechnung zufolge die folgenden. Für 1851 Dec. 5. 0 m. Z. Gr. ist

$$\text{die mittlere Anomalie} = 18^0\ 32'\ 47''.6 + 857''.9364\,(t.365.25) - 0''.426\,t_1^2$$

$$\left.\begin{aligned}(\pi) &= 120^0\ 11'\ 46''.2\\ (\theta) &= 43\ 10\ 54.3\end{aligned}\right\}\ \text{m. Aeq. für } 1851.0$$

$$(\varphi) = 4\ 59\ 47.3$$

$$(i) = 16\ 32\ 23.3$$

$$\log(a) = 0.4110343$$

Es versteht sich von selbst, dass nicht erwartet werden darf, dass die Vergleichung der aus diesen Elementen und den dazu gehörigen Störungen hervorgehenden Oerter der Egeria mit den Beobachtungen nicht diesem Elemente noch kleine Correctionen hinzufügen sollte. Das in dem Ausdruck der mittleren Anomalie enthaltene Element (c) wird ausserdem durch Vergleichung mit den Beobachtungen aus dem Grunde eine Verbesserung erhalten, dass in den vorstehenden Rechnungen die vom Mars herrührende Ungleichheit langer Periode übergangen worden ist; auf die übrigen Elemente hat dieser Umstand keine Wirkung.

150.

Es kann interessant sein zu untersuchen, wie viel man in der Bestimmung der mittleren Elemente gefehlt haben würde, wenn man sie zwar nach den hier entwickelten Formeln, aber mit Anwendung der Coefficienten, die die erste Annäherung gegeben hat, berechnet hätte. Aus dem Art. 61 (II) entnehme ich daher die folgenden Werthe

$$a_1 = +808''.60\ ;\quad b_1 = -664''.63$$

$$h = -110.27\ ;\quad k = -\ 22.27$$

und hiemit erhielt ich durch die Ausdrücke der Artt. 145 und 146

$$\Delta\varphi = +6'\ 47''.4$$

$$\Delta\chi = +1^0\ 3'\ 20.6$$

$$\Delta c = -1\ 3\ 48.2$$

$$\Delta i = \quad -48.5$$

$$\Delta\sigma = \quad -5\ 41.8$$

Vergleicht man diese mit den obigen Werthen derselben Correctionen, so ergiebt sich, dass die vollständige Berücksichtigung der Grössen zweiter Ordnung den mittleren Elementen die folgenden Grössen hinzugefügt hat,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi \ldots\ & +6''.2 \\ \Delta\chi \ldots\ & +1'\ 14''.5 \\ \Delta c \ldots\ & -1\ 15.9 \\ \Delta i \ldots\ & -0.1 \\ \Delta\sigma \ldots\ & -10.7 \end{aligned}$$

Dass die Glieder zweiter Ordnung dem wahren (oder mittleren) Werthe der mittleren täglichen Bewegung

$$-0''.0149$$

hinzugefügt hat, geht aus dem Art. 93 hervor. Lässt man bei dieser Rechnung auch in den Ausdrücken des Art. 145 die Glieder zweiter Ordnung weg, so findet man

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= +6'\ 44''.3 \\ \Delta\chi &= +1^0\ 4\ 51.0 \\ \Delta c &= -1\ 5\ 19.3 \end{aligned}$$

und die Unterschiede dieser mit den genauen Werthen sind

$$\begin{aligned} \Delta\varphi \ldots\ & +9''.3 \\ \Delta\chi \ldots\ & -15.9 \\ \Delta c \ldots\ & +15.2 \end{aligned}$$

Der Unterschied in $\Delta\varphi$ ist hier grösser, aber die Unterschiede in $\Delta\chi$ und Δc sind kleiner geworden. Dieses halte ich indess nur für zufällig.

ÜBER EINIGE

VERHÄLTNISSE DES BINOCULAREN SEHENS,

VON

G. TH. FECHNER.

I.

Allgemeine Inhaltsangabe. Nomenclatur.

Die nachfolgende Abhandlung bezieht sich auf verschiedene mehr oder weniger zusammenhängende Verhältnisse des binocularen Sehens. Eine Betrachtung über die sogenannte Identität der Netzhautstellen nimmt darin die erste, der Nachweis eines wechselseitigen Einflusses der Thätigkeit beider Netzhäute die wichtigste Stelle ein, woran sich nebensächlich noch die Untersuchung mancher Gegenstände von minderem Belange geknüpft hat. Ein kurzes Resumé und das Inhaltsverzeichniss zum Schluss der Abhandlung geben darüber nähere Auskunft.

Betreffs der Identität der Netzhautstellen galt es wesentlich nur die Klarstellung einer Frage, die dessen noch einigermassen zu bedürfen scheint, und die Discussion und theilweise Zusammenstellung schon vorliegender Thatsachen, auf welche die Beantwortung Bezug zu nehmen hat (Abschn. 2 und 7). Betreffs des wechselseitigen Einflusses beider Netzhäute enthält diese Abhandlung eine Reihe neuer Thatsachen (Abschn. 11 bis 14), woraus ein neues und, wie ich glaube, nicht unwichtiges Resultat hervorgeht, die Existenz eines Verhältnisses, das ich kurz mit dem Namen eines antagonistischen bezeichne, vermöge dessen die Thätigkeiten beider Netzhäute sich wechselseitig beschränken und Zustände von entgegengesetztem Charakter sich in ihnen auszubilden streben. Ein solches Verhältniss konnte unerwartet erscheinen, nachdem sich bisher blos Anlass geboten hat, von Verhältnissen der Correspondenz, des Consensus, der Sympathie, der Synergie zwischen beiden Augen zu sprechen; indess besteht zwischen den Thatsachen beider Verhältnisse kein Widerspruch, sondern es überträgt sich damit nur auf die Augen, was auch sonst in unserm Körper gilt. Eine Entzündung, ein Krampf, eine Erregung irgend welcher Art kann sich

leicht von einem Theile auf einen andern, der mit ihm im nächsten organischen Zusammenhange steht, übertragen, oder beide gemeinsam ergreifen, nicht minder aber auch dadurch, dass er den einen ergreift, herabstimmend für den andern wirken. Ob das Eine oder Andere, kommt auf die Verhältnisse des Nexus, der Erregung, der Stimmung der Theile an.

Einige Ausdrücke, die ich der Kürze halber in dieser Abhandlung brauchen werde, zeige ich hier vornweg an.

Ich unterscheide differente und disparate Netzhautstellen, erstere als verschiedene Netzhautstellen desselben Auges, letztere als nicht correspondirende Stellen der zwei verschiedenen Augen. Von Eindrücken, die auf correspondirende Stellen fallen, sage ich kurz, dass sie sich binocular decken, und zwar, dass sie sich homogen decken, wenn es gleichartige Eindrücke sind, heterogen, wenn es ungleichartige sind.

II.

Ueber die Frage nach der Identität der Netzhautstellen im Allgemeinen.

Die bekannte Lehre von der Identität der Netzhautstellen hat in neueren Zeiten mehrfache Anfechtungen insbesondere auf Grund der stereoskopischen und Wettstreitsphänomene erfahren, und hinwiederum ihre Vertheidiger gefunden. Es scheint mir, dass, nachdem kein wesentlicher Widerspruch in den Thatsachen vorliegt, eine Verständigung über deren Auffassung leichter sein würde, wenn man der Frage, ob je zwei Puncte beider Netzhäute sich wie identische verhalten, die Frage substituirte, wiefern sie sich als identische verhalten, d. h. wiefern es gleichgültig ist, ob zwei Eindrücke auf einem wirklich identischen Puncte einer und derselben Netzhaut, oder auf zwei sogenannten identischen, lieber sage ich künftig immer correspondirenden, Puncten beider verschiedener Netzhäute zusammentreffen; denn weder wird sich die Uebereinstimmung correspondirender Puncte mit wirklich identischen bezüglich des Erfolges darauf zusammentreffender Eindrücke nach gewissen Beziehungen bestreiten, noch nach anderen Beziehungen behaupten lassen, ohne in Widerspruch mit den Thatsachen zu treten.

Keine bekannte Thatsache hat bisher nach gründlicher Unter-

suchung dem Satze widersprochen, dass je zwei Eindrücke, die auf zwei correspondirenden Netzhautpuncten erfolgen, eben so gut in einen Eindruck verschmelzen, einen Raumpunct in der Erscheinung decken, in jedem Momente nur eine qualitative einfache Resultante der Empfindung geben, als wenn sie auf einem wirklich identischen Puncte derselben Netzhaut zusammentreffen; in dieser Hinsicht werden correspondirende Puncte immer einem identischen gleich gelten können. Und von hieraus bot sich nun freilich leicht die, wie es scheint, oft stillschweigend gehegte Voraussetzung dar, dass die Combination von Eindrücken auf verschiedenen Stellen in jeder Hinsicht dem Zusammentreffen auf einer wirklich identischen Stelle gleich zu achten, überhaupt der Erfolg der Correspondenz mit dem der Identität gleichgeltend sei.

Aber es hindert nichts zu glauben, wenn die Thatsachen uns dazu nöthigen sollten, wie diess wirklich Seitens einer Classe stereoskopischer Thatsachen der Fall ist, dass wir ausser dem einfachen sinnlichen Eindrucke, den wir durch je zwei correspondirende Stellen wie durch eine wirklich identische Stelle erhalten, auch ein in gewissem Sinne unterscheidendes Gefühl haben, wie er zu Stande kommt, oder doch, wie eine combinirte Mehrheit solcher Eindrücke zu Stande kommt, ob durch Identität oder Correspondenz der Netzhautstellen, ein Gefühl, welches nach Erfahrung so oder so ausgelegt werden kann.

Und ferner hindert nichts zu glauben, wozu anderweite stereoskopische Thatsachen uns nicht minder nöthigen, dass die Unterscheidung gegebener Eindrücke verschieden leicht erfolgt, je nachdem ein Eindruck von einem differenten derselben Netzhaut, oder einem disparaten der anderen Netzhaut zu unterscheiden ist.

Und endlich hindert nichts zu glauben, wozu Thatsachen, die ihre weitere Erörterung in dieser Abhandlung selbst finden werden, uns nöthigen, dass die Grösse und Beschaffenheit einer einfachen Resultante aus gegebenen Eindrücken verschieden und durch Mitbedingungen verschieden bestimmt sein könne, je nachdem diese Eindrücke auf correspondirenden Stellen oder auf einer identischen Stelle zusammentreffen.

Was den ersten Punct anlangt, wenn es gleichgültig für die Empfindung wäre, ob verschiedenartige Eindrücke auf zwei Netzhäuten auseinandergehalten sind oder sich auf derselben Netzhaut superponiren, so müssten zwei juxtaponirte stereoskopische Projectionen, die, mit beiden Augen im Stereoskop betrachtet, oder durch Kreuzung der Seh-

axen ohne Stereoskop übereinandergeschoben, bei momentaner, den Einfluss der Augenbewegung ausschliessender Beleuchtung den Eindruck der Körperlichkeit geben, sich auch so über einander zeichnen lassen, dass sie mit einem Auge oder mit zwei Augen in gewöhnlicher Weise betrachtet noch denselben Eindruck der Körperlichkeit geben. Daraus, dass diess unmöglich ist, folgt sehr einfach, dass es irgend eine Relation zwischen den Affectionen beider Netzhäute ist, wovon das stereoskopische Körperlich- und Tiefsehen abhängt, die durch Uebertragung dieser Affectionen von correspondirenden Stellen auf eine identische verloren geht, indem es ausser den räumlichen Relationen, die auf jeder Netzhaut für sich bestehen, auch eine gegenseitige Relation der Eindrücke auf beiden giebt, welche den Erfolg der Wahrnehmung mitbestimmt.

Ganz schlagend tritt diess bei einem neuen stereoskopischen Verfahren von d'Almeida hervor, wovon ich erst eine kurze Notiz*) gefunden habe. Man lässt zwei zu einander gehörige stereoskopische Bilder gleichzeitig auf einen Schirm reflectiren (es ist nicht angegeben wie), so dass sie einander durchschneiden, und sieht dann, wie zu erwarten, mit beiden Augen nur eine Verwirrung. Jetzt richtet man es so ein, dass das eine Auge nur die eine, das andere nur die andere der sich durchschneidenden Projectionen sieht, indem man die Lichtstralen des einen Bildes vor Erzeugung desselben durch ein grünes, die des andern durch ein rothes Glas durchgehen lässt, und Gläser derselben Art respectiv vor das eine und das andere Auge nimmt. Sofort kommt das Relief zum Vorschein.

Was den zweiten Punct anlangt, so erscheinen bekanntlich zwei Kreise von etwas verschiedenem Durchmesser, deren jeder mit einem Auge gesehen wird, bei stereoskopischer Combination als ein einziger Kreis von einem mittleren Durchmesser, und lassen sich zwei in ein Auge fallende Parallellinien mit zwei andern etwas anders distanten Parallellinien, welche in das andere Auge fallen, zur stereoskopischen Coincidenz bringen u. s. w., ungeachtet nicht alle Theile beider Kreise, nicht beide Parallelen zugleich auf correspondirende Stellen beider Netzhäute fallen können.

Die neuesten Untersuchungen über dieses Verhältniss rühren von Panum**) und von Volkmann***) her. Nach Panum beträgt die

*) Ausland. 1859. p. 480 nach den Times.

**) Panum, physiol. Vers. p. 62. 94.

***) Gräfe, Archiv f. Ophthalmol.

kleinste Disparität zweier parallelen Verticallinien 17- bis 34mal so viel als die Differenz, wo nur eben noch Unterscheidung möglich ist. Er hat geglaubt, nachweisen zu können, dass jeder Punct einer Netzhaut nicht blos einen correspondirenden Punct, sondern einen ganzen correspondirenden Empfindungskreis in der andern Netzhaut habe, so dass, was auf zwei solche correspondirende Empfindungskreise fällt, nach rein anatomisch-physiologischen Gründen nicht unterschieden werden könne, welchem jedoch Volkmanns Versuche entschieden widersprechen, wonach es nur auf abgeänderte, durch Erziehung und Gewöhnung des Auges mitbestimmte, Aufmerksamkeitsverhältnisse ankommt, um das, was einmal einfach verschmilzt, und nach Panum immer verschmelzen sollte, weil die anatomisch-physiologischen Bedingungen dieselben bleiben, ein anderes Mal doppelt und getrennt zu sehen.

Sei es nun, dass man diese grössere Schwierigkeit, disparate als differente Eindrücke zu unterscheiden, blos auf Rechnung der Gewöhnung und Erziehung schreibt, oder auch etwas Angeborenes dabei mit wirksam denken will, was selbst nach der gründlichen Untersuchung Volkmanns noch nicht ganz entschieden sein dürfte, so wird man immer anerkennen müssen, dass, wenn zwei Eindrücke auf disparaten Stellen erfolgen, nicht in jeder Hinsicht derselbe Effect in der Empfindung (unmittelbaren Wahrnehmung) vorhanden sein kann, als wenn sie auf entsprechend differenten erfolgten; denn sonst könnte auch das Urtheil nicht verschieden dadurch bestimmt werden, da ein verschiedenes Urtheil einer verschiedenen sinnlichen Unterlage bedarf; auch würde die Aufmerksamkeit nicht einer verschiedenen Hülfe zur Unterscheidung bedürfen, wie es doch der Fall ist. Wenn aber Eindrücke, die auf disparate Stellen fallen, anders empfunden werden als solche, die auf gleich differente fallen, so liegt darin von selbst eingeschlossen, dass ein Eindruck von einer correspondirenden Stelle nicht gleichgültig auf die zugehörige übertragen werden, diese also nicht den vollen Werth einer identischen Stelle dafür haben kann; denn wäre es der Fall, so müsste die Uebersetzung der disparaten Stelle in die ihr correspondirende differente den Erfolg ungeändert lassen, der sich doch thatsächlich damit ändert.

Was den dritten Punct anlangt, so bieten sich von vorn herein die bekannten Wettstreitsphänomene als etwas für das Zusammentreffen von heterogenen Eindrücken auf correspondirenden Stellen Charakte-

ristisches dar, was nicht so beim Zusammentreffen auf einer wirklich identischen Stelle Platz greift. Hiebei ist wohl zu beachten, dass diese Phänomene doch keineswegs dem oben aufgestellten Satze widersprechen, dass zwei Eindrücke auf correspondirenden Stellen so gut eine qualitative einfache Resultante in der Empfindung geben, als wenn sie auf einer wirklich identischen Stelle zusammenträfen; denn, wie sehr auch die Resultante durch den Wettstreit wechsele, so bleibt sie doch in jedem Augenblicke des Wettstreits eine einfache, nur dass die einfache Qualität der Empfindung in der Zeit wechselt. Auch kommen unter den subjectiven Farbenphänomenen Beispiele vor (so im Farbenabklingen und der Farbenoscillation mancher Nachbilder), wonach einmal gemachte Eindrücke auch auf einer und derselben Netzhautstelle ihren Charakter wechseln können; es bleibt nur immer gewiss, dass der Wettstreit auf correspondirenden Stellen leichter und nach andern Regeln (auch zwischen objectiven Eindrücken) erfolgt, als das, was man etwa auf einer wirklich identischen Stelle damit vergleichen kann.

Allgemein gilt, dass Eindrücke, welche auf correspondirenden Stellen der Netzhaut gemacht werden, eine Resultante der Empfindung geben, welche von der Relation dieser Eindrücke auf den correspondirenden Stellen zu einander einerseits, von ihrer besondern Relation zur Nachbarschaft andrerseits, in einer Weise mit abhängig ist, welche beim Zusammentreffen derselben Eindrücke auf einer identischen Stelle nicht statt finden kann, weil hier die Eindrücke statt in veränderlicher Vertheilung zwischen zwei Stellen nur in einer identischen Verbindungsweise zusammentreffen, und statt eines verschiedenen nur ein gemeinsames Verhältniss zur Nachbarschaft haben können.

In der That seien in Summa zwei Eindrücke A und B gegeben, so können diese auf einer wirklich identischen Stelle stets blos zu $A + B$ verfliessen und nur dasselbe gemeinsame Verhältniss zur Nachbarschaft haben. Hingegen können sie sich zwischen correspondirenden Stellen so vertheilen, dass auf die eine Null, auf die andre $A + B$, oder dass auf die eine A, auf die andre B, oder dass auf die eine $\frac{A}{2}$, auf die andre $\frac{A}{2} + B$ u. s. f. kommt; ferner kann der Eindruck auf der einen Stelle in Contrast zur Nachbarschaft stehen, indess der andere sich gleichförmig in derselben fortsetzt. Nun kann man vielleicht a priori bezweifeln,

dass hievon wirklich Unterschiede der Empfindung abhängen können; inzwischen lassen die schon seit längerer Zeit bekannten Thatsachen, die ich im 7. Abschnitt zusammenstelle, und die neuen Thatsachen, die ich vom 11. Abschnitt an mittheile, keinen Zweifel hierüber bestehen.

Auch die grössere Leichtigkeit, mit welcher Wettstreitsphänomene auf correspondirenden Stellen als auf einer identischen Stelle zu Stande kommen können, lässt sich davon abhängig machen, dass Umstände, welche die Empfindlichkeit für die eine und andre Farbe abändern, sich leichter ungleich für zwei verschiedene Farben auf correspondirenden Stellen als auf einer wirklich identischen Stelle wirksam erweisen können.

Obwohl diese Erörterung nichts thatsächlich Neues lehrt, schien sie mir doch aus dem einfachen Grunde nicht überflüssig, weil sie noch nicht statt gefunden hat, und weil sie auf die Nothwendigkeit hinweist, die gesetzlichen Verhältnisse genauer zu studiren, nach welchen die Empfindung sich abändert, je nachdem Eindrücke sich auf correspondirenden Stellen zweier Netzhäute oder auf einer und derselben Stelle derselben Netzhaut begegnen. Im Folgenden wird man mehrere Beiträge zur Erfüllung dieser Aufgabe finden, die doch den grösseren Theil des Feldes noch für genauere Bestimmungen offen lassen.

In Gemässheit der vorigen Erörterung werde ich übrigens auch für die Folge Correspondenz und Identität streng unterscheiden, indem ich unter einer identischen Stelle stets eine mit sich selbst zusammenfallende Stelle derselben Netzhaut, unter correspondirenden Stellen solche Stellen beider verschiedener Netzhäute, welche zugleich anatomisch correspondiren und in den S. 341 angegebenen Beziehungen physiologisch einer identischen gleich gelten können, verstehe.

III.

Einschaltungsweise Schilderung eines Zustandes sog. verdorbener Augen.

Bezüglich der eigenen Versuche hätte ich Einiges über den Zustand meiner Augen, als welche zu den Versuchen dienten, vorauszuschicken. Hiezu würden für den vorliegenden Zweck wenige Bemerkungen hinreichen; doch benutze ich diese Gelegenheit, eine etwas ausführlichere Schilderung dieses hauptsächlich durch optische Versuche hervorgerufenen Zustandes einzuschalten, da sich, wie mir scheint, an

manche Verhältnisse desselben auch ein allgemeineres ophthalmologisches Interesse knüpft, und Mancher, der sich wie ich die Augen mit Versuchen verdorben hat und noch verderben wird, diesen und jenen nützlichen Wink darin finden dürfte.

Meine Augen sind in Folge einer, durch starke Anstrengung und Ueberreizung hervorgerufenen, mehrjährigen Augenkrankheit (hauptsächlich von Ende 1839 bis Ende 1843 dauernd) noch in gewissem Grade krankhaft afficirt geblieben. Oefteres Sehen durch Farbengläser in die Sonne, Beobachtung feiner Theilungen in die Dämmerung hinein waren, wie es scheint, Hauptursachen des Uebels. Die Hauptsymptome desselben bestanden in Lichtscheu, welche zuletzt so weit ging, dass das Licht vollständig ausgeschlossen werden musste, und lebhaftem Lichtflackern im Auge. Die Lichtscheu ist jetzt so weit gemindert, dass mir nur Glanzlichter noch äusserst lästig sind, indess ich gleichförmiges Tageslicht ganz gut vertrage. Eben so ist das Lichtflackern sehr gemindert, aber nicht verschwunden und gestaltet sich des Näheren wie folgt.

Schon im gesunden Zustande der Augen kann man bei Schluss derselben einen sparsamen durch das schwarze Gesichtsfeld zerstreuten Lichtstaub bemerken; jetzt ist mein ganzes schwarzes Gesichtsfeld bei Schluss der Augen mit einem gedrängten lebhaft flackernden Lichtstaub erfüllt,*) worin ich bei einiger Aufmerksamkeit zwei schwach wirbelnde Stellen erkenne. Im Uebrigen ist das Flackern unregelmässig, die Elongationen des Flackerns je nach dem Reizzustande der Augen grösser oder kleiner, die Periode der Oscillationen wegen der Unregelmässigkeit der

*) Dieses flackernde Licht ist der Rest einer eigenthümlichen Erscheinung und gleichsam durch Zerfallen derselben hervorgegangen, welche ich während meiner Augenkrankheit hatte, wovon ich weder einen anatomischen noch physiologischen Grund anzugeben weiss, noch wozu ich analoge Erfahrungen irgendwo angeführt gefunden, und die doch während meiner Krankheit ganz continuirlich bestand. Bei geschlossenen Augen zeigte sich das Gesichtsfeld mit einem ganz regelmässigen Netzwerk aus quadratischen Maschen (die Diagonalen vertical und horizontal) durchzogen, dieses Netzwerk aber nicht aus continuirlichen leuchtenden Linien, sondern aus sich kreuzenden Reihen leuchtender discontinuirlicher in zitternder Bewegung befindlicher Kügelchen gebildet, wie ich mich zu erinnern glaube, jede Seite einer Masche aus drei (höchstens vier) solcher Kügelchen. Bei zunehmender Reizung wurden die Bewegungen der Kügelchen heftiger, unregelmässiger, das Licht stärker, und sie flossen zum Theil flammenähnlich zusammen, wodurch das Netzwerk undeutlich wurde; dasselbe stellte sich aber an Tagen minderer Reizung wieder in der alten Regelmässigkeit her. Noch jetzt sehe ich manchmal Spuren dieses Netzwerks in dem Lichtflackern auftauchen.

durcheinandergehenden Bewegung schwer zu bestimmen, aber jedenfalls viel schneller als die des Pulses, und unabhängig davon. Früh Morgens beim Aufwachen ist das Flackern lebhafter als Abends beim Zubettegehen, und manchmal tagelang andauernd verstärkt, wenn ich die Augen beim Gebrauche nicht hinreichend geschont habe. Bei offenen Augen macht es sich auf hellem gleichförmigen Grunde, wie dem Himmel oder einer Wand, nur noch undeutlich als eine unruhige Bewegung geltend. In der Dämmerung erscheint es bei offenem Auge vielmehr wie ein Flackern schwarzer Puncte im Lichten, als umgekehrt. Dabei sehe ich, ehe noch die Sterne erscheinen, und wenn sie zu erscheinen beginnen, an jeder Stelle des Himmels, die ich mit den Augen fixire, einen mit einer Wirbelbewegung umgebenen festen Lichtpunct, der mich anfangs mit dem Scheine eines objectiv vorhandenen Sternes getäuscht hat; am Tageshimmel erscheint mir ein solcher ebenfalls, nur minder deutlich, im Centrum der Wirbelbewegung. Auffallenderweise aber sehe ich bei ganz finsterm Himmel oder bei geschlossenen Augen, wenn nicht die Augen gerade besonders gereizt sind, wo sich auch leicht ein leuchtendes Fleckchen in Mitte des Gesichtsfeldes einstellt, nichts der Art deutlich.

Ich vermag nicht anhaltend zu lesen, ohne die Augen angegriffen zu fühlen, indess anhaltendes Schreiben mir möglich ist. Bei einbrechender Dämmerung, wenn Andre noch lange bequem lesen und schreiben, muss ich schon damit aufhören. Habe ich zu anhaltend oder in die Dämmerung hinein gelesen, so nimmt die Reizbarkeit des Auges mit dem Gefühle der Reizung zu, ich kann dann Glanzlichter noch weniger als sonst vertragen; das Lichtflackern im geschlossenen Auge verstärkt sich und die kleinen Oscillationen desselben gehen in grössere unregelmässigere mehr wirbelnde Bewegungen über. Das Lesen, und bei stärkerer Reizung selbst das Schreiben, muss ich dann tage- oder wochenlang unterlassen, und vermag nur sehr langsam und allmälig den Augen, in nachher anzugebender Weise, wieder aufzuhelfen. Ein sehr kurzer Gebrauch der Augen über die rechte Gränze, die ich schwer sicher einzuhalten vermag, hat mich stets mit längerer Unthätigkeit gestraft.

Früherhin habe ich oft — und leider sind solche Zustände sehr oft bei mir eingetreten — durch Ruhe, gänzliche Unbeschäftigung oder ganz leichte Beschäftigung der Augen, blosses Spazierengehen, selbst eine Reise, die Augen wieder zu kräftigen gesucht; es ist mir aber nie ge-

lungen, so lange ich damit fortfahren mochte; eben so wenig, wenn ich die Augen wieder allmälig dadurch an den Gebrauch zu gewöhnen suchte, dass ich ihn sparsam in gewöhnlicher Weise einleitete. Dagegen hat eine eigene Art Uebung, zwar auch immer nur sehr allmälig, doch bisher jedesmal, die Augen in den Zustand zurückgebracht, bei dem ich mich zufriedengestellt halten muss.

Das Wesentliche besteht darin, anfangs sehr langsam, bei zunehmender Kräftigung des Auges schneller, grosse, beliebig krumme oder gerade, Züge, am liebsten mit Rothstift, auf Papier zu machen, und während sie gezogen werden, dieselben mit starker Intention des Auges zu verfolgen; auch wenn das Schreiben, wie gewöhnlich, noch angeht, nur ganz langsam zu schreiben, und jedem Zuge des Buchstabens, während er geschrieben wird, im kleinsten Detail langsam und aufmerksam zu folgen; im Fortschritt der Uebung diess auch mit den Buchstaben eines Drucks im Lesen vorzunehmen, so aber, dass nicht auf den Sinn der Worte, sondern eben nur auf den Zug des Buchstabens geachtet wird. Man sollte zwar meinen, dass diese Intention im Gebrauche der Augen sie nur noch mehr anstrengen müsste; ich finde hingegen, dass sie sich bei öfterer Wiederholung solcher Uebung durch mehrere Tage allmälig wieder kräftigen, und das Verfolgen der Buchstaben nach und nach schneller bis zum gewöhnlichen, anfangs nur wort- und zeilenweise vorzunehmenden, Lesen geschehen kann, dass überhaupt, mit je mehr Spannung und Fixation der Augen ich die Eindrücke aufnehme, so besser solche vertragen werden. Während aber langsames Verfolgen deutlicher Züge mit starker Intention die Augen kräftigt, werden sie durch jeden zerstreuten Gebrauch, wobei die Eindrücke in schnellem Wechsel doch erkannt werden sollen, als schnelles Ueberfliegen einer Schrift, Suchen nach etwas, stark angegriffen. Auch der Versuch, kleine Schrift mit Anstrengung zu lesen oder unleserliche Schrift bei gewöhnlicher Sehweite zu entziffern, ist sehr angreifend für meine Augen, wogegen ich den Versuch, unter möglichster Intention der Sehkraft die aus grossen Buchstaben gebildete Schrift der Firmen beim Durchgange durch die Strassen aus der Ferne zu lesen, Blätter im Laubwerk u. dgl. aus der Ferne zu erkennen und ihre Form zu unterscheiden, zu den sehr guten Uebungen des Auges in den Perioden, wo es angegriffen ist, zähle. Dieser Unterschied zwischen dem Gebrauche des Auges für nahe und ferne Gegenstände ist bei mir sehr entschieden, und scheint mir beach-

tenswerth. Wohlthätig im Gefühle ist mir der Blick in den blauen Himmel, wenn auch nicht auffällig wirksam als Uebung zum Wiedergebrauche der Augen. Gar nicht vertrage ich directen Sonnenschein in der Stube beim Lesen oder Schreiben, selbst wenn er durch Rouleaux gedämpft ist, das Papier vor mir direct nicht trifft und von der abendlichen Sonne herrührt, also keine sehr starke Helligkeit Schuld der Unleidlichkeit sein kann, die ich mir bis jetzt noch nicht recht zu erklären weiss.

An einer starken Intention im Gebrauche der Augen hing auch die Wiederherstellung von meiner Augenkrankheit, insoweit sie überhaupt statt gefunden hat, namentlich von dem Hauptsymptom derselben, der Lichtscheu. Aerztlicherseits hatte man mir immer empfohlen, meine Augen ja nicht zu sehr dem Lichte zu entziehn, vielmehr allmälig wieder an einen höheren Grad desselben zu gewöhnen; auch bedurfte es dieses Rathes nicht erst, da der Trieb, Helligkeit zu geniessen, ohnehin stark genug war; aber anstatt den Augen mit Gewöhnungsversuchen, wobei ich das Licht doch immer nur mit Scheu und passiv aufnahm, aufzuhelfen, brachte ich sie immer mehr dadurch herab, so dass ich endlich über ein halbes Jahr nur noch das absolute Dunkel vertrug. Wiederholte starke Moxen am Rücken, thierischer Magnetismus, mancherlei Augenwässer, wurden gleich fruchtlos dagegen angewendet. Ohne daran zu denken, dass hiedurch etwas für das Auge gewonnen werden könne, wagte ich es doch einige Male, in einem mässigen Lichte einen Blick auf das Gesicht einer Person, einen Blumenstrauss u. dgl. zu werfen, so jedoch, dass ich die Augen schnell wieder schloss, noch ehe das Gefühl der Reizung eintrat, was stets Verschlimmerung nach sich zog, indem ich fand, dass es einige Augenblicke währte, ehe sich dasselbe einstellte. Da ich keinen Nachtheil von dem Versuche bemerkte, fing ich an, ihn öfter zu wiederholen, und bald diess, bald das anzusehen, indem ich dabei die wenigen Augenblicke, die es mir gestattet war, das Auge zu öffnen, bevor das Reizgefühl eintrat, möglichst gut zu nutzen suchte, und mit einer Art Gier die Gegenstände, die ich betrachten wollte, gleichsam mit den Augen verschlang, diese theils weit aufriss, theils schnell abwechselnd öffnete und schloss, indem ich hiedurch den Zeitraum der Betrachtung etwas zu verlängern suchte, immer aber die Augen in grösstmöglicher Spannung dabei erhielt. Es kam mir vor, dass das Auge durch solche Versuche eher gestärkt als geschwächt

würde; obwohl ich anfangs nicht recht ins Klare darüber kommen konnte. Eines Morgens fing ich an, derartige Versuche methodisch hinter einander anzustellen, indem ich in die Kammer ein mässiges Dämmerlicht einliess, und die Perioden der Oeffnung des Auges mit gespanntem Blick auf einen Gegenstand durch möglichste Unterhaltung der Spannung immer mehr zu verlängern strebte. Nach mehrmaliger Wiederholung gelang es mir auf einmal, die Augen dauernd offen zu behalten, mit dem Gefühle, dass sie von nun an das Licht vertrügen. Ich liess nun etwas mehr Licht in die Kammer, wiederholte die Versuche u. s. f. So ist eine jahrelange Lichtscheu grösstentheils in einer kurzen Stunde, und ziemlich vollständig binnen einigen Wochen gehoben worden. Der Gebrauch der Augen zum Lesen ward mir aber erst viel später wieder möglich.

Nach dieser Wiederherstellung war der Zustand meiner Augen mehrere Jahre lang gut genug, dass ich das Lesen selbst stundenlang anhaltend vertrug, und der flackernde Lichtstaub war wieder ziemlich sparsam geworden; seit einigen Jahren aber besteht nach einer Wiederverschlimmerung der Zustand, wie ich ihn oben beschrieben habe, ohne dass ich den Augen anders als palliativ wieder aufzuhelfen vermag, wenn zeitweise stärkere Verschlimmerungen eintreten.

Mein linkes Auge fühlt sich auch in der besten Zeit immer noch etwas krankhaft gereizt, was beim rechten nicht der Fall ist, das doch undeutlicher sieht, als das linke. Auf beiden Augen hat Prof. Ruete in der Mitte der Pupille einen kleinen Kapselstaar erkannt, der sich jedoch seit Jahren nicht zu vergrössern scheint, und mir, ohne dass ich freilich einen andern Vergleich deshalb anstellen kann, als nach Erinnerung an die Helligkeit, welche mir meine früher ganz gesunden Augen gewährten, die Tageshelligkeit nicht zu mindern scheint; doch wahrscheinlich Grund ist, dass ich Beschäftigung mit den Augen bei Anbruch der ersten Dämmerung so wenig vertrage.

Meine deutlichste Sehweite unter gewöhnlichem Gebrauche beider Augen beträgt circa 1 Fuss; das rechte Auge sieht aber in keiner Entfernung Schrift so deutlich als das linke. Entfernte schmale Gegenstände sehe ich, auch mit blos einem Auge, stets doppelt, und die Irradiationssäume grösserer fern gesehener Gegenstände sind sehr breit. Diese Erscheinung scheint immer mehr zuzunehmen.

Nachbilder treten sehr leicht, und oft lästig, bei mir ein.

IV.

Allgemeine Vorbemerkungen zu den Versuchen. Photometrische Verhältnisse der zu den Versuchen gebrauchten dunklen und farbigen Gläser.

Nach dem, im vorigen Abschnitte geschilderten, krankhaften Zustande meiner Augen erscheinen dieselben im Allgemeinen wenig geeignet zu Versuchen, sei es über objective oder subjective Gesichtsphänomene, theils weil sie weder eine anhaltende Fortsetzung der Versuche, noch starke Lichtreize vertragen, theils weil die Abnormität des Sehvermögens abnorme Verhältnisse in die Erscheinungen einzuführen drohte. In der That habe ich aus ersterem Grunde die selbst angestellten Versuche sehr auseinander ziehen, und manche Particularitäten, deren Feststellung anhaltende, oft wiederholte, Versuche oder starke Lichtreize erfodert haben würde, dahinstellen müssen, aus beiden Gründen aber so viel wie möglich andre Beobachter mit zugezogen, um theils die eigenen Augen nicht zu sehr anzugreifen, theils die mit den eigenen Augen gefundenen Erscheinungen zu controliren; in welcher Hinsicht ich den Professoren Funke, Ruete, Volkmann, dem Dr. Feddersen, und den Studiosis der Mathematik und Physik Grabau, Koch und Zöllner besondern Dank schuldig bin. Auch sind einige Ergebnisse gelegentlich von Prof. Hankel, dem ältern und jüngern Prof. Weber (E. H. und Th.), dem Stud. med. Kohlschütter, den Professoren Dove aus Berlin und Welcker aus Giessen (jetzt in Halle), so wie einigen Andern bei zufälliger Anwesenheit constatirt worden.

Freilich kann die Zuziehung noch so vieler verschiedener Beobachter nicht die consequente Durchführung der Versuche durch einen und denselben Beobachter ersetzen. Wenn nun die folgende Untersuchung in dieser Hinsicht manche Mängel darbieten wird, darf ich unstreitig Entschuldigung in Betracht des Grundes derselben hoffen, um so mehr als ich es nach meinen frühern Erfahrungen schwer bei mir selbst zu entschuldigen vermag, mich von Neuem auf dieses gefährliche Gebiet gewagt zu haben, und so weit darin gegangen zu sein.

Glücklicherweise hat sich bei der Controle durch Andre doch gezeigt, dass die angegebenen krankhaften Eigenschaften meiner Augen bei der Classe im Ganzen sehr einfacher Versuche, um die es sich im Folgenden handeln wird, nicht wesentlich störend gewesen sind, wi-

drigenfalls ich die ganze Untersuchung würde haben fallen lassen müssen, dass aber bezüglich vieler particulärer Puncte überhaupt erhebliche individuelle Abweichungen vorkommen, welche die Wiederholung der Versuche durch verschiedene Beobachter ohnehin nöthig machten. Zumeist nämlich kam es bei diesen Versuchen nur darauf an, Helligkeits- und Farbenunterschiede zu beurtheilen, wofür meine Augen so empfänglich geblieben sind, als früher, und, wie ich nach den folgenden Versuchen selbst habe urtheilen können, beide gleich empfänglich sich verhalten. Die grosse Leichtigkeit, mit welcher subjective Nachbilder sich bei mir einstellen, ist sogar ein Vortheil bei manchen Versuchen gewesen, wo es sich um subjective Nachfarben und damit Zusammenhängendes handelte, indem sie ein deutlicheres und leichteres Hervortreten derselben mitführte.

Bei der Wiederholung der Versuche durch Andre habe ich es zur Regel gemacht, stets nur den Punct, auf den die Aufmerksamkeit vom Andern zu richten, im Allgemeinen zu bezeichnen, aber niemals die Richtung des von mir zuvor erhaltenen oder erwarteten Resultats zuvor anzugeben, also zwar anzugeben, dass es sich z. B. um einen Helligkeits- oder Farbe-Unterschied dabei handle, ohne aber anzugeben, dass es eine stärkere oder schwächere Helligkeit oder Färbung, oder welcherlei Färbung es sei, was hier oder da zu erwarten, wodurch das Resultat dieser Controlen um so unzweideutiger wird. Auch habe ich nie versäumt, ausser den bestätigenden Ergebnissen die negativen oder einander widersprechenden anzuführen, wo solche erhalten wurden, um nicht die Bestätigungen mit falschem Gewicht erscheinen zu lassen. Dass aber bezüglich mancher der Phänomene, um die es sich folgends handeln wird, bei verschiedenen Personen verschiedene Erfolge eintreten, liegt in der Natur derselben, als zumeist von der Classe der sog. subjectiven Phänomene, da der Grad und die Stimmung der Empfindlichkeit des Beobachtungssubjectes hiebei ein wesentlicher Factor des Erfolges ist, was aber doch nicht hindert, dass sich auch in dieser Classe von Erscheinungen allgemeine Gesetzlichkeiten herausstellen.

Das Zimmer, worin meine eigenen Beobachtungen und zum Theil auch die Wiederholungen derselben durch Andre geschahen, hat nur ein Fenster, welches gegen Norden gelegen ist. Der Beobachtungstisch steht unmittelbar vor diesem Fenster, so dass über denselben hinweg durch dasselbe zu sehen ist; und es ist, wo nichts Andres bemerkt ist,

vorausgesetzt, dass die Vorderseite des an dem Tische stehenden und sein Object auf dem Tische betrachtenden Beobachters dem Fenster zugewandt ist, so dass beide Augen einer gleichen Beleuchtung unterliegen.

Bei vielen Versuchen wurde Verdunkelung der Augen, oder eines derselben, mit grauen Plangläsern angewendet, welche man jetzt überall bei Opticis vorräthig findet, und wovon ich ein Sortiment von verschiedenen photometrisch bestimmten Helligkeitsgraden zur Disposition habe. Ganz farbefreie graue Gläser findet man freilich kaum, indem sich auch bei solchen, die man als grau kauft, und die obenhin blos grau scheinen, doch bei genauerer Untersuchung meist eine schwache Färbung erkennen lässt; doch kommt die geringe Färbung, welche die von mir angewendeten Gläser noch zeigen, für die folgenden Versuche nicht wesentlich in Betracht.

Die Gläser sind aus Paris bezogen, und haben die Form und Grösse von Brillengläsern. Ich habe sie mit einer schwarzen Messingfassung und mit Stielen versehen lassen, um sie bequem handhaben zu können, und möglichst vor Verunreinigung zu schützen. Zu manchen der folgenden Versuche, wo es bald Gläser einzeln, bald superponirt anzuwenden gilt, lassen sich dieselben, eins vor das andre, mittelst ihrer quadratischen Messingfassung in ein vor das Auge zu nehmendes Gestell mit Seitenfugen einsetzen, so dass eine feste, leicht zu handhabende, und leicht wieder zu trennende oder zu wechselnde Combination entsteht. Auch ist ein Brillengestell mit solcher Einrichtung vorhanden, dass beliebige dunkle Gläser einzeln vor die Oeffnung gesetzt und gewechselt werden können, für den Fall, dass man die anders beschäftigten Hände nicht zum Halten der Gläser anwenden kann. Ein etwas unterhalb und vor dem Brillenringe jeder Seite angebrachter kleiner Vorsprung mit einer verticalen Durchbohrung, in welche der Stiel des Glases eingesetzt wird, entspricht diesem Zwecke.

Das gesammte Sortiment grauer Gläser, was zu den folgenden Versuchen diente, enthält 19 Stück, von denen das hellste 824 Tausendtheile, das dunkelste 71 Tausendtheile des auffallenden Lichts durchlässt, wozu noch ein Paar dunklerer Gläser gefügt ist, die eine zu stark bläuliche Färbung haben, um den Namen grauer Gläser noch eigentlich zu verdienen, und sich genau photometrisch bestimmen zu lassen; auch ist die, jedenfalls etwas aber nicht viel unter das dunkelste graue Glas zu setzende, photometrische Zahl, für je eins beider bläulicher Gläser, nur

ungefähr nach der so gut als möglich hergestellten Aequivalenz mit einer photometrisch bestimmten grauen Combination zu 63 bestimmt.

Hier folgt das Verzeichniss sämmtlicher angewandten grauen Gläser, bezeichnet durch ihren photometrischen Werth, nach der Reihe zunehmender Dunkelheit, unter Beifügung der Farbennüance, welche sich noch daran erkennen liess. Die Zahlen bedeuten überall, wie viel Stralen das betreffende Glas von 1000 senkrecht auffallenden Stralen durchlässt, und mit diesen Zahlen, unter denen die Gläser hier aufgeführt sind, werden sie auch künftig stets bezeichnet werden.

Photometrische Zahlen und Farbennüancen der grauen Gläser.

824 795	grünlich-bläulich.	400 394	grünlich.
752 744	violet-röthlich.	233 233 205 205	röthlich-violet.
611	fast rein grau.		
571	bläulich.	145 145	bräunlich.
562 562 537	fast rein grau.	90 71	bräunlich.

Hiezu noch die stark bläulichen Gläser 63.

Von den doppelt vorkommenden Gläsern 562, 233 und 205 ist blos eins photometrisch bestimmt, und das andre durch Schätzung nach dem Augenschein dem andern gleich gefunden. Das Glas 400 ist auch nur durch Schätzung bestimmt, sofern es nach dem Augenschein ein Minimum heller als das photometrisch bestimmte 394 war. Die durch Klammern vereinigten Gläser gehörten käuflich zusammen, zeigen aber doch, wie man sieht, meist noch photometrische Differenzen, die sich übrigens auch bei genauer Prüfung schon mit blossen Augen erkennen liessen.

Die vorige Reihe enthält grosse Lücken, die ich zur Zeit der Versuchsanstellung nicht mit einfachen Gläsern auszufüllen vermochte, da

ich keine hinreichend farbefreien vorfand; doch bedarf es für die meisten folgenden Versuche überhaupt nur weniger Abstufungen und die fehlenden Zwischenstufen liessen sich überdiess durch Combination mehrerer einfachen Gläser nach unten angegebenem Princip genüglich ausfüllen. Mit Ausnahme der Versuche des II. Abschnitts, wo eine grössere Vollständigkeit nöthig ward, sind fast alle folgende Versuche blos mit den Gläsern 752, 744, 611, 400, 394, 145, 115, 90, 71 und 63 angestellt, die mir anfangs allein zu Gebote standen.

Für die photometrische Bestimmung sämmtlicher grauen Gläser, ohne welche einem Theile der nachfolgenden Versuche alle Bestimmtheit abgegangen sein würde, bin ich der Gefälligkeit und Genauigkeit des Prof. Hankel verpflichtet. Die verzeichneten Zahlen können nach der Schärfe, welche die von ihm eingeschlagene Methode zulässt, und der unten anzuführenden Controle nicht leicht bis zu 10 Einheiten auf die Zahl gehen, wobei man sich zu erinnern hat, dass das volle Licht = 1000 gesetzt ist, eine Schärfe, die sich noch viel weiter würde haben treiben lassen, wenn nicht die Färbung der Gläser störend bei der Bestimmung gewesen wäre, übrigens mehr als hinreichend für das ist, was die folgenden Versuche fodern.

Ueber den Apparat und die Methode, welche zur Bestimmung dienten, verspricht Hankel selbst in den Berichten der Gesellschaft nähere Mittheilung zu machen, nachdem die von ihm beabsichtigte specielle Untersuchung der Bedingungen der Genauigkeit der Methode geführt sein wird. Vorläufig darüber Folgendes:

Der Apparat besteht wesentlich in der Combination eines achromatisirten Bergkrystallprisma's A mit einem Nicol'schen Prisma B, welche hinter einander, gegen einander drehbar, in einem Rohre angebracht sind, das vorn mit einer Deckplatte verschlossen ist, in der sich, bei einfachster Einrichtung, zwei parallele schmale Spalten neben einander befinden. Diese zwei Spalten geben beim Hindurchsehen durch das Rohr nach einer weissen Fläche 4 Bilder, welche gleich hell sind, wenn die Hauptschnitte von A und B um 45^0 gegen einander geneigt sind, aber ungleich hell werden, wenn man eine der Spalten mit einem der dunkeln Gläser verdeckt. Es wird nun, während diese Ungleichheit besteht, auf die Helligkeit der beiden (durch angemessene Stellung des Bergkrystallprisma im Rohre zur Berührung gebrachten) mittlern Bilder geachtet, und durch Drehung des Nicols, deren Grösse am Apparat messbar ist, die Gleichheit der beiden Bilder hergestellt. Das Verhältniss, in welchem das Licht durch das Glas geschwächt ist, ist dann nach bekannten Principien durch das Quadrat der Tangente des Winkels $45^0 - \omega$ gegeben, wenn ω der Winkel ist, um welchen die

Drehung von jener Ausgangslage, bei der ohne Glas die Gleichheit der Bilder bestand, erfolgen musste, um die Gleichheit wiederherzustellen. Um einen etwaigen Irrthum im Ausgangspuncte der Drehung und andre Ungleichheiten, welche mit der Lagenverschiedenheit der Bilder in Beziehung stehen könnten, zu compensiren, ward das dunkle Glas einmal vor der rechten, das andremal vor der linken Spalte angebracht, die Differenz der Winkel, auf welche der Apparat beidesfalls eingestellt werden musste, um die Gleichheit der Bilder herzustellen, halbirt, und dieser Mittelwerth als ω in Rechnung gebracht.

Anstatt die Bilder hell in dunklem Grunde zu beobachten, wie hier angegeben, ist es noch zweckmässiger, die Bilder dunkel in hellem Grunde zu beobachten, wozu eine, dem Sachverständigen sich leicht von selbst darbietende, etwas abgeänderte Einrichtung des Röhrendeckels dient, ohne dass sich übrigens das Princip des Verfahrens und die Rechnung ändert. Die obigen Masszahlen sind mittelst dieser, viel grössere Empfindlichkeit gewährenden, Einrichtung gewonnen.

Jedes Glas ist im Allgemeinen durch 6 Ablesungen nach jedesmal neuer Einstellung bestimmt, einige auch in dieser Weise doppelt an verschiedenen Tagen. Die Ablesungen auf jeder Seite weichen zumeist nur um wenige Zehntheile eines Grades von einander ab; da aber die Gleichheit der Bilder in Betracht der Farbentiance der Gläser etwas Zweideutiges behält, daher an verschiedenen Tagen, bei verschiedener Beleuchtung, von verschiedenen Beobachtern etwas verschieden beurtheilt werden kann, so kommt hiedurch eine kleine Unsicherheit in das Mass, welche sich, wenn es auf haarscharfe Genauigkeit ankäme, durch ein Mittel aus vielen Beobachtungen unter abgeänderten Umständen beseitigen lassen dürfte; übrigens doch nur kleiner Ordnung war, wie sich in verschiedener Weise constatiren liess. Hier folgen beispielsweise die Ablesungen für drei Gläser, nämlich 571, 145 und 115, welche zweimal an verschiedenen Tagen bestimmt wurden, woraus man unmittelbar zugleich das Dasein und die Geringfügigkeit dieser Unsicherheit übersieht. Oben ist die mittlere, unten sind die einzelnen photometrischen Zahlen angegeben, welche aus diesen Beobachtungen hervorgehen.

571		145		115	
297°,5	297°,5	281°,4	280°,9	279°,5	279°,1
297 ,3	297 ,6	281 ,0	280 ,7	279 ,5	279 ,1
297 ,3	297 ,6	281 ,6	281 ,1	279 ,6	279 ,1
313 ,1	313 ,6	329 ,2	330 ,6	331 ,4	332 ,4
313 ,0	313 ,5	329 ,2	330 ,6	331 ,6	332 ,4
313 ,0	313 ,7	329 ,4	330 ,9	331 ,4	332 ,1
576	567	148	141	149	141

Man sieht hier die Zahlen jedes Tages bis auf eine Kleinigkeit unter einander stimmen, ungeachtet die Unsicherheit der Gleichschätzung empfunden wurde; dagegen von den Zahlen jedes Tages die des andern etwas mehr und zwar in constanter Richtung abweichen, was beweist, dass der Gleichheitspunct jeden

Tag etwas anders angenommen wurde; zugleich aber sieht man, dass diese Abweichung sich in sehr kleinen Gränzen hält.

Da ich nicht zweifle, dass die Anwendung grauer Gläser zu Versuchen im Felde des Gesichtssinnes künftig allgemeiner als seither werden wird, und eine photometrisch bestimmte Skale derselben dazu in keinem physikalischen und physiologischen Cabinet fehlen sollte*), füge ich noch einige Bemerkungen über die, bei Anlage und Handhabung derselben in Betracht kommenden, Verhältnisse bei, welche vielleicht nicht Jedem gleich geläufig sind.

Gilt es, Zwischenstufen oder stärkere Verdunkelungen, als die Gläser bei einfacher Anwendung gewähren, hervorzubringen, so kann diess leicht durch Superposition von zweien oder mehrern derselben nach folgendem Princip geschehen.

Gesetzt, ein Glas lasse $\frac{1}{m}$ des auffallenden Lichtes durch, so wird dieses $\frac{1}{m}$, wenn es durch ein zweites Glas geht, welches $\frac{1}{n}$ durchlässt, nach dem Durchgange nur noch $\frac{1}{mn}$ des ursprünglichen Lichtes betragen, und man überhaupt, wenn eine Mehrheit von Gläsern gegeben und von jedem derselben der Verhältnisstheil $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ bekannt ist, der von dem (senkrecht oder gleich schief auffallenden) Lichte durchgelassen wird, nur nöthig haben, diese Brüche zu multipliciren, um den Verhältnisstheil zu haben, der von der Combination durchgelassen wird. Z. B. da die hellsten Gläser 824 und 795 respectiv 0,824 und 0,795 Licht durchlassen, so lässt ihre, von uns mit 824 . 795 zu bezeichnende, Combination 0,655 Licht durch, und ist also einem einfachen Glase 655 äquivalent. In der That ist die Combination 824 . 795 nach dem Augenschein deutlich, doch nicht viel, heller als das einfache Glas 611. Die Combination der beiden dunkelsten Gläser 90 und 71 lässt nach derselben Berechnungsweise 0,090 . 0,071 = 0,00639 Licht durch; ist also, unter Vernachlässigung der höhern Decimalen, einem einfachen Glase 6 äqui-

*) Allerdings hat man in der Verbindung zweier Nicol'schen Prismen, deren eines drehbar gegen das andere eingerichtet ist, ein sehr einfaches Mittel, alle Helligkeitsabstufungen in den feinsten gemessenen Abänderungen zu erzeugen, welches durch eine Skale dunkler Gläser nicht vertreten werden kann. Doch gilt auch das Umgekehrte, da die grösste Helligkeit, auf welche sich die Verbindung der Nicols einstellen lässt, schon eine sehr geschwächte ist, und nicht das ganze Gesichtsfeld, sondern nur ein beschränkter Fleck desselben den Helligkeitsabänderungen dadurch unterworfen werden kann.

valent; d. h. lässt nur sechs Tausendtel Licht durch. Auch erscheint sie wirklich schwarz und undurchsichtig, wenn man sie nicht sehr nahe vor die Augen nimmt.

Begreiflich gewährt der Vergleich der Combinationen mit den einfachen Gläsern so wie der Combinationen unter einander das Mittel einer Controle der photometrischen Bestimmung der Einzelgläser, wenn man eine abgestufte Reihe derselben hat; die aus der Einzelbestimmung nach dem Princip berechneten Werthe der Combination müssen die Stelle, welche die Combination nach dem Augenschein zwischen zwei photometrisch bestimmten Gläsern einnimmt, oder die merkliche Aequivalenz mit einem solchen richtig wiedergeben, widrigenfalls bei der Bestimmung des einen oder andern Glases gefehlt worden ist. Dieser Controle ist die obige Reihe mit befriedigendem Erfolge unterworfen worden. So sind nach der Berechnung folgende Combinationen folgenden einfachen Gläsern gleich oder nur um wenige Einheiten davon unterschieden; und auch die Prüfung nach dem Augenschein in unten anzugebender Weise liess keinen unzweideutigen Unterschied zwischen beiden entdecken.

$$824 \cdot 744 = 611$$
$$752 \cdot 744 = 562$$
$$611 \cdot 233 = 145$$
$$752 \cdot 571 \cdot 562 = 241$$
$$562 \cdot 205 = 115$$
$$611 \cdot 145 = 90 \text{ u. s. w.}$$

Dasselbe gilt von folgenden Combinationen bezüglich folgender andern Combinationen

$$562 \cdot 562 = 795 \cdot 394$$
$$537 \cdot 233 = 205 \cdot 611$$
$$562 \cdot 145 = 394 \cdot 205$$
$$752 \cdot 145 = 537 \cdot 205 \text{ u. s. w.}$$

Begreiflich kann man eine entsprechende Controle gleich bei der photometrischen Bestimmung der Gläser erhalten, wenn man ausser den Einzelgläsern auch Combinationen derselben photometrisch bestimmt. Sind die combinirten Gläser gleich, so muss der photometrische Werth des Einzelglases gleich der Quadratwurzel des Werthes der Combination sein.

So wurden die zwei, nach dem Augenscheine gleichen Gläser der grauen Skale 562 theils als Combination, theils eines von ihnen einzeln

bestimmt. Die Combination gab die Zahl 320, das Einzelglas gab 338 statt 566, was der genauen Wurzel entspräche. Diess stimmt gut genug mit der Regel, in Rücksicht, dass beide Bestimmungen an einem verschiedenen Tage geschahen, dass das eine Glas blos nach dem Augenscheine dem andern gleich geschätzt ist, und dass der Irrthum sich unstreitig zwischen der Bestimmung des Einzelglases und der Combination theilt.

Beiläufig kann bemerkt werden, dass hiemit ausser der Controle der Gläser zugleich eine erfahrungsmässige Controle des obigen Rechnungsprincips gewonnen ist, welche meines Wissens bisher noch nicht vorgelegen hat. Denn man muss bemerken, dass seine Gültigkeit nicht selbstverständlich ist, insofern die Möglichkeit vorlag, dass ein dunkles Glas wie ein Sieb zuerst die am schwersten durchgängigen Stralen von den leichtest durchgängigen trennt, so dass diese, wenn sie durch ein zweites Glas durchgehen, verhältnissmässig leichter durchgelassen werden. Diess hat sich aber nicht so gefunden, sondern der Erfolg der Controle fiel überall so aus, dass kein Grund vorhanden ist, an der Zulässigkeit des Principes zu zweifeln.

Freilich kann dasselbe streng nur gültig sein, wenn man gleich farblose oder wenn man gleich farbige Gläser combinirt; indem eine leichte Ueberlegung lehrt, dass eine Combination ungleichfarbiger Gläser weniger Licht durchlassen muss, als dem Product der (als Decimalbruch geschriebenen) einzelnen photometrischen Zahlen entspricht. Beträgt jedoch, wie bei unseren Gläsern der Fall, das Farbenlicht, was die Gläser überschüssig mit dem weissen Lichte durchlassen, nur einen Bruchtheil kleiner Ordnung von letzterem, so kann auch die Abweichung von der nach dem angegebenen Princip berechneten photometrischen Zahl der Combination ungleich nüancirter Gläser nur eine Grösse kleiner Ordnung sein. Dass diess wirklich bei unsern Gläsern der Fall, beweist sich durch die S. 358 angeführten Controleversuche in Rücksicht der verschieden nüancirten Gläser, welche zum Theil in die Combinationen eingehen.

Sehr helle Gläser wird man, wenn man sie von gleicher Beschaffenheit erhalten kann, überhaupt besser aus Combinationen als einzeln photometrisch bestimmen; zur Hervorrufung starker Dunkelheitsgrade aber sich besser der Combinationen als einfacher Gläser bedienen; weil

Gläser, die fast alles Licht abhalten, nicht mit derselben verhältnissmässigen Genauigkeit bestimmbar sind, als hellere Gläser.

Insofern bei vorigen Controleversuchen oder sonst die Helligkeit der Gläser oder gegebener Combinationen derselben nach Plus, Minus oder Gleichheit mit blossen Augen zu vergleichen ist, wende ich nach Umständen eines folgender Verfahren an:

1) Ich halte beide neben einander in gleichem Abstande von den Augen gegen den Himmel oder eine gleichförmige weisse Fläche, und sehe mit beiden Augen zugleich vergleichungsweise hindurch.

2) Ich bringe beide Gläser nach einander vor dasselbe Auge, indem ich nach dem Himmel oder einer weissen Fläche sehe, und zugleich das andere Auge geschlossen halte.

3) Ich lege beide Gläser neben einander auf weisses Papier, und vergleiche die Helligkeiten der von ihnen gedeckten Flecke.

4) Ich lege ein Streifchen weisses Papier auf schwarzen Grund, lege die zu vergleichenden Gläser neben einander darüber, oder halte sie in einiger Entfernung darüber, so dass jedes eine Hälfte des Streifchens zudeckt, und vergleiche die Helligkeiten der Streifenhälften.

5) Ich nehme vor jedes Auge eines beider Gläser insbesondere, sehe ein kleines weisses Feld auf schwarzem Grunde dadurch an, und erzeuge durch Kreuzung der Sehaxen ein Doppelbild, dessen Componenten ich vergleiche. Ich wechsele dabei mit den Gläsern vor beiden Augen, und berücksichtige noch einige andere Vorsichten, welche aus dem hervorgehen, was im 5. Abschnitte über die Verhältnisse der Doppelbilder gesagt ist.

Auch bei den Verfahrungsarten 1, 3, 4 ist nützlich, wenn der Unterschied zweideutig ist, mit der Lage der Gläser von Links zu Rechts zu wechseln; womit man manchmal geneigt wird, den Unterschied entgegengesetzt zu fassen.

Von diesen Verfahrungsarten wird es meist genügen, sich an die erste zu halten. Sind jedoch die Gläser oder Glascombinationen sehr dunkel, so erscheinen sie schwarz oder dem Schwarz zu nahe, um noch einen Vergleich zu ziehen, wenn man sie in hinreichender Entfernung vom Auge halten will, um gleichzeitig mit beiden Augen durchzusehen, wie es das erste Verfahren fodert; dann hat man das zweite anzuwenden, wo man die Gläser nach einander unmittelbar vor dasselbe Auge unter Schluss des andern Auges bringt, oder das fünfte mit

dem Doppelbilde, welches jedoch seine besonderen Vorsichten fodert. Keinesfalls darf man ohne Zuziehung des Doppelbildversuchs zwei Gläser so vergleichen wollen, dass man eins unmittelbar vor das eine, das andere vor das andere Auge nimmt, und so mit jedem Auge besonders durch eines der Gläser nach einer gleichförmigen Fläche sieht; da die Gesichtsfelder beider Augen zusammenfallen, also auch die durch beide Gläser besonders empfangenen Helligkeiten sich dann vielmehr zusammensetzen, als neben einander bestehen. Ebensowenig darf man bei dem zweiten Verfahren, wenn man die Gläser successiv vor dasselbe Auge bringt, das andere Auge dabei offen halten, da dann die volle Helligkeit des offenen Auges sich mit der des Auges, vor welchem das Glas ist, zusammensetzen, und keinen reinen Vergleich der Gläser mehr gestatten würde.

Sind die Gläser oder Glascombinationen nicht zu dunkel, so kann man sehr bequem das dritte Verfahren anwenden, wo man die Gläser unmittelbar auf eine weisse Fläche legt. Durch etwas dunkle Gläser, wie 233, 145 u. s. w. aber erscheint das Papier schwarz, und die Möglichkeit des Vergleiches hört auf. Ueberhaupt kann man es auffallend finden, dass das weisse Papier ohne Vergleich dunkler durch ein unmittelbar darauf gelegtes, als unmittelbar vor das Auge genommenes Glas (beidesfalls Schluss des andern Auges vorausgesetzt) erscheint; und sich nach Massgabe erhellt, als man das Glas aus der ersten Lage in die zweite überführt. Doch versteht sich diess leicht; indem in dem Falle, wo das Glas auf der Fläche unmittelbar aufliegt, das Licht, was uns dieselbe sichtbar macht, erst einmal durch das Glas zur Fläche hin, dann von der Fläche zum Auge zurückgelangen, also zweimal durch das Glas durchgehen muss, indess es in dem Falle, wo man das Glas unmittelbar vor dem Auge hat, blos einmal durchzugehen hat. Man kann daher die Helligkeit, in welcher die weisse Fläche erstenfalls erscheint, $\frac{1}{m^2}$ setzen, wenn sie zweitenfalls $\frac{1}{m}$ ist. Natürlich finden dann bei Zwischenlagen Zwischenhelligkeiten statt.

Das vierte Verfahren mit dem weissen Streifen auf schwarzem Grunde verträgt, selbst wenn die Gläser hiebei unmittelbar aufliegen, die Anwendung auf erheblich dunklere Gläser, als das dritte; denn der weisse Streifen scheint unterscheidbar vom schwarzen Grunde und nach Helligkeitsabstufungen vergleichbar auch noch durch Gläser durch, die

auf gleichförmigen weissen Grund gelegt denselben schwarz und nicht mehr vergleichbar erscheinen lassen; was unstreitig auf Contrastwirkung beruht, sofern der weisse Streifen von einem durch das aufgelegte Glas vertieften Schwarz umgeben ist, indess der Fleck, der auf gleichförmigem weissen Grund erscheint, von dem unvertieften Schwarz der Glasfassung umgeben ist. Ganz besonders aber empfiehlt sich das 4. Verfahren, wenn man noch ungefasste Gläser mit gefassten vergleichen will, wie nicht selten Veranlassung sein kann, wenn man die Skale der Gläser vervollständigen will.

In der That darf man nicht ein ungefasstes Glas mit einem Glase in schwarzer Fassung nach dem ersten oder dritten Verfahren so vergleichen wollen, dass man beide in gleicher Entfernung von den Augen gegen einen gleichförmigen Grund hält, oder beide neben einander auf einen gleichförmigen weissen Grund legt. Denn da das schwarz gefasste dann hell in dunkler Umgebung, das ungefasste dunkel in heller Umgebung erscheint, so taxirt man wegen des daraus hervorgehenden Contrastunterschiedes das ungefasste Glas stets als verhältnissmässig zu dunkel. Ich kann diess jeden Augenblick durch einen Versuch beweisen, indem ich das Glas 611, das einzige, welches ungefasst geblieben ist, mit dem gefassten Glase 562 nach 1) oder 3) vergleiche. Es erscheint mir in einer oder der andern Weise dunkler als dieses, ungeachtet es photometrisch sicher heller ist. Umgebe ich es aber während des Vergleiches mit einer schwarzen Papierfassung oder wende das 4. Verfahren an, so erscheint es wirklich ein wenig heller, so wie es dem photometrischen Verhältnisse entspricht. Der scheinbare Unterschied der Helligkeit mit und ohne Fassung ist in der That beträchtlicher, als man denken sollte.

Auch über die Erkenntniss der Färbungen der Gläser sind einige praktische Bemerkungen zu machen, da diese Erkenntniss bei den schwächsten Färbungen, wie man solche muss zu erlangen suchen, nicht immer ganz leicht ist. Bei dunkleren Gläsern erkennt man die Färbungen leichter mittelst Durchsehens durch dieselben in den grauen Himmel, bei den helleren mittelst Daraufsehens, während sie auf einer weissen Papierfläche oder quer über einem weissen Streifen auf schwarzem Grunde liegen, um so besser, wenn man mehrere helle von gleicher Art über einander legt.

Ein mindestens für viele Augen äusserst empfindliches Verfahren zur

Erkennung schwacher Färbungen bei etwas dunklen Gläsern beruht auf der Erzeugung eines Doppelbildes; nur dass es eine merkwürdige Zweideutigkeit einschliesst, sofern man danach nicht sicher sein kann, ob das Glas eine gegebene Färbung oder die Complementärfärbung dazu besitzt. Es besteht darin, dass man das Doppelbild eines schwarzen Feldes auf weissem Grunde erzeugt, während man vor einem Auge das zu prüfende Glas einfach, oder, im Fall es zu den hellern gehört, mit einem gleichen zusammengelegt hat. Dann nämlich zeigt sich, falls das Glas nicht ganz frei von Färbung ist, rings um das Bild im Auge mit dem Glase ein nebelartiger, in den Grund hinein sich verwaschender, farbiger Randschein, der sogleich verschwindet, wenn man das freie Auge schliesst oder verdeckt. Doch scheint er nicht für alle Augen gleich deutlich zu sein, denn Hankel so wie Volkmann konnten einen solchen Randschein nicht entdecken, wo ich ihn sehr deutlich sah; manche andere meiner Mitbeobachter haben ihn hingegen eben so gut, als ich wahrgenommen. Man sollte nun meinen, dass dieser Randschein, wo er sichtbar ist, immer die Farbe des Glases hat. Auch zeigt sich diess so bei den grünlichen Gläsern 400 und 394; und zwar tritt die grüne Färbung in dieser Weise schon bei den einfachen, um so mehr bei den zusammengelegten Gläsern viel deutlicher hervor, als auf irgend einem andern Wege. Eben so sehe ich die bläuliche Farbe auf diesem Wege sehr deutlich bei einem Paare (oben nicht mit aufgeführter) sichtlich bläulicher Gläser, welche den Gläsern 562 in Helligkeit nahe stehen. Aber die Gläser 233 und 205, welche beim Durchsehen einen entschiedenen Stich ins Röthlich-violete zeigen, geben mir bei demselben Versuche (den ich an vielen Tagen damit wiederholt habe) in der Regel einen, und zwar sehr entschiedenen, grünen Randschein; doch habe ich ihn ausnahmsweise auch ein paarmal eben so bestimmt röthlich-violet gefunden, ohne dass ich den Grund des wechselnden Erfolges anzugeben wüsste. Nicht minder fand Zöllner den Randschein entschieden grün, indess Welcker im Randschein eine grüne mit einer röthlich-violeten Zone zugleich zu erblicken glaubte, wogegen Grabau ihn röthlich-violet sahe. Auch die 4 dunkelsten, beim Durchsehen blos bräunlich erscheinenden, Gläser 145 bis 71 geben mir alle einen grünen Randschein um das schwarze Feld. Bei den hellern Gläsern aber ist, auch wenn ich je zwei superponirt anwende, ein Randschein auf diese Weise nicht sichtbar zu machen.

Wenn ich statt der blos schwach farbig nüancirten grauen Gläser entschiedene Farbengläser zu demselben Versuche verwende, so ist der Randschein lebhafter, so dass er auch von Hankel wie Volkmann sehr gut wahrgenommen wurde, aber, auch bei violettem Glase, stets von der Farbe des Glases. Hingegen zeigte sich bei mehreren Farbengläsern eine entsprechende Zweideutigkeit, als nach vorigen Versuchen am Randscheine, an dem Bilde selbst. Von diesen, noch nicht gehörig aufgeklärten, Verhältnissen wird näher im 14. Abschnitt gehandelt.

Wenn man zu demselben Versuche ein weisses Feld auf schwarzem Grunde verwendet, so tritt die Färbung des Glases statt in der Umgebung des Bildes, am Bilde selbst auf, nicht leicht so entschieden als nach voriger Versuchsweise, doch auch mit einem gewissen Vortheil von Deutlichkeit, und, wie es scheint, mit minderer Zweideutigkeit; denn sowohl die grünliche Färbung der Gläser 400 und 394 als die röthlich-violette der Gläser 233 und 205 wird auf diese Weise deutlich genug. Die 4 dunkelsten beim Durchsehen nach dem Himmel blos bräunlich erscheinenden Gläser geben einfach, deutlicher zu zwei superponirt, auch einige grüne Färbung bei diesem Versuche und scheinen also eine grünliche Grundfärbung zu haben, die ich aber auf keine andere Weise als mittelst der Doppelbildversuche nachzuweisen vermochte.

Man darf nicht ausser Acht lassen, dass, wenn ein dunkles Glas vor das Auge genommen wird, dadurch nur das äussere Licht nach Massgabe der photometrischen Zahl des Glases abgeschwächt wird. Insofern aber dem schwarzen Sehfelde im geschlossenen Auge noch ein, wenn schon nur sehr geringer, photometrischer Werth zukommt*), welcher nicht dadurch abgeschwächt wird, kann das wirkliche Verdunkelungsverhältniss des Auges durch ein Glas nur insofern seiner photometrischen Zahl entsprechen, als man jene innere Helligkeit des Augenschwarz gegen die äussere Helligkeit auch nach dessen Abschwächung noch vernachlässigen kann; was bei sehr dunklen Gläsern, die fast alles Licht ausschliessen, natürlich nicht mehr gültig ist.

Zu vielen der folgenden Versuche dienten eigentliche Farbengläser. Diess waren gewöhnliche käufliche, wie sie zu bunten Fen-

*) Vergl. hierüber meine Abhandlung »Ueber ein psychophysisches Grundgesetz«; in diesen Abhandl. Th. IV. S. 481; oder Elemente der Psychophysik. Th. I.

sterscheiben verwendet werden, namentlich folgende, in der Reihenfolge von den hellern zu den dunklern:

1) ein röthlichgelbes (brandgelbes) Glas.
2) ein hellgrünes, ungefähr gleich hell mit dem vorigen.
3) ein blaues.
4) ein violetes.
5) ein ziemlich homogen dunkelgrünes.
6) ein homogen rothes.

No. 1 bis No. 4 incl. lassen mit dem überwiegenden Farbenlichte noch mehr oder weniger von den übrigen Farbenstralen durch.

Legt man das rothe und dunkelgrüne Glas über einander und versucht hindurchzusehen, so erscheint die Combination ganz undurchsichtig schwarz, indess sich durch jedes beider Gläser, einzeln vor beide Augen genommen, gewöhnliche Druckschrift noch allenfalls lesen lässt, durch das dunkelgrüne etwas leichter als durch das rothe. Legt man das blaue und röthlichgelbe Glas über einander und sieht nach einem bedeckten Himmel hindurch, so erscheint das Gesichtsfeld grau, blos mit einem Stich ins Grünliche, und es lässt sich noch recht wohl hindurch lesen. Legt man das violete und röthlichgelbe Glas über einander, und sieht hindurch in den grauen Himmel, so erscheint derselbe dunkelröthlichgelb.

Zu einigen Versuchen endlich dienten 3 Abstufungen grauen Papiers, welche ich künftig mit No. 1, 2, 3 bezeichnen werde. Sie werfen in Verhältniss zu weissem Velin = 1000 nahehin folgende Lichtmengen zurück:

No. 1 = 575
No. 2 = 385
No. 3 = 228.

Die Bestimmung geschahe durch Aequivalenzversuche nach folgendem Verfahren: ein Streifen aus dem grauen und ein Streifen aus dem weissen Papier werden auf schwarzen Grund gelegt, von ihnen ein Doppelbild erzeugt, ein graues Glas vor ein Auge genommen, und die durch das graue Glas verdunkelte weisse Componente mit der frei gesehenen grauen Componente verglichen. Falls beide Componenten gleich erscheinen, hat man in dem Verdunkelungsverhältnisse des Glases zugleich das Verhältniss, in welchem das Licht des Grau geringer ist, als das des Weiss. Widrigenfalls lassen sich doch Gränzen bestimmen, zwi-

schen welche das Grau fällt, indem man successiv verschiedene Gläser und Glascombinationen, deren Helligkeit nach dem S. 357 angegebenen Principe zu beurtheilen ist, probirt.

Etwas hinderlich ist bei diesem Verfahren, wenn die grauen Gläser und das Grau des Papiers nicht wirklich rein grau oder nicht mit entsprechendem Farbenstiche behaftet sind; indem dann die verschiedene Färbung den Helligkeitsvergleich erschwert. Diess ist Grund, dass vorige Helligkeitsbestimmungen nicht als scharf anzusehen sind.

Wo in den folgenden Versuchen von einem schwarzen Grunde die Rede ist, diente dazu stets ein ganzer oder halber Bogen glanzloses Russpapier. Ein solcher, mit der schwarzen Seite nach innen zusammengerollt, gab die inwendig schwarze Röhre, die zu mehrern Versuchen gebraucht ward.

V.

Ueber die Erzeugungsweise der Doppelbilder und einige allgemeine Verhältnisse derselben.

Um die bezugsweisen Verhältnisse des binocularen und monocularen Sehens zu studiren, kann man theils die monocularen Bilder zweier verschiedener Objecte dadurch zu einem einzigen binocularen Bilde combiniren, dass man sie auf correspondirende Netzhautstellen fallen lässt, wie es bei den gewöhnlichen stereoskopischen Versuchen der Fall ist, theils das binocular-einfache Bild eines einzigen Objectes durch angemessene Kreuzung der Sehaxen in zwei monoculare Bilder zerlegen, wie es meist bei den folgenden Versuchen geschahe; und eines und andern Falles die monocularen Componenten des binocularen einfachen Bildes theils mit diesem, theils unter einander vergleichen.

Bei dem von mir eingehaltenen Verfahren wurden in der Regel beide Augen entweder vor Erzeugung des Doppelbildes oder während der Betrachtung desselben ungleichen Einflüssen ausgesetzt, um den Erfolg dieser Einflüsse zu beobachten; wobei sich zeigte, dass ein solches Verfahren nicht minder als zum Zweck des Studiums des zweiseitigen und einseitigen Sehens auch zum Studium der Wirkungsweise mancher Einflüsse selbst geeignet ist.

Des Nähern verfuhr ich in der Regel so, dass ich ein quadratisches

Feld von circa ½ bis ¾ Zoll Seite, oder einen Streifen von etwa ½ Zoll Breite und 1 bis 1½ Zoll Länge aus weissem, schwarzem oder farbigem Papier ausgeschnitten auf einen Bogen von schwarzem, weissem oder andersfarbigem Papier legte oder klebte, erst mit beiden Augen fixirte, so dass ein einfaches Bild des Objectes gesehen wurde, was ich kurz als einfache Fixation mit beiden Augen bezeichnen werde, dann durch abgeänderte Kreuzung der Sehaxen dieses einfache Bild in zwei zerlegte, oder, wie ich mich meist ausdrücken werde, auseinanderschob.

Es fällt mir leichter das Auseinanderschieben des Doppelbildes vom Puncte des Einfachsehens an durch verminderte als vermehrte Convergenz der Sehaxen zu bewirken; und meine Augen nehmen auf das Gebot, das einfache Bild auseinanderzuschieben von selbst die demgemässe Stellung an. Hiebei erscheint das im rechten Auge gesehene Doppelbild links, das im linken gesehene rechts, wie sich durch Verdecken eines Auges sofort ergiebt. Alle folgenden Angaben bezüglich meiner eigenen Versuche setzen, wo nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt ist, ausnahmslos dieses ungleichseitige Doppeltsehen voraus.

Versuche ich gleichseitiges Doppeltsehen zu erzeugen, so muss ich Fixation eines nahe gehaltenen Fingers oder dergl. zu Hülfe nehmen; ich bringe dann wohl auch ein gleichseitiges Doppelbild eines fernen Objectes zu Stande; aber ich bin nicht im Stande es auf die Dauer und in bestimmter Lage festzuhalten, daher z. B. Sterne für mich keine brauchbaren Objecte sind, während ich ein ungleichseitiges Doppelbild nicht nur ohne Hülfsmittel durch abgeänderte Augenstellung erzeugen, sondern auch nach Willkühr weiter und enger auseinanderschieben, in einem beliebigen Abstande der Componenten festhalten, diese oder jene Componente fixiren und mit Aufmerksamkeit betrachten kann. Die Einstellung der Augen auf einen fernen Punct bewirke ich dabei nicht durch absichtliche Fixirung eines fernen Objects, was durch das Papier, auf dem das Object liegt, hindurch nicht geschehen kann, sondern dadurch, dass ich die Augen wie in Zerstreuung aus einander gehen lasse, eine Bewegung, die, wenn sie einmal begonnen hat, dann leicht fortgesetzt oder arretirt werden kann, so dass die Lage des Doppelbildes dadurch beherrscht wird.

Es ist mir auffallend gewesen, zu finden, dass verschiedene Personen sich in der respectiven Leichtigkeit, gleichseitige oder ungleich-

seitige Doppelbilder zu erzeugen, sehr ungleich verhalten. Wahrscheinlich würde eine genauere Erkundigung Aufschluss darüber in Verhältnissen der Weit- oder Kurzsichtigkeit, früheren Gewöhnungen und Gebrauchsweisen des Auges finden lassen, worauf ich jedoch keine genauere Untersuchung gerichtet habe.

Welcker*) hat bei einer Reihe von Versuchen, mit welchen sich die folgenden theilweis begegnen, das ungleichseitige Doppeltsehen als »das weniger anstrengende« vorgezogen, und diess auch bei den, gemeinsam mit mir angestellten, Versuchen gethan. Eben so findet Völcker**) »die Stellung der Augen hiebei ungezwungener.« Dove, Feddersen, Grabau, Koch und ein andrer Student, mit dem ich einige Versuche anstellte, können bequem nur ungleichseitiges Doppeltsehen erzeugen. Th. Weber fand es überhaupt etwas schwer, ein Doppelbild zu erzeugen, wenn es aber gelang, war es mittelst ungleichseitigen Doppeltsehens. Volkmann findet ungleichseitiges Doppeltsehen bequemer, vermag jedoch ohne Schwierigkeit auch gleichseitiges zu erzeugen.

Hingegen erzeugen Funke, Hankel, Ruete, E. H. Weber, ohne Zuhülfenahme des fixirten Fingers, gleichseitiges Doppeltsehen so leicht, als ich ungleichseitiges, indess sie ungleichseitiges nicht bequem zu erzeugen vermögen. Bei Prof. Scheibner entsteht sogar gleichseitiges Doppeltsehen so leicht von selbst, dass er oft in Zweifel ist, wenn eine ferne Person vor ihm geht, ob er nicht vielmehr zwei Personen als eine vor sich habe. Der Opticus, bei dem ich meine grauen Gläser kaufte, erzeugte, von mir veranlasst, mit Leichtigkeit ein Doppelbild; es fand sich bei der Prüfung als ein gleichseitiges.

Nur ein Individuum ist mir bis jetzt vorgekommen, welches mit gleicher Leichtigkeit gleichseitige und ungleichseitige Doppelbilder erzeugt und beherrscht, das ist mein Mitbeobachter Zöllner. Derselbe hat sich viel mit stereoskopischen Versuchen beschäftigt, und vermag ohne Schwierigkeit durch rasche Verlegung des Fixationspunctes die Coincidenz zweier stereoskopischen Bilder bei gleichseitigem Doppeltsehen in eine solche mit ungleichseitigem Doppeltsehen zu ver-

*) Ueber Irradiat. p. 104.

**) Müller Arch. 1838.

wandeln, wobei sich das, auf den jetzt entferntern Horopter projectirte, binoculare Bild plötzlich auffallend zu vergrössern scheint.

Nach dieser kleinen Statistik der mir zu Gebote stehenden Fälle erzeugen, mich selbst eingeschlossen, 10 Personen leichter ungleichseitiges als gleichseitiges Doppeltsehen, 6 umgekehrt, 1 beides gleich leicht. Der erste Fall scheint also etwas häufiger als der letzte zu sein.

Bei den vielen Versuchen, welche ich mit Beobachtern aus beiden Classen anstellte, habe ich nicht auffällig bemerkt, dass die Einen das Object durchschnittlich aus grösserer Nähe als die andern betrachteten, jedoch die Aufmerksamkeit nicht ausdrücklich auf diesen Punct gerichtet. Ich selbst erzeuge das Doppelbild gleich leicht, mag das Object weit diesseits oder jenseits der gewöhnlichen Sehweite sein; nur dass natürlich erstenfalls bei gleicher Kreuzung der Augenaxen das Doppelbild weiter auseinanderweicht. Die gewöhnliche Weise aber, wie ich ein Doppelbild betrachte, ist die, dass ich es, während es auf dem 80 Centimeter hohen Beobachtungstische liegt, vor diesem stehend, mit etwas vorgeneigtem Körper und Kopf so ins Auge fasse, dass ungefähr die gewöhnliche Sehweite von 1 Fuss heraus kommt.

Vielen Personen, insbesondere den meisten Ungeübten oder Laien, fällt es überhaupt schwer, durch freiwillige Abänderung der Kreuzung der Sehaxen ein Doppelbild zu erzeugen. Sie können sich dann leicht helfen, indem sie ein Auge mit dem Finger etwas seitlich drücken. Aber zu fortgesetzten oder wiederholten und genauen Versuchen ist diese Methode durchaus nicht zu empfehlen, da das Auge durch das wiederholte Drücken angegriffen wird, da die Doppelbilder gewöhnlich anstatt horizontal schräg auseinanderweichen, was für die Beurtheilung mancher Verhältnisse störend ist, und da ein gedrücktes Auge auf manche Verhältnisse anders zu antworten scheint, als ein nicht gedrücktes;*) wesshalb auch, wenn es gilt, ein Auge durch Vorlegen der Hand zu verdunkeln, sorgfältig zu vermeiden ist, dass diess mit Druck auf das Auge geschehe. Hiegegen haben meine sonst so reizbaren Augen oft wiederholte Versuche mit Auseinanderschieben der Doppelbilder durch freiwillig abgeänderte Kreuzung der Augenaxen besser vertragen, als ich Grund hatte zu hoffen.

*) Ich habe diess mehrfach namentlich bei den Versuchen mit monocularer Farbenreizung des 14. Abschnitts beobachtet, wenn ich das Auge *A* beim Schluss drückte; aber keine ausgedehnten vergleichenden Versuche darüber anstellen mögen.

Bei der angegebenen Versuchsweise hat man zu berücksichtigen, dass, so lange man das Object auf dem gegebenen Grunde nach der Weise des gewöhnlichen Sehens mit beiden Augen einfach fixirt, das Bild desselben in beiden Augen auf correspondirende Netzhautstellen fällt, oder nach dem S. 340 eingeführten Sprachgebrauche sich homogen in beiden Augen deckt. Schiebt man aber das Doppelbild auseinander, so hört diese homogene Deckung auf; zu dem Bilde des Objects in jedem Auge entsteht auf der correspondirenden Netzhautstelle des andern das Bild des Grundes, tritt heterogene Deckung damit ein; so dass optisch genommen eben so viel Anlass ist, da, wo man das Bild sieht, den Grund zu sehen. Schiebt man das Doppelbild nur theilweise auseinander, so dass sich beide Bilder zum Theil noch decken, so findet auf diesem Theile noch homogene Deckung derselben statt, indess sie ihrem übrigen Theil nach sich mit dem Grunde heterogen decken. Von den Erscheinungen, die sich an diese verschiedenen Verhältnisse der Deckung knüpfen, wird später ausführlicher gehandelt.

Wenn man zwei gleiche Quadrate oder Streifen *A*, *B* in geringe Entfernung von einander neben einander auf einen gleichförmigen Grund legt, so kann man die Doppelbilder derselben so auseinanderschieben, dass zwei Bilder, eins von *A* und eins von *B*, gerade übereinanderfallen, und mithin statt vier Quadraten oder Streifen deren drei erscheinen, wovon der mittlere durch homogene Deckung zweier Quadrate oder Streifen entsteht, indess die beiden seitlichen sich mit dem Grunde heterogen decken. Diesen Versuch will ich kurz den Versuch mit den drei Bildern nennen.

Das Auseinanderschieben des Doppelbildes irgend eines Objects auf schwarzem Grunde stellt fast dieselben Verhältnisse für die monocularen Bilder in beiden Augen gleichzeitig her, die man abwechselnd für das eine und andre erhält, wenn man, bei gewöhnlicher einfacher Fixation des Objects auf schwarzem Grunde mit beiden Augen, abwechselnd das eine und andre Auge verdeckt, indem hiedurch jedesmal zum Object im offnen Auge der schwarze Augengrund auf der correspondirenden Stelle des verdeckten Auges in das Verhältniss heterogener Deckung tritt. Auch wird man bei den meisten der künftig anzuführenden Versuche beide Verfahrungsweisen mit entsprechendem Erfolge angewendet finden. Doch sind allerdings die Umstände und auch die Erfolge nicht ganz gleich geltend. 1) Bei Auseinanderschieben des

Doppelbildes eines weissen Objects auf schwarzem Grunde deckt sich das Object in jedem Auge heterogen mit dem, noch vom Tageslicht erhellten, also nicht ganz finstern, schwarzen Russpapiergrunde im andern Auge, bei Verdecken oder Schluss dieses Auges aber mit dem ganz finstern Grunde dieses Auges. 2) Von den beiden Componenten des auseinandergeschobenen Doppelbildes fällt nothwendig die eine oder fallen beide auf etwas seitliche Theile der Netzhaut, indess das durch Verdecken eines Auges bei directer Fixation entstandene Bild auf den Centraltheil fällt. Doch hat man es in seiner Willkühr, die eine oder andere der beiden Componenten des Doppelbildes zu fixiren und dadurch auf den Centraltheil überzuführen. 3) Wenn ein Auge verdeckt wird, so erweitert sich die Pupille nicht nur des verdeckten, sondern auch des nicht verdeckten Auges, was mitführen muss, dass die sichtbar bleibende Componente in diesem Auge sich etwas gegen den Fall erhellt, dass beide Componenten in beiden offenen Augen auseinandergeschoben gehalten werden. 4) Beim Doppelbilde eines weissen Feldes wird die Thätigkeit für das Sehen in beiden Augen zugleich, bei Verdeckung des einen Auges für ein Auge allein in Anspruch genommen. Nach spätern Versuchen (12. Abschn.) aber influirt die Thätigkeit beider Netzhäute in der Weise auf einander, dass auch dieser Umstand beiträgt, die monoculare Componente bei Verdeckung eines Auges etwas heller zu machen, als die gleichzeitig mit der andern im Doppelbilde gesehene. 5) Bei einer Verschiedenheit der Bilder in beiden Augen macht der die Unterscheidung fördernde Contrast im Fall des Doppelbildes sich dauernd und voll geltend, der im Fall des abwechselnden Verdeckens beider Augen nur im Moment des Wechsels zur Geltung kommt. Dieser Umstand giebt überall, wo es gilt, Unterschiede zwischen beiden Bildern zu beobachten, der Erzeugung der Doppelbilder einen erheblichen Vorzug vor dem abwechselnden Verdecken der Augen, so dass manche, namentlich schwache, Unterschiede leichter, manche constanter im Doppelbilde gleichzeitig als durch Verdeckung eines Auges abwechselnd wahrgenommen werden, indess ich die Richtung des Erfolges nach beiden Methoden immer gleich fand.

Gilt es den Vergleich des einfach fixirten binocularen Bildes mit der einen oder andern seiner auseinandergeschobenen Componenten, so kommen folgende Umstände in Rücksicht, welche einen Unterschied bewirken können.

Der in Betracht zu ziehende Hauptunterschied ist, dass die beim Einfachsehen mit beiden Augen stattfindende homogene Deckung der Bilder sich bei den Componenten des Doppelbildes in eine heterogene Deckung mit dem Grunde verwandelt (vergl. S. 370). Hievon sollte man einen sehr auffälligen Unterschied in der Erscheinung erwarten; doch findet ein solcher nicht statt, sondern nur ein so geringer Unterschied, dass er sogar leicht übersehen werden kann. Dieser, sehr bemerkenswerthe, Umstand gehört zu denen, die beweisen, dass Eindrücke auf correspondirenden Stellen Eindrücken auf einer identischen Stelle nicht gleich gelten, und wird ausführlicher im 7. Abschnitt erörtert. Ausserdem kommen einige Nebenumstände ins Spiel, welche zum Unterschiede zwischen der Erscheinung des einfach fixirten Bildes und der Componenten des Doppelbildes beitragen können.

1) Bei gleichseitigem Doppeltsehen eines Objects fixirt man einen nähern, bei ungleichseitigem einen fernern Gegenstand, als das Object: bekanntlich aber verengert sich erstenfalls und erweitert sich zweitenfalls die Pupille gegen den Fall, dass man das Object einfach fixirt. Diess kann einen kleinen Helligkeitsunterschied begründen.

2) Das ungleich fixirte Bild fällt auf das Centrum, die Doppelbilder, beide oder eins, auf seitliche Theile der Netzhaut; Centrum und Seitentheile aber stimmen in den Erleuchtungs- und Empfindlichkeitsverhältnissen nicht überein. In Betreff der Erleuchtung ist das Centrum in Vortheil einmal insofern, als der Lichtkegel, wodurch es erleuchtet wird, durch die Pupillenfläche mehr senkrecht geschnitten und durch Reflexion von Hornhaut und Linse minder geschwächt wird; in Betreff der Empfindlichkeit insofern, als die percipirenden Nervenelemente am Centrum dichter gedrängt stehen; dagegen ist das Centrum nach der Gebrauchsweise der Augen im Allgemeinen stärker ermüdenden Einflüssen ausgesetzt,*) wovon es abhängen mag, dass es doch oft in Nachtheil gegen etwas seitliche Theile erscheint, ohne dass dieses Verhältniss bis jetzt schon hinreichend ins Reine gebracht ist.

Hieher gehört die den Astronomen bekannte Erfahrung, die sich mir selbst oft bestätigt hat, dass man lichtschwache Sterne (mit oder ohne Fernrohr) leichter

*) Diese Verhältnisse sind von Förster in seiner Schrift über Hemeralopie und von Aubert in seinen Abhandlungen über die Erscheinungen auf den seitlichen Theilen der Netzhaut gut auseinandergesetzt.

bei etwas indirectem als directem Sehen erkennt.*) Nach Messungen, welche der Astronom d'Arrest angestellt und Ruete'n mitgetheilt hat, und die mir von diesem zugestellt wurden,**) betrug der Winkelabstand vom Centrum, in welchem ein lichtschwacher Stern für d'Arrest am deutlichsten erschien, 13,2° und sehr nahe so für einen andern Beobachter Dr. Hartwig. »Kommt es, fügt d'Arrest seinem Messungsresultate hinzu, bei einem sehr schwachen Lichtschimmer nicht darauf an, ihn scharf zu sehen (etwa ob er aus mehreren feinen Sternen bestehe), sondern sich nur von seinem Vorhandensein zu überzeugen, so lässt man das Bild noch beträchtlich mehr als oben bestimmt, seitwärts fallen. Von äusserst schwachen Nebelflecken, die man, wenn das Auge direct darauf gerichtet wird, in einem bestimmten Instrumente fast nicht erkennt, kann man einen verhältnissmässig hellen Eindruck in demselben Instrumente haben, wenn der Winkel vielleicht 30 bis 40 Grad beträgt.«

Ich selbst, wenn ich von gewöhnlichen Tagesgeschäften dazu übergehe, einen weissen Fleck oder Streifen auf schwarzem Grunde aus gewöhnlicher Sehweite zu betrachten, finde ihn sehr häufig etwas heller, wenn ich die Augen ein wenig seitlich rechts wende, als wenn ich ihn direct fixire; indess Linkswendung meist den umgekehrten Erfolg hat. Wenn ich jedoch die Augen 1 Minute lang geschlossen habe, ehe ich zum Versuche übergehe, so finde ich den weissen Fleck stets am hellsten bei directer Fixation.

Früherhin habe ich mehrfache Versuche über die vergleichsweise Helligkeit eines weissen Fleckes auf schwarzem Grunde oder eines Lichtes bei möglichst starker Seitlichwendung der Augen nach Rechts, Links, Oben, Unten und bei directer Fixation angestellt, kann aber die unter gewissen Umständen constanten Resultate unter etwas anderen nicht wiederfinden, ohne noch über den Grund der Abweichung ins Klare gekommen zu sein. Der in Versuchen mit den seitlichen Theilen des Gesichtsfeldes so geübte Aubert hat auf meine Bitte eine dergleichen Versuchsreihe angestellt, wobei er die indirecte Betrachtung jedesmal mit 25° Abweichung vom Centrum vornahm. Er fand die directe Betrachtung allgemein in Vortheil gegen jede Richtung des indirecten Sehens. Rechtswendung aber scheint nach den mitgetheilten Versuchszahlen in Vortheil gegen Linkswendung, Wendung nach Oben in Vortheil gegen Wendung nach Unten.

*) Angaben hierüber finden sich u. a. zusammengestellt in: Arago Oeuvres. Vol. XI. Astron. I. p. 189; in Radicke Optik II, S. 229, und in einem Programm von Ruete (Leipz. 1859): »Explicatio facti, quod minimae paulum lucentes stellae tantum peripheria retinae cerni possint,« wo, übereinstimmend mit Förster und Aubert, die Erscheinung von der vorzugsweisen Ermüdung der centralen Stelle abgeleitet wird. Bezüglich anderer Licht-Objecte als Sterne findet man denselben Umstand erwähnt von Steinheil in den Münchner Denkschr. 1837. S. 117, von Seidel in den Münchner Denkschr. VI. 522 und von Brewster in Pogg. Ann. XXVII. 497.

**) Sie finden sich auch im vorhin angeführten Programme.

Da er selbst diesen Gegenstand vielleicht durch eigene Versuche weiter verfolgen wird, und hier nur nebensächlich auf denselben einzugehen war, so lasse ich eine weitere Discussion darüber bei Seite.

Wesentlich handelt es sich hier nur um das Definitivresultat bei Auseinanderschieben eines Doppelbildes; und hiebei finde ich, ein weisses Object auf schwarzem Grunde vorausgesetzt, wofern die Augen nicht ungleich beleuchtet oder ermüdet sind, also sicher bei Vorderstellung gegen das Fenster und nachdem die Augen eine Zeit lang geschlossen waren, in der Regel aber selbst ohne diese Vorbereitung, die direct fixirte Componente als die hellere, und den Unterschied selbst nicht unbedeutend; unter Voraussetzung eines schwarzen Objects auf weissem Grunde aber die direct fixirte Componente von tieferem Schwarz. Eben so fanden es Grabau, Ruete, Volkmann, Zöllner; und es dürfte diess daher als Norm anzusehen sein.

Anstatt bei dieser Untersuchung das fixirte und nicht fixirte Bild mit einander zu vergleichen, verfährt man übrigens noch besser, jedes beider Bilder mit sich selbst in abwechselnd fixirtem und nicht fixirtem Zustande zu vergleichen, da Ungleichheiten zwischen beiden Bildern, die abgesehen von der Verschiedenheit der Fixation etwa vorhanden sein können, hiebei einflusslos werden.

Natürlich wird durch die von der ungleichen Fixation abhängige Helligkeitsverschiedenheit der Componenten des Doppelbildes die Vorsicht begründet, wenn es sich darum handelt, Differenzen der Helligkeit derselben nach Massgabe anderer Umstände zu beurtheilen, keines beider Bilder vorzugsweise vor dem andern oder beide abwechselnd zu fixiren.

Hiezu treten noch folgende Vorsichten:

1) Man muss sich, falls nicht der Einfluss verschiedener Beleuchtungsverhältnisse selbst untersucht werden soll, bei der Beobachtung so stellen, dass sich beide Augen unter gleichen Erleuchtungsverhältnissen befinden; also z. B. mit dem Rücken oder mit der Vorderseite gegen das Fenster, nicht aber mit der Seite, wo das vom Fenster entferntere Auge verhältnissmässig mehr beschattet ist, als das andere. Das Bild in dem vom Fenster her mehr erleuchteten Auge erscheint dunkler und meist mehr oder weniger farbig tingirt. Die Untersuchung dieser Verhältnisse folgt im 15. Abschnitte.

2) Man muss die Augen auch vorher keiner erheblich ungleichen

Erleuchtung und hiemit Ermüdung ausgesetzt haben; denn das Bild erscheint dunkler in dem stärker ermüdeten Auge und leicht in der Complementärfarbe des Lichtes, was die vorgängige Erleuchtung bewirkte; worüber die Untersuchung im 10. und 14. Abschnitte folgt.

In jedem Falle kann man die sichere Probe, dass beide Augen nicht ungleich ermüdet oder sonst ungleich thätig sind, darin finden, dass man einen vorläufigen Versuch mit Auseinanderschieben eines Doppelbildes auf schwarzem Grunde bei gleicher Beleuchtung beider Augen, also Vorderstellung gegen das Fenster, anstellt. Erscheinen beide Bilder gleich hell und farblos, so sind die Augen zum Versuch geeignet, widrigenfalls muss man sie erst gleichförmig stimmen oder die Ungleichheit, wenn sie nicht absolut zu heben ist, berücksichtigen.

Auch wird man nicht verfehlen dürfen, wenn der Erfolg ungleicher Einflüsse auf beide Augen untersucht werden soll, in abwechselnden Versuchen mit der Richtung dieser Einflüsse für beide Augen zu wechseln, um nicht auf Rechnung einer Ungleichheit der Einflüsse zu schreiben, was vielleicht doch von einer ungleichen Stimmung der Augen abhängt, da zumal eine solche selbst als Erfolg der Einwirkung ungleicher Einflüsse auf beide Augen nachbleiben kann, und bei fortgesetzten oder wiederholten Versuchen nothwendig störend wird.

VI.

Von einigen praktischen Benutzungsweisen der Doppelbilder. Ein Gesetz der Merklichkeit schwacher Farbenschimmer.

Das Erscheinen von Doppelbildern wird gewöhnlich nur als eine störende Abnormität des Sehens betrachtet; indess lässt sich von einer methodischen Erzeugung derselben, auch abgesehen von dem allgemeinen Zwecke einer Untersuchung der Verhältnisse des einseitigen und zweiseitigen Sehens, einiger Nutzen ziehen.

Handelt es sich, das Dasein und den Grad einer Ungleichheit beider Augen zu constatiren, so ist nichts dazu geeigneter, als das Auseinanderschieben eines Doppelbildes und der Vergleich der beiden Bilder; weil man das zu Vergleichende hiebei gleichzeitig vor Augen hat. So kann man sich durch Auseinanderschieben des Doppelbildes einer in verschiedener Entfernung gehaltenen Schrift von den Verhältnissen der

Sehweite beider Augen, durch Auseinanderschieben des Doppelbildes eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde von den Verhältnissen der Helligkeit in beiden Augen überzeugen; nur wird man auch die durch die Erörterungen des vorigen Abschnittes gebotenen Vorsichten nicht ausser Acht lassen müssen, die sich darauf reduciren, dass man nicht beide Bilder ungleich fixire, und dass nicht beide Augen vor dem Versuche oder während des Versuches ungleichen Lichteinflüssen unterliegen.

Hat man eine Skale photometrisch bestimmter grauer Gläser, so ist die Erzeugung der Doppelbilder oft sehr bequem, gegebene Helligkeiten dieser Skale einzuordnen. Schon oben (S. 360 und S. 365) wurde gezeigt, wie diess mit neu zu bestimmenden und zu controlirenden Gläsern selbst und mit gegebenen Abstufungen des Grau geschehen kann. Zu demselben Zwecke stehen nun allerdings noch andere Methoden zu Gebote; man wird aber (im 10. und 15. Abschnitt) sehen, wie nach demselben Principe auch die photometrischen Verhältnisse mancher subjectiven Erscheinungen bestimmt werden können, wozu kaum ein anderes Verfahren sich darbieten dürfte.

Nicht minder hat man im 4. Abschnitte gesehen, wie die Erzeugung von Doppelbildern zur Erkenntniss schwacher Glasfärbungen Dienste leisten kann. Diess zu bemerken, fand ich Gelegenheit bei einigen Versuchen über einen Gegenstand, auf den beiläufig in dieser Abhandlung wird Bezug zu nehmen sein, und der an sich sein Interesse hat; daher ich hier kurze Mittheilung davon mache.

In einer früheren Abhandlung*) habe ich durch eigene und fremde Versuche das Gesetz erläutert, dass der Helligkeitsunterschied zweier Lichtintensitäten immer gleich merklich bleibt, wenn die Intensitäten in gleichem Verhältniss wachsen oder abnehmen. Es fragte sich, ob auch die Aenderung des Weiss durch Zusatz einer Farbe immer gleich merklich bleibt, wenn die Intensitäten des Weiss und der Farbe in gleichem Verhältniss wachsen oder abnehmen. Um einen Versuch hierüber anzustellen, stellte ich ein Farbenglas auf einem weissen Bogen Papier in solcher Schiefe gegen ein Fenster auf, dass ein nur eben merklicher Farbenschimmer durch dasselbe auf das Papier fiel; man kann nämlich durch den Grad der Schiefe des Glases die Intensität der Farbe ab-

*) Abhandl. d. math. phys. Cl. Band IV. S. 461.

ändern und bis zu einem Minimum abschwächen. Darauf nahm ich wie bei den früher von mir beschriebenen Versuchen (unter Mitzuziehung des Gegenversuches) vor beide Augen eins meiner grauen Gläser, 239, 240, oder vor ein Auge bei Schluss des andern beide superponirt, und sahe, ob mir der Farbenschein auch noch bemerklich erschien. Als nun das Farbeglas blau war, konnte ich den schwächstmöglichen Farbenschein durch das doppelte graue Glas nicht zum Verschwinden bringen. Als es aber violet und insbesondere als es homogen roth war, ward er undeutlicher oder verschwand dadurch; als es gelb und insbesondere als es grün war, schien er an Deutlichkeit vielmehr zu- als abzunehmen.

Diess liess sich nun nicht wohl anders deuten, als dass die angewendeten grauen Gläser rothes Licht etwas schwerer, grünes etwas leichter als andere Farbestralen durchlassen; ungeachtet sie, ohne besonders darauf untersucht zu sein, mir immer schlechthin grau erschienen waren. Nun kann ich allerdings bei genauerer Untersuchung einen Stich ins Grünliche auch beim einfachen Daraufsehen oder Durchsehen in früher (S. 362) angegebener Weise an den Gläsern erkennen. Aber unzweifelhaft deutlich wurde mir die Färbung zuerst durch die angegebenen Doppelbildsversuche.

Später habe ich die Versuche über das Merklichbleiben schwacher Farbenschimmer mit den noch dunklern Gläsern 145 bis 71 wiederholt, welche beim Durchsehen nur durch eine bräunliche Nüance ohne bestimmte Färbung vom reinen Grau abweichen, wiederholt, und zwar theils an dem durch Farbengläser erhaltenen Schimmer, theils an schwächstmöglichen Farbenscheinen, die ich mittelst des Pinsels mit Pigmenten auf weissem Velinpapier erzeugt hatte, und habe kein anderes Resultat daraus ziehen können, als dass der Farbenschimmer auch bei sehr starker Verdunkelung gleich merklich bleibt. Denn sei es, dass ich vor jedes Auge eins der Gläser 145, 115 oder eins der Gläser 90, 71 nahm, so erschienen die im vollen Tageslicht nur eben merklichen Farbenschimmer noch eben so merklich dadurch.

Hienach lässt sich annehmen, dass in den mittleren Helligkeitsgraden, in denen sich das gewöhnliche Sehen bewegt, aber auch bis zu starker Verdunkelung herab, das Gesetz gilt, dass ein Farbenschimmer auf Weiss gleich merklich bleibt, wenn die Intensität aller Stralen in gleichem Verhältnisse verändert wird; nur darf man aus entsprechen-

den Gründen, als ich früher bei ersterem Gesetze auseinandergesetzt habe, den Versuch nicht bis zur Annäherung an Schwarz oder völlige Dunkelheit fortsetzen; und nicht minder findet, wie bei jenem Gesetze, eine Gränze nach Oben statt. In der That, wenn ich 145 mit 71 combinirt vor ein Auge, 115 und 90 vor das andre Auge nehme, wodurch die Helligkeit auf ungefähr $^1/_{100}$ herabgebracht wird, so werden die allerschwächsten Farbenschimmer dadurch unmerklich; scheinen jedoch nach längerem Durchsehen doch noch in einer zweideutigen Spur wieder zu kehren. Dass andrerseits bei starker Steigerung der Intensität (z. B. beim Sehen durch Farbengläser in die Sonne) sich der Eindruck aller Farben dem Weiss nähert, ist durch frühere eigene Versuche von mir,*) so wie spätere von Helmholtz**) bekannt. Jedoch gehört die genauere Besprechung dieser Verhältnisse nicht in den Zusammenhang dieser Abhandlung.

VII.

Zusammenstellung mehr oder weniger bekannter Thatsachen bezüglich der Verhältnisse der monocularen und binocularen Bilder.

Ich gehe nun zunächst zu einer Reihe von Ergebnissen über, die ich zwar grösstentheils nach eigenen, im Zusammenhange angestellten, Versuchen mit manchen Particularbestimmungen anführe, da sie vom Zusammenhange dieser Untersuchung nicht auszuschliessen sind, jedoch nicht als wesentlich neu gebe, indem man das Wesentlichere derselben zum Theil nur unter andern, zum Theil auch minder einfachen, Formen, mehr oder weniger zerstreut, schon bei J. Müller, Welcker; H. Meyer und Panum finden kann.

J. Müller, vergl. Physiol. d. Ges. 1826. p. 191 ff. — Welcker, über Irradiation. 1852. p. 118 ff. — H. Meyer, Gräfe Arch. f. Ophthalmol. II. Abth. 2. p. 77 ff. — Panum, physiolog. Unters. 1858. p. 17 ff.

Man lege eine begränzte, z. B. gelbe Scheibe auf einen ausgedehnten z. B. blauen, Grund, und betrachte sie mit so gekreuzten Sehaxen, dass ein getrenntes Doppelbild der Scheibe auf dem blauen Grunde entsteht, oder schiebe, nach dem eingeführten Sprachgebrauch, das

*) Pogg. Ann. L. 465.

**) Pogg. Ann. LXXXVI

erst einfach mit beiden Augen gesehene gelbe Bild in zwei auseinander.

Da nach der S. 370 angestellten Erörterung das gelbe Bild in jedem Auge sich mit dem blauen Grunde auf der correspondirenden Stelle im andern Auge heterogen deckt, mithin eben so viel Grund wäre, hier Blau als Gelb zu sehen, so hätte man zu erwarten, dass das Doppelbild entweder grün, oder, sofern man complementäres Blau und Gelb getroffen haben sollte (Helmholtz), weiss oder grau erschiene, oder endlich wettstreitend zwischen Blau und Gelb wechselte. Nichts von alle dem findet statt. Sondern das gelbe Doppelbild erscheint abgesehen von einer dem Unaufmerksamen und Laien ganz entgehenden Abnahme der Sättigung, die ich später bespreche, für jetzt nicht berücksichtige, eben so rein, standhaft gelb, als wenn man das einfache gelbe Bild mit beiden Augen fixirt, wo sich Gelb in beiden Augen homogen deckt. Kurz die heterogene Deckung von Blau und Gelb im Doppelbilde giebt wesentlich dieselbe Erscheinung als die homogene Deckung von Gelb und Gelb im einfachen Bilde.

Bedenken wir nun, dass, wenn Gelb und Blau auf einer identischen Stelle zusammengetroffen wären, nach den bekannten Versuchen mit der gedrehten Farbenscheibe wie nach Mischungsversuchen mit Pigmenten, wirklich Grau oder Grün entstanden sein würde, so sehen wir hier offenbar einen Fall, wo es nicht gleichgültig ist, ob dieselben Eindrücke auf einer identischen Stelle oder auf correspondirenden Stellen zusammentreffen. Aber was giebt bei unserm Versuche dem Gelb auf der einen von zwei correspondirenden Stellen die einseitige Präponderanz vor dem Blau auf der andern?

Zunächst bietet sich die grössere Lebhaftigkeit des Gelb als das Bestimmende dar. Man könnte sich denken, dass die Aufmerksamkeit vielmehr auf das lebhaftere Gelb im einen Auge als das dunklere Blau im andern bezogen ist, und dadurch ersteres merklich allein ins Bewusstsein tritt. Aber in der grösseren Lebhaftigkeit des Gelb kann der Grund nicht liegen; denn man kehre jetzt den Versuch um, d. h. man betrachte unter Anwendung von Stücken aus denselben Papieren jetzt eben so ein blaues auf gelbem Grunde, als vorhin das gelbe auf blauem Grunde, und man wird jetzt eben so das blaue wie vorhin das gelbe Doppelbild rein, standhaft, ohne Wettstreit mit der andern Farbe wahrnehmen, als wenn die andere Farbe auf der correspondirenden Stelle im andern

Auge gar nicht mitwirkte, vorbehaltlich einer kleinen Aenderung, die dem Unaufmerksamen entgeht.

Statt Gelb und Blau kann man beliebige complementäre oder nicht complementäre Farben, kann man Weiss oder Schwarz auf Farbe oder umgekehrt anwenden, der Erfolg wird immer derselbe sein. Aber noch mehr, man kann auch Weiss und Schwarz gegen einander anwenden, und der Versuch wird dasselbe Resultat liefern, mag die Scheibe weiss und der Grund schwarz oder umgekehrt sein, d. h. das Doppelbild der schwarzen Scheibe auf weissem Grunde wird eben so rein schwarz erscheinen, als das Doppelbild der weissen Scheibe auf schwarzem Grunde rein weiss erscheint, ungeachtet man doch meinen sollte, wenn die schwarze Scheibe im einen Auge sich mit dem weissen Grunde im andern Auge deckt, müsste der Eindruck das Weiss überwiegen. Aber es macht vielmehr seinen Eindruck so wenig geltend, dass man ohne sehr genaues Aufmerken merklich dieselbe reine Schwärze als beim gewöhnlichen Sehen zu erblicken glaubt.

Bei allen diesen Versuchsweisen zeigt es sich unmöglich, das eine oder andre Bild oder beide Bilder durch Willkühr zu verdrängen und statt dessen die Farbe des Grundes zu sehen; eben so wenig findet ein unwillkührlicher Wettstreit zwischen den Eindrücken statt.

Ich habe versucht, ob ich nicht ganz schwache, nur eben merkliche, Scheine, die ich mit Tusche oder Farbe auf weissem Papier erzeugte, durch Auseinanderschieben zum Doppelbilde verschwinden machen könne; es ist mir aber nicht gelungen.

Wenn ich nicht irre, ist Volkmann der Erste, welcher eine Beobachtung anführt, die hieher gehört, ohne jedoch weiter von ihm verfolgt zu sein, indem er S. 97 seiner neuen Beiträge z. Physiol. des Gesichtssinnes folgenden Versuch beschreibt: Vor einer weissen Wand bringt man ein Streifchen weisses Papier an, hält vor ein Auge ein blaues, vor das andere ein gelbes Glas, und kreuzt die Sehaxen so, dass sie in dem Puncte der Wand hinter dem Streifchen zusammentreffen, dann entsteht ein Doppelbild des weissen Streifchens, welches mit dem einen Auge rein blau, mit dem andern rein gelb gesehen wird, ungeachtet auch hier auf die correspondirenden Stellen die gegentheilige Farbe fällt. »Nur die eine Farbe, sagt Volkmann, kommt zum Bewusstsein, und zwar ist diese Farbe weder nüancirt durch die andere, noch lässt sie sich willkührlich mit der andern verwechseln.« Volkmann macht ausdrücklich darauf aufmerksam, dass der Erfolg in dieser Hinsicht räthselhaft abweiche von den Erfolgen, welche man durch andere Versuchsweisen erhält, auf die ich unten komme.

Welcker (p. 115) giebt an: »Ein sehr gewöhnliches Beispiel unsrer Erscheinung sind die beim Doppeltsehen sich schwarz erhaltenden Buchstaben. Die Buchstaben bilden meist so schmale Streifen, dass die Schwärze der doppeltgesehenen von derjenigen der normalgesehenen nicht zu unterscheiden ist. — Oblaten aller Farben, auf eintönigem Grunde doppelt gesehen, zeigen ihre Farben so rein und kräftig, dass kaum ein Unterschied gegen das normale Sehen auffällt.«

Panum (p. 29) sagt in einem Resumé eines Theils seiner Versuche, wobei die Erzeugung der Doppelbilder von Contouren ins Spiel tritt: »Eine schwarze Contour macht sich eben so wohl auf einem weissen Grunde geltend, als eine weisse Contour auf schwarzem Grunde; obgleich Weiss die Retina sonst viel stärker erregt, als Schwarz, macht das begränzte Schwarz der Contour des einen Bildes sich doch im Sammelbilde ungleich stärker geltend, als das unbegränzte Weiss des dem andern Bilde angehörigen Grundes, ja das Weiss kommt meist gar nicht zu bemerkbarer Geltung, indem die Contouren des Sammelbildes gewöhnlich eben so schwarz erscheinen wie im ursprünglichen, dem einen Auge dargebotenen Bilde.«

Davon, dass jede Componente des auf einem gleichförmigen Grunde auseinandergeschobenen Doppelbildes abgesehen von einer Aenderung, welche einer oberflächlichen Aufmerksamkeit entgeht, ganz denselben Eindruck macht, als das einfach fixirte Bild, mag Weiss auf Schwarz oder Schwarz auf Weiss oder Farbe auf irgend welcher Farbe, auf Weiss, auf Schwarz oder umgekehrt betrachtet werden, habe ich mich nicht nur durch mein eigenes Urtheil, sondern die Aussagen sehr vieler und verschiedener Personen, Beobachter und Laien, überzeugt; ja von Letztern, wenn ich Solche den Versuch anstellen liess, im Allgemeinen einfach das Urtheil vernommen, sie können nichts von einer Aenderung wahrnehmen. Beobachter indess, die schärfer zusehen, geben im Allgemeinen und zwar in übereinstimmendem Sinne eine Aenderung an, welche durch Auseinanderschieben des Doppelbildes eintritt, bezeichnen sie aber auch im Allgemeinen, wie schon aus obigen Anführungen hervorgeht, als sehr geringfügig. Ein weisses oder farbiges Object auf schwarzem Grunde verdunkelt sich, ein schwarzes oder farbiges auf weissem Grunde lichtet sich etwas, ein farbiges auf complementärem nimmt etwas in Sättigung oder Farbenintensität ab. Funke, Grabau, Ruete, Volkmann, Welcker (bei den mit mir angestellten Versuchen) und ich selbst haben es wesentlich übereinstimmend so gefunden.

Um diese Veränderung zu sehen und deutlich wahrzunehmen, behalte ich stets eines beider Bilder beim Auseinanderschieben in Fixation, und schiebe es, nachdem seine Beschaffenheit wohl ins Auge gefasst wor-

den, schnell mit dem andern wieder zusammen, um es mit dem so entstehenden binocular gesehenen Bilde zu vergleichen. Hiedurch erlangt man erstens den Vortheil, dass man nicht mit einer Verschiedenheit der Netzhautstellen beim Vergleich des monocularen und binocularen Bildes zu thun hat (vgl. S. 372), zweitens, dass man, indem man blos eines beider monocularen Bilder mit dem binocularen vergleicht, die Aufmerksamkeit nicht zerstreut. Auf diese Weise finde ich die Verschiedenheit zwischen dem binocularen Bilde und seinen monocularen Componenten leichter, als bei meinen ersten Versuchen, wo ich die auseinandergeschobenen Bilder mit dem binocularen Bilde nach der Weise der Laien mit zerstreuter Aufmerksamkeit ohne jene Vorsicht verglich, wenn schon immer sehr gering gegen die, welche man nach der Voraussetzung erwarten müsste, dass der Eindruck des monocularen Bildes in jedem Auge sich mit dem des Grundes im andern Auge so zusammensetzt, als wenn die Zusammensetzung auf einer identischen Stelle geschähe. Es schiene vielleicht noch vortheilhafter, den Vergleich so vorzunehmen, dass man das Doppelbild langsam auseinanderschiebt oder zusammenschiebt, und bei theilweiser Deckung beider Bilder den sich homogen deckenden Theil derselben mit den darüber hinausgreifenden Theilen, welche sich heterogen mit dem Grunde decken, vergliche. Aber dieser Vergleich ist unstatthaft, weil bei theilweiser Deckung Randscheine oder Höfe an den Rändern des sich homogen deckenden Theils entstehen, wovon alsbald die Rede sein wird; vielmehr muss man eine Componente des vollkommen auseinandergeschobenen Bildes mit dem vollkommen zusammengeschobenen Bilde vergleichen.

Zu demselben Resultate als letztes Verfahren führt es auch, wenn man beim Versuche mit den drei Bildern (S. 370) die seitlichen monocularen Bilder mit dem mittlern binocularen vergleicht. Nur muss man, um nicht mit der Ungleichheit zwischen centralen und seitlichen Theilen der Netzhäute hiebei zu thun zu haben, beim Vergleich den Fixationspunct abwechselnd auf das mittlere und seitliche Bild verlegen.

Da bei einem weissen Doppelbilde auf schwarzem Grunde eine, immerhin nicht ganz zu vernachlässigende, Verdunklung des Weiss durch die heterogene Deckung mit dem schwarzen Grunde, wie umgekehrt bei einem schwarzen Doppelbilde auf weissem Grunde eine nicht ganz zu vernachlässigende Lichtung des Schwarz durch heterogene Deckung mit dem weissen Grunde anzuerkennen ist, so thut man wohl, durch

speciellen Vergleich der beiden Arten Doppelbilder sich zu überzeugen, dass sie, ungeachtet in beide Schwarz und Weiss objectiv in ganz gleichen Verhältnissen eingehen, einander durch jenes Entgegenkommen nicht entfernt nahe kommen; das erste erscheint noch ganz weiss, das zweite noch ganz schwarz, weder das eine noch das andere grau; auch kann man nicht finden, so weit sich ein Urtheil fällen lässt, dass die Schwärze des vollen Schwarz in der zweiten Art Bilder mehr gemindert erschiene, als die Weisse des vollen Weiss in der erstern, eher findet das Gegentheil statt. Mindestens erkenne ich den Unterschied zwischen dem monocularen und binocularen Bilde, wenn das Bild weiss ist, nach den angegebenen Verfahrungsarten leichter und unzweideutiger, als wenn dasselbe schwarz ist.

Hiemit stimmt folgende Angabe von Welcker*) über einen nach dem Princip des Versuchs mit den drei Bildern angestellten Versuch überein:

»Legte ich zwei schwarze Streifen von mehr als Zollbreite auf ein weisses Papier senkrecht und in solchen Entfernungen neben einander, dass beim Doppeltsehen drei schwarze Streifen erschienen, deren mittlerer durch zwei schwarze Netzhautbilder bedingt ist, so fand ich in der Schwärze keinen Unterschied, wiewohl die Netzhautbilder, bei sehr geringer Sehweite, schon beträchtliche Flächen einnahmen. Wählt man weisse Streifen auf schwarzem Grunde, so zeigt der mittlere eine deutlich überwiegende Helligkeit.«

Ich selbst kann nicht umhin, auch bei den schwarzen Bildern einen Unterschied zu finden, aber in der That einen deutlicheren bei den weissen.

Eben so kommt ein blaues Doppelbild auf gelbem Grunde einem gelben auf blauem, oder ein rothes auf grünem Grunde einem grünen auf rothem Grunde nicht entfernt nahe, wenn schon eine Abwandelung der Sättigung durch die heterogene Deckung nicht fehlt; man hat immer noch volles Blau, Gelb, Roth, Grün.

Geschieht das Auseinanderschieben des Doppelbildes auf einem übrigens gleichförmigen Grunde, auf dem sich aber Buchstaben, Zeichnungen, irgend welche Contouren befinden, so gewinnen diese da, wo die Bilder sich damit decken, die Oberhand, indem sie mit der anliegenden Grundfärbung in die Erscheinung treten, und die Färbung der Bilder in einer gewissen Ausdehnung verdrängen (Welcker, Panum).

„Legt man z. B. eine rothe Oblate auf bedrucktes Papier, so scheinen ihre Doppelbilder fast über ihre ganze Fläche hin durchsichtig. Nur an ihrem Rande zeigen sie Roth; die Buchstaben werden tief schwarz gesehen: sie sind

*) Irradiation p. 115.

von dem fortlaufend rothen Bilde überbrückt; das Roth im Innern der Oblate aber wird vernachlässigt und die Buchstaben stehen im Weiss, weil jeder einzelne Buchstabe in seiner Umgebung das Weiss hervorhebt.« (Welcker, p. 112.)

Ausführlichere Versuche findet man bei Panum.

Bisher ward vorausgesetzt, dass das Doppelbild vollständig aus einander geschoben sei, und beide Componenten desselben sich in ihrer ganzen Ausdehnung mit dem anders beschaffenen Grunde heterogen decken. Schiebt man aber das Doppelbild eines begränzten Feldes auf gleichförmigem Grunde nur theilweise aus einander, — was zur Unterscheidung von formell andern, principiell auf dasselbe hinaus kommenden, nachher zu betrachtenden, Verfahrungsarten das a-Verfahren heisse — so behält zwar der sich homogen deckende Theil, kurz der Kerntheil, dieselbe Beschaffenheit, als das nicht aus einander geschobene Bild, die darüber hinausgreifenden Theile der Componenten aber, kurz die Flügeltheile, zeigen nicht dieselbe Beschaffenheit, als wenn das Auseinanderschieben vollständig geschehen wäre, sondern der Grund macht sich innerhalb dieser Theile in der Angränzung an den Kerntheil auffällig geltend, was an den vorbemerkten Einfluss der Contoure anknüpft. In der That, es geht von den Rändern des Kerntheiles, in welchen das eine Bild das andere schneidet, ein sich allmälig verwaschender Randschein von der Beschaffenheit des Grundes (weiss, schwarz, farbig, je nachdem dieser es ist) nach den entgegengesetzten Rändern, wo die Flügeltheile an den Grund gränzen, ohne sich aber bis zu diesen Rändern selbst erstrecken zu können, von denen aus ihm vielmehr ein Randschein, wie er der Beschaffenheit des Objects entspricht, entgegenkommt. Nicht selten treten hiebei Wettstreitsphänomene derselben Art ein, als sogleich näher betrachtet werden sollen.

Dieser Versuch wird um so instructiver, wenn man ihn entweder vereinfacht oder vervollständigt.

Zu ersterem Zweck schiebt man nach einem Verfahren, was das b-Verfahren heisse, das Doppelbild einer, auf die Verbindungslinie der Augen senkrechten Gränzlinie zwischen zwei ungleichen Arten Grundes, z. B. einem schwarzen und weissen, blauen und gelben Grunde aus einander, womit zugleich die Bilder des weissen und schwarzen Grundes, um diese als Beispiel beizubehalten, partiell übereinandergeschoben werden, und zwischen den homogenen gedeckt bleibenden Hauptmassen des weissen und schwarzen Grundes ein Streifen

entsteht, innerhalb dessen sich Weiss und Schwarz heterogen decken, den ich kurz den binocularen Streifen nennen will. Anstatt aber dass dieser Streifen gleichförmig grau erschiene, erscheint von der Gränze des vollen Weiss herein ein schwarzer, von der des vollen Schwarz herein ein weisser Randschein, welche sich nach einander zu verwaschend in einander übergehen.*) Eben so, wenn man den Versuch mit einem blauen und gelben Grunde anstellt, erscheint am vollen Blau ein gelber, am vollen Gelb ein blauer Randschein, die sich in einander verlaufen.

Hiebei tritt gewöhnlich das Phänomen des sog. Wettstreits auf. Anstatt dass beide Randscheine einander ruhig in der Mitte begegnen und sich in einer Mitteltinte verlaufen, verdrängt bald dieser bald jener Randschein den andern in einer grösseren Ausdehnung, manchmal fleckweis, oder füllt wohl selbst zeitweis den ganzen binocularen Streifen aus, oder mischt sich bald in grösserer, bald geringerer Ausdehnung zur Mitteltinte. Auch hat willkührliche Intention hiebei einen Einfluss, Wechsel hervorzurufen; obwohl solche auch ohnedem eintreten. (Von der Rolle, welche die Willkühr hiebei spielt, wird im 8. Abschnitt besonders die Rede sein.) Im Uebrigen ist der Wettstreit nicht unter allen Umständen gleich lebhaft, fehlt manchmal fast ganz, indess er unter andern Umständen ein beständiges Wechseln erzeugt.

Wie leicht zu übersehen, unterscheiden sich a-Verfahren und b-Verfahren darin, dass, während bei ersterm der homogen gedeckte Theil (als Kern) einfach zwischen zwei heterogen gedeckten (den Flügeln) enthalten ist, bei dem b-Verfahren umgekehrt der heterogen gedeckte (als binocularer Streifen) einfach zwischen zwei homogen gedeckten (den Grundmassen) enthalten ist, daher man beim b-Verfahren dieselben Erscheinungen (im binocularen Streifen) einmal erhält, die man beim a-Verfahren (in den Flügeln jederseits) doppelt erhält. Im Uebrigen aber stimmen die Erscheinungen beidesfalls wesentlich überein.

Welcker theilt in seiner Schrift über Irradiation (S. 121 ff.) einige interessante Erfahrungen mit, wonach man mit einem Auge analoge Phänomene als nach dem b-Verfahren dadurch erhalten kann, dass man mit einer Concavbrille ein in seiner obern Hälfte schwarzes, in seiner untern Hälfte weisses Papier

*) Bei oftmaliger Wiederholung dieses Versuches zu verschiedenen Zeiten habe ich doch einmal (aber sonst nie wieder) das reinste gleichförmigste glanzlose Grau im ganzen binocularen Streifen dauernd erhalten. Die Augen waren durch vorausgegangene Versuche ermüdet. Ich konnte die Erscheinung durch Willkühr nicht abändern.

(oder zwei verschiedenfarbige Papiere) so ansieht, dass der obere Theil durch die Brille, der untere mit freiem Auge gesehen wird, was natürlich voraussetzt, dass nur die halbe Pupille mit der Brille gedeckt ist. Zwischen einem ganz schwarzen und weissen Grunde zeigt sich dann ein in derselben Weise schattirter Streifen, wie wenn man nach dem b-Verfahren den schwarzen und weissen Grund bei senkrecht gegen die Verbindungslinie der Augen gehaltener Gränzlinie im Doppelbilde partiell über einander schiebt, und auch die Abänderungen dieses Versuches führen zu entsprechenden Resultaten.

Wegen des Anstrengenden dieser Versuche habe ich sie nur beiläufig wiederholen können; indess dürfte sich auch ohne genauere Wiederholung übersehen lassen, dass ihr Erfolg ungeachtet der Analogie der Erscheinung auf einem sehr andern Grunde ruht, als bei den Doppelbildern. Das Auge kann nicht für die Brille und das Freisehen zugleich accommodirt sein. Gesetzt das Glas deckt die halbe Pupille, so wird jeder Punct der Gränzlinie einen Lichtkegel geben, welcher zur Hälfte einen Zerstreuungskreis liefert, und wie mir scheint, muss hieraus der Erfolg so hervorgehen, wie er beobachtet ist. Der schattirte Zwischenstreif ist das Feld dieser Zerstreuungskreise.

Nach einer mündlichen Mittheilung von Welcker kann man mittelst dieses Versuchs selbst das bekannte Glanzphänomen darstellen; was der vorigen Auffassung nicht widerspricht, wenn, wie nicht unwahrscheinlich, dieses Phänomen mit einer zwischen Hell und Dunkel schnell fluctuirenden Empfindung zusammenhängen sollte, da unstreitig die Accommodation sich bei jenem Versuche unwillkührlich ändert.

Vermuthlich lassen auch die interessanten Versuche Volkmanns (Müller Arch. 1838. p. 373) »über die Empfindung, welche entsteht, wenn verschiedenfarbige Lichtstralen auf identische Netzhautstellen fallen«, eine solche Erklärung zu; wenn das, was (p. 381) auf den Einfluss der geänderten Aufmerksamkeit bezogen ist, auf Accommodationsänderung beziehbar sein sollte, die mit Anstrengung des Auges unwillkührlich eintreten könnte, und zwar nicht die Erscheinung des Grundes, wohl aber des schmalen Streifchens vor dem Grunde zu ändern vermöchte. Doch ist ohne neue Versuche nicht darüber zu entscheiden.

Nach einem dritten Verfahren, welches das c-Verfahren heisse, lege man eine schwarze kreisförmige oder quadratische Scheibe, beispielsweise von 1 bis 2 Zoll Durchmesser oder Seite auf weissen Grund und in kleiner Entfernung davon eine eben solche von nur ein paar Linien Durchmesser oder Seite. Darauf erzeuge man von der grossen Scheibe ein Doppelbild, womit zugleich ein solches von der kleinen Scheibe entsteht. Man führe durch geeignete Kreuzung der Sehaxen das eine Bild der grossen Scheibe über das eine der kleinen Scheibe, so dass diese die Mitte des grossen Bildes einnimmt. Jetzt zeigt sich folgendes: das Bild der grossen und das der kleinen Scheibe,

die sich nicht decken, behalten ihre reine Schwärze. Eben so bleibt das Bild der kleinen Scheibe, welches in das der grossen fällt, rein schwarz, aber das Bild der grossen Scheibe erhellt sich rings im Umkreise um das der kleinen Scheibe, mit abnehmender Helligkeit vom Umfange herein, und geht in der Nähe des Randes der grossen Scheibe wieder in reines Schwarz über, so dass sich wie bei den vorigen Versuchsformen ein äusserer weisser Randschein vom Umfange der kleinen und ein innerer schwarzer vom Umfange der grossen her entgegen kommen.

Wendet man weisse Scheiben auf schwarzem Grunde an, so zeigen sich die entsprechenden Erscheinungen, nur dass sich die Benennungen Weiss und Schwarz vertauschen; und wendet man farbige Scheiben auf andersfarbigem Grunde an, so gilt dasselbe, nur dass die Farben an die Stelle von Weiss und Schwarz treten.

Es würde von Interesse sein, genauere Bestimmungen über die Verhältnisse zu geben, in welchen sich die Ausdehnung und Intensität des äussern und innern Randscheines je nach den absoluten und relativen Grössen und Formen der Scheiben ändert; doch muss ich Versuche darüber Andern überlassen. Im Uebrigen können auch hiebei sich Wettstreitsphänomene zeigen.

Die Versuchsweise c unterscheidet sich von den vorigen b und a dadurch, dass man dabei die sich entgegenkommenden Randscheine ringsum concentrisch hat, die man bei b in einfacher Erstreckung, bei a auf zwei Seiten hat. Im Uebrigen bleiben die Verhältnisse der Randscheine auch hier wesentlich dieselben.

Unter die Versuchsform c gehört folgender interessanter Versuch von H. Meyer (Gräfe Arch. II. Abth. 2. S. 77): »Man nimmt zwei gleiche, innen geschwärzte, Pappdeckelröhren, jede von circa 15 Cm. Länge und 3 Lin. Durchmesser; die eine von beiden lässt man an beiden Enden offen, die zweite dagegen bleibt nur an ihrem Ocularende offen; an dem andern Ende wird sie durch eine ebenfalls geschwärzte Platte geschlossen, in deren Mittelpunct sich eine kleine Oeffnung von circa 2 Mm. Durchmesser befindet. Zur Bequemlichkeit im Gebrauche kann man beide Röhren so vereinigen, dass ihre Ocularenden die gleiche Entfernung von einander haben, wie die Augen, und dass ihre Axen nach vorne convergiren. Blickt man nun in diesen Apparat hinein, und bringt die beiden durch denselben gegebenen Gesichtsfelder zum Decken, so sieht man nicht, wie man es erwarten sollte, einen kleinen hellen Fleck in einem Felde von Halbschatten, sondern man sieht den hellen Fleck unmittelbar umgeben von einem gesättigten dunkeln Rande, welcher gegen die Peripherie des Gesichtsfeldes hin allmälig in Halb-

schatten übergeht. Am besten gelingt der Versuch, wenn man gegen eine matte Helle sieht, z. B. gegen den grauen Himmel, ein beleuchtetes weisses Papier, einen weissen Porzellanofen etc«.

Lässt man verschiedenartige Contouren in den Sehfeldern beider Augen sich kreuzen oder berühren, so erfolgt im Allgemeinen Wettstreit oder wechselseitige Störung, indem bald der eine bald der andere mit der anliegenden Grundfärbung hervortritt (Welcker, p. 108, Panum p. 17 ff., 92 ff.).

Der nächste Grund der hier angegebenen Erfolge kann in Nichts Anderm gesucht werden und ist auch von den bisherigen Beobachtern in Nichts Anderm gesucht worden, als in dem Einflusse des Contrastes, die Eindrücke, zwischen welchen er besteht, über gleichförmige Eindrücke dominiren zu lassen, so dass, wenn ein Contrast in einem Auge zwischen benachbarten Stellen der Netzhaut besteht und Gleichförmigkeit auf den correspondirenden Stellen im andern Auge, die contrastirenden Eindrücke in jenem merklich allein zur Geltung kommen, wenn aber ein Contrast in einem Auge mit einem andern auf correspondirenden Stellen des andern in Conflict kommt, nach Umständen ein gemischter oder wechselnder Eindruck entsteht.

Das Phänomen der sich allmälig verwaschenden Randscheine erklärt sich dadurch, dass der Contrast nicht sowohl in der Gränzlinie des Contrastirenden, als zwischen dem, was zu beiden Seiten liegt, statt findet, und mit der Entfernung von der Gränzlinie an Kraft in der angegebenen Hinsicht verliert.

Letzterm gemäss hat man zu erwarten, dass lineare Figuren, Buchstaben u. s. w. am kräftigsten sich geltend machen, weil hier nach Innen die Entfernung nirgends gross vom Umkreise ist. Auch giebt Panum ausdrücklich an, dass, wo Contouren auf correspondirenden Stellen beider Augen einander stören, »unter sonst gleichen Umständen dicke Contouren durch dünne stärker gestört werden, als umgekehrt.«

Andererseits kann man demnach erwarten, dass, wenn man ein Doppelbild von einer recht grossen z. B. schwarzen Fläche auf weissem Grunde erzeugt, die Bilder derselben in der Mitte weisslich erscheinen, oder dem Wettstreit mit Weiss unterliegen, da hier die Entfernung von dem Rande erheblich wird. Nun habe zwar ich selbst mit einer quadratischen schwarzen Fläche von 2 ½ par. Zoll Seite auf weissem Grunde, aus gewöhnlicher Sehweite, eben so rein schwarze Doppelbilder erhal-

ten, als mit kleinen Flächen;*) Welcker aber hat mir mitgetheilt, dass er in der Mitte grosser auseinandergeschobener Bilder wirklich mehrfach Wettstreitsphänomene beobachtet habe. Uebrigens sieht man wohl ein, dass in Bezug auf den Innenraum einer begränzten Fläche alle Ränder des Umkreises sich unterstützen, eine Wirkung in demselben Sinne zu erzeugen.

In wiefern etwa die Wirkung des Contrastes auf einen Einfluss der unwillkührlich dadurch bestimmten Aufmerksamkeit weiter zurückzuführen sei, und welche Rolle derselben bei den Wettstreitsphänomenen beizulegen sei, wird im folgenden Abschnitte besprochen.

Bisher haben wir die Erscheinungen betrachtet, wie sie sich darstellen, wenn die Componenten des Doppelbildes eines Objectes sich heterogen mit einem gleichförmigen Grunde oder partiell mit einander, partiell mit einem solchen Grunde decken. Das Folgende bezieht sich auf totale heterogene Deckung verschiedenartiger ausgedehnter Gründe oder verschiedenartiger begränzter Bilder bei gegebenem Grunde.

Von Versuchen, welche hieher gehören, sind insbesondere zu erwähnen die von de Haldat, Journ. de Phys. 1806; — Joh. Müller, z. vergl. Phys. d. Ges. 1826. p. 80; — Völckers, Müller Arch. 1838. p. 6; — E. H. Weber, Progr. collect. p. 116; — Volkmann, N. Beitr. z. Phys. d. Ges. p. 89; — Welcker, üb. Irradiation, p. 104 ff.; — Prevost, Pogg. Ann. LXII. 566; — A. Seebeck, Pogg. Ann. LXVIII. p. 454; — Foucauld und Regnault, l'Instit. 1849. p. 3 oder Compt. rend. 1849. XXVIII. p. 78; — Brücke, Pogg. Ann. XC. p. 606 oder Ber. d. Wien. Ak. 1853; — Dove, Berl. Monatsber. 1841. p. 251 oder Pogg. LXXI. 111; Pogg. CI. 147; — Panum, physiol. Unters. p. 39. 92 ff.

Nimmt man vor beide Augen ein verschiedenfarbiges Glas und betrachtet damit sei es einen ausgedehnten gleichförmig hellen Grund oder eine begränzte weisse Scheibe auf einem ausgedehnten dunklen Grunde, oder stellt äquivalente Versuche mit dem Stereoskop oder durch Kreuzung der Sehaxen an, indem man ausgedehnte farbige Flächen oder verschiedenfarbige Kreise, Streifen u. dergl. auf irgend einem gleichförmigen Grunde binocular combinirt, so treten im Allgemeinen die oft beobachteten und beschriebenen Phänomene des Wettstreits der Farben ein, von denen schon oben bei den Phänomenen, die von partieller Deckung der Bilder abhängen, die Rede war.

*) Mit grösseren Flächen habe ich keine Versuche angestellt, da das Auseinanderschieben sehr grosser Bilder anstrengend wird.

Meist überwiegt dabei der eine Farbeneindruck, ohne jedoch je rein zu sein (Weber, Völckers, Volkmann, Prevost, Seebeck, Dove, Panum*)), wie man besonders gut bemerkt, wenn man abwechselnd ein und das andere Auge schliesst, wo die Farbe, die jetzt in dem allein offenen Auge erscheint, sich von der, durch die andere mehr oder weniger nüancirten, welche beide zusammen sahen, verschieden zeigt, oder wenn man es so einrichtet, dass mit der binocular combinirten Farbe zugleich jede auch monocular gesehen wird (Völckers. Seebeck, Prevost). Unter sonst gleichen Umständen überwiegt im Ganzen der lebhaftere Eindruck, oder bei Ungleichheit der Augen der mit dem stärkern Auge percipirte (Weber) hinreichend in der Resultante, um die Benennung für die ganze Resultante in Anspruch zu nehmen; gewöhnlich aber ist der Grad und selbst die Richtung des Uebergewichtes nicht constant und gleichformig, sondern es tritt ein wechselndes und selbst mitunter fleckweises (Weber, Foucauld, Fechner) Uebergewicht des einen und andern Eindrucks ein. Der Wechsel tritt in der Hauptsache unwillkührlich ein, kann aber auch mehr oder weniger durch willkührliche Intention influencirt werden (Vergleiche das folgende Kapitel). Er tritt leichter und lebhafter ein, wenn jedes Gesichtsfeld gleichförmig und ohne Unterbrechung seinen Eindruck empfängt, als wenn Figuren, Kreise darauf zur Coincidenz gebracht werden**) (Welcker 116, Foucauld); bei Deckung begränzter Streifen leichter auf diesen Streifen, wenn sie breit, als wenn sie schmal sind (Panum 10). Stellenweise Ermüdung des einen Auges durch vorherigen starken

*) Joh. Müller (z. vergl. Physiol. des Ges. 80) sagt: »Wenn die beiden Augen von verschiedenem Licht beleuchtet werden, wenn sie durch verschieden gefärbte Gläser sehen, so ist bei aller Identität der Gesichtsfelder in Hinsicht des Ortes die Empfindung nicht etwa die der Mittelfarbe, des Grünen, des Violeten, des Orangenen, sondern immer nur abwechselnd in den elementarischen, die Augen verschieden beleuchtenden, Farben, bald Blau, bald Gelb u. s. w. Nur das Dunkle und Helle der beiden Farben gleicht sich zu einem mittlern Eindrucke aus, so dass das gemeinsame Gesichtsfeld, bald gelb, bald blau, weder so hell ist, als wenn das eine Auge bei geschlossenem andern nur durch gelb gefärbtes Glas sieht, noch so dunkel, als wenn der Eindruck des blauen blos gestattet ist.« Dieser, wegen ihres Urhebers wichtig erscheinenden, Angabe wird doch durch die Angaben aller oben genannten Beobachter wie meine eigene Erfahrung entschieden widersprochen, wonach nicht blos die Helligkeiten, sondern auch Farbennüancen sich durch den Einfluss beider Eindrücke modificiren.

**) Diese Angabe nach andern Beobachtern. Bei mir ist der Wettstreit lebhafter,

Lichtreiz macht das Auge bei dem Wettstreit unempfänglich für die darauf fallenden Eindrücke (Foucauld). Schliesst man, während man zwei verschiedenfarbige Gläser vor den Augen hat, das eine, so tritt die Farbe vor dem andern Auge rein auf, bei Wiederöffnung überwiegt zuerst die gegentheilige (Völckers, Fechner).

Unter Umständen gelingt es, mehr oder weniger dauernd und vollkommen die reine Mischfarbe der mit beiden Augen gesehenen Farben zu erhalten, entsprechend der, welche beim Zusammentreffen auf einer identischen Netzhautstelle zu erwarten wäre, namentlich nach längerem Durchsehen durch farbige Gläser, indem sich der Wettstreit allmälig beruhigt (Völckers, Foucauld, Fechner); doch gelingt diess keineswegs Allen oder nur unter besonders begünstigenden Umständen. *)

In der That finden hier individuelle Verschiedenheiten statt. Ich selbst erhalte beim Blick in den Himmel mit meinem dunkelrothen und dunkelgrünen Glase, gewöhnlich mit anfänglich starkem Uebergewicht des Grün oder nach einigem Wettstreit, fast immer ein ruhiges nächtiges Gesichtsfeld, das ich nur noch grau nennen kann, und richte ich die Augen mit den Gläsern von da auf ein weisses Feld auf schwarzem Grunde, so erscheint mir dasselbe gegen den schwarzen Grund schlechthin weiss; auch habe ich ein solches mehrmals nach längerem Wettstreit weiss werden und ruhig oder fast ruhig so bleiben sehen, wenn ich mich direct mit den Gläsern ohne vorherigen Blick in den Himmel dahin wendete, wie denn schon früher Völckers, Foucauld und Regnault Entsprechendes gefunden haben; indess Andere (u. a. Funke, Ruete, nach mir gemachter Mittheilung) hiezu nicht zu gelangen vermochten, so dass Völckers Angabe selbst mehrfach bestritten worden ist.

Ausserdem sind manche Hülfsmittel angegeben worden, eine möglichst gleichformige binoculare Mischung der Farbeneindrücke zu erzielen oder zur Erkenntniss zu bringen, worüber man namentlich die S. 389 angeführten Abhandlungen von Völckers, Prevost, Seebeck, Brücke, Dove, Foucauld und Regnault vergleichen kann.

wenn ich mit denselben Gläsern (roth, dunkelgrün, oder blau, röthlichgelb) ein kleines weisses Feld auf schwarzem Grunde, als den Himmel durch das Fenster betrachte.

*) Sehr helle Gläser muss man nicht dabei anwenden, da sie nichts beweisen; denn selbst wenn man mit beiden Augen durch ein und dasselbe sehr hellfarbige Glas sieht, scheint nach einiger Zeit die Färbung verschwunden.

Besonders beachtenswerth sind hierunter die Methoden von Dove, und von Foucault und Regnault, reines Weiss durch binoculare Composition von Farben, welche durch chromatische Polarisation in genau complementärem Verhältnisse hergestellt sind, zu erhalten, wozu ich im 13. Abschnitt noch eine Methode der binocularen Composition von Weiss aus subjectiven Färbungen fügen werde.

Combinirt man eine Zeichnung Schwarz auf Weiss stereoskopisch mit einer entsprechenden Weiss auf Schwarz ausgeführten, so tritt bei der gleichförmigen Mischung der Eindrücke die Erscheinung des Glanzes auf, wobei die weissen und schwarzen Linien beider Zeichnungen sich nicht decken, sondern parallel neben einander erscheinen. Auch lässt sich das Phänomen des Glanzes noch auf manchen andern Wegen erzielen. Selbst habe ich keine anderen Versuche über dieses Phänomen als zu einer gelegentlichen Constatirung desselben angestellt.

Vergl. über dieses Phänomen insbesondere: Dove, Pogg. LXXXIII. p. 169 oder Berichte d. Berl. Akad. 1851. S. 261; hiezu seine Bemerk. gegen Brewster ebendas. 1852. p. 691. — Brewster, Athenaeum 1855. p. 1120. — Welcker, über Irradiation, p. 118. — Oppel, Pogg. C. p. 462; Jahresber. d. phys. V. zu Frankf. 1856. p. 55. — Helmholtz, Verhandl. d. naturhist. Ver. d. Rheinl. 1856. p. XXXVII. (Krönig Fortschr. f. 1856. p. 804. — Bu. (?), Krönig Fortschr. f. 1854. p. 310.

Legt man zwei complementärgefärbte Papierbogen neben einander, auf jeden ein weisses Feld, und nimmt zwei Gläser, respectiv von der Farbe der Bogen, das eine vor das eine, das andere vor das andere Auge, und betrachtet die beiden weissen Felder durch die Gläser ohne Doppelbilder zu erzeugen, so erscheint nach meiner Erfahrung jedes lebhaft mit der Complementärfarbe seines Grundes; dasselbe ist der Fall, wenn man den Versuch einzeln mit jedem Bogen anstellt. Doch zeigen sich bei ungleich dunkeln Gläsern leicht Wettstreitsphänomene auf dem Felde, was auf dem mit dem dunklern Glase homolog gefärbten Grunde liegt. Schwarze Felder statt weisser nehmen keine Färbung an.

VIII.

Vom Einflusse der Aufmerksamkeit.

Wir haben gesehen, dass, wenn Eindrücke sich heterogen decken, nach Umständen der eine, nach Umständen der andere, zur Präponde-

ranz in der resultirenden Empfindung kommen kann. Von Schwarz und Weiss, die sich heterogen decken, scheint constant blos das Schwarz da zu sein, wenn jenes gegen die Umgebung contrastirt, dieses nicht; blos das Weiss, wenn es das Weiss ist, was gegen die Umgebung contrastirt, indess das Schwarz nicht contrastirt. Bei fehlenden oder gleichen Contrastverhältnissen tritt hingegen der bekannte Wettstreit zwischen den sich heterogen deckenden Eindrücken ein; es überwiegt in mehr oder weniger unbestimmtem Wechsel bald der eine bald der andere Eindruck.

Der Kürze halber werde ich alle Phänomene, welche darin beruhen, dass je nach Umständen der eine, nach Umständen der andere von correspondirenden Eindrücken in der Resultante zur vorwiegenden Geltung kommt, unter dem Namen der Präponderanzphänomene zusammenfassen. Sie theilen sich in solche der erstangeführten Art, wo unter gegebenen Verhältnissen der objectiven Reize ein gegebenes Präponderanzverhältniss dauernd besteht, und solche der letztangeführten Art, wo es aus subjectiven Gründen wechselt oder die Wettstreitsphänomene.

Es fragt sich, welche Rolle die Aufmerksamkeit bei den Präponderanzphänomenen spielt.

Von der Aufmerksamkeit spreche ich hier nur als von einer in unserer inneren Erfahrung gegebenen Thatsache, ohne auf ihr unbekanntes Wesen einzugehen. Wenn man, wie es meinerseits geschieht, das ganze Geistesleben als körperlich fundirt ansieht, so wird man die Aufmerksamkeit durch allgemeinere Verhältnisse des Gehirnlebens so gut körperlich fundirt zu halten haben, als die Empfindung durch speciale. Aber hier handelt es sich blos um das Erfahrungsmässige, welches uns betreffs der Aufmerksamkeit nur psychischerseits geboten ist.

Nun finden wir erfahrungsmässig, dass, je nachdem die Aufmerksamkeit, das, was wir als solche fühlen, willkührlich oder unwillkührlich, in diesem oder jenem Sinne gerichtet wird, und auch dieser Richtung können wir uns durch innere Wahrnehmung bewusst werden, eine Empfindung vor der andern ins Bewusstsein treten oder daraus schwinden kann. Diess macht sich nicht nur zwischen Empfindungen verschiedener Sinnesgebiete, z. B. Gesicht und Gehör, geltend, sondern auch zwischen Empfindungen desselben Gebietes. Indem wir z. B.

unsre Aufmerksamkeit auf den centralen Theil des Gesichtsfeldes richten, schwindet das seitlich Gesehene aus dem Bewusstsein; und indem wir auf die Worte eines Redenden achten, kann andres Geräusch ganz unbemerkt vorübergehen, indess wir doch Jenes und Dieses sofort wahrnehmen, wenn wir die Aufmerksamkeit absichtlich darauf richten.

Es liegt nahe, diesen Einfluss der Aufmerksamkeit auch bei den Präponderanzphänomenen in Anspruch zu nehmen, sofern es sich dabei um die Frage handelt, mit welcher Geltung Eindrücke auf correspondirenden Netzhautstellen in den resultirenden Eindruck eingehen. Man kann kurz antworten: mit solcher Geltung, als ihnen die willkührliche oder unwillkührliche Richtung und Stärke der Aufmerksamkeit verleiht.

Ich will diese Auffassung, insofern sie als massgebend bei Repräsentation der Erscheinungen angewandt wird, kurz die Aufmerksamkeitstheorie nennen, und zuerst im Sinne derselben die Phänomene erläutern.

Dass ein schwarzes Feld auf weissem Grunde im Doppelbildsversuch ungeachtet der binocularen Deckung mit dem weissen Grunde noch rein schwarz erscheint, ist zunächst (S. 338) auf eine Wirkung des Contrastes zurückgeführt worden; aber man kann von da weiter zur Aufmerksamkeit zurückgehen. Jeder Contrast zieht unwillkührlich unsre Aufmerksamkeit auf sich. Während einer rauschenden Musik ist unsre Aufmerksamkeit vielleicht anders beschäftigt, aber eine momentane Pause wird sie sofort auf die Sphäre des Gehörs lenken. Hier haben wir im Gebiete des Gehörs nach einander, was wir im Gebiete des Gesichts gleichzeitig haben, wenn wir dem einen Auge einen schwarzen Fleck auf weissem Grunde, d. h. eine räumliche Pause im Lichteindruck darbieten, wo das andre Auge blos gleichförmiges Weiss hat. Die Pause im Reize afficirt uns hier wie dort stärker als der Reiz, nicht als Reizmangel, sondern als Reizunterschied, welcher die Aufmerksamkeit auf sich lenkt.

Bei den Wettstreitsphänomenen liegt die Rolle der Aufmerksamkeit noch klarer zu Tage; je nachdem sie wechselnd für den Eindruck auf einer oder der andern Netzhaut sich stärker anspannt, geht diese mit grösserm Gewicht in die Resultante ein.

Diese Auffassung würde, da die Präponderanzphänomene zum Theil unwillkührlich erfolgen, nicht statthaft oder nicht ausreichend sein, wenn wir Aufmerksamkeit überhaupt blos eine willkührlich gerich-

tete nennen wollten, aber wir würden dann im Namen scheiden, was in der Sache identisch ist. Wenn jemand in tiefes Nachdenken versunken ist, so wird er nicht sehen und hören, was um ihn vorgeht, weil seine Aufmerksamkeit von der Sphäre des Gesichts und Gehörs abgezogen ist, aber ein plötzlicher Blitz oder Knall wird sicher sein Nachdenken unterbrechen, das, was wir Aufmerksamkeit nennen, als solche fühlen, unwillkührlich auf diese Sphäre richten. Willkühr und Reiz kommen überhaupt in mannichfaltigsten Conflict in Bestimmung der Richtung der Aufmerksamkeit. Von einem Schmerze können wir zeitweis die Aufmerksamkeit willkührlich abziehen; so lange es der Fall ist, fühlen wir ihn nicht; aber er macht seine Ansprüche an die Richtung der Aufmerksamkeit fortwährend geltend, und selbst ein starker Wille hält nicht auf die Dauer Stand dagegen.

Bei der willkührlichen Richtung der Aufmerksamkeit selbst ist der bewusste Willensact, durch den wir die Aufmerksamkeit richten, von dem Erfolge, d. i. der gerichteten und fixirten Aufmerksamkeit, wohl zu unterscheiden. Jener Act erfolgt ein- für allemal, und dann bleibt die Aufmerksamkeit gerichtet, ohne dass wir einen fortgesetzten oder neuen bewussten Willensact nöthig haben, sie in dieser Richtung zu erhalten, sofern nicht abziehende Einflüsse oder Ermüdung eintreten. Die durch den Willen einmal gerichtete Aufmerksamkeit ist weder im Gefühle noch im Erfolge von der durch einen Reiz unwillkührlich gerichteten zu unterscheiden; und es ist nicht nachzuweisen, dass sie andere Gesetze bezüglich der Geltendmachung der Phänomene befolge.

Wenn aber dem so ist, wenn die Aufmerksamkeit eben so gut willkührlich als unwillkührlich gerichtet werden kann, und wenn die Aufmerksamkeit wirklich das Bestimmende bei unsern Phänomenen ist, so muss auch die willkührliche Richtung der Aufmerksamkeit jedenfalls mitbestimmend bei unsern Phänomenen sein, d. h., die Geltung, mit der die componirenden Eindrücke auf correspondirenden Netzhautstellen in die Resultante eintreten, zwar nicht allein von der willkührlichen Richtung der Aufmerksamkeit abhängen, aber mit abhängen, und die Willkühr bald in Conflict, bald in Einstimmung mit der unwillkührlichen Bestimmung wirken können.

Dass dem so sei, dafür sprechen die Angaben einer Mehrzahl von Beobachtern über die Wirkung der willkührlichen Richtung der Aufmerksamkeit bei den Wettstreitsphänomenen. Es ist durch absichtliche

Richtung der Aufmerksamkeit möglich, das Uebergewicht des einen und andern Eindrucks mitzubestimmen. Mit Fleiss führe ich alles Dasjenige, was mir darüber bekannt worden ist, mit den eigenen Worten der Beobachter an.

Funke.*) »Liegt (im Stereoskop) die gelbe Oblate rechts, die blaue links, so kann ich willkührlich gelb oder blau sehen, je nachdem ich die Aufmerksamkeit auf das rechte oder linke Auge richte, ohne das andere zu schliessen. . . . Der Wechsel der Erscheinungen hängt offenbar von einem Spiel der Aufmerksamkeit ab, welches unwillkührlich eintritt.«

Völckers**) p. 61. »Bei meinen ersten Versuchen mit farbigen Gläsern erschien das betrachtete Object immer nur in einer der beiden Farben, je nachdem der Eindruck des einen oder des andern Auges zum Bewusstsein gelangte; dachte ich dann die nicht gesehene Farbe mitzubeachten, so schwand die erstere, und diese allein machte sich geltend.«

p. 63. »Eine weisse Fläche, z. B. eine Wand, ein Bogen Papier durch zwei verschiedene, dicht vor den Augen gehaltene, Gläser angesehen. . . . . Sucht man genau die Farbe der Fläche zu fassen, so sieht man oft die eine Farbe mit der andern wechseln, indem man die nichtgesehene Farbe durch Intention hervorruft, und die beiden Farben zum Verschmelzen nicht kommen lässt.«

Volkmann***) p. 97. »Eine gewisse Modification der Farbenempfindun in dem einen Auge durch den Einfluss des andern scheint mir nicht wohl wegzuleugnen; aber dieser wechselseitige Einfluss ist keineswegs eine im Sehen verschmolzene Thätigkeit. Jedes Auge sieht abwechselnd seine Farbe, und selbst der Wille hat auf den Wechsel einigen Einfluss.«

p. 99. »Und doch ist es bei sich deckenden Doppelbildern ganz unleugbar, dass die Farben beider Bilder abwechselnd im Bewusstsein auftreten (obschon nicht in ursprünglicher Reinheit) und dass man willkührlich sich von dem einen oder andern Farben-Eindruck lossagen kann.«

E. H. Weber.†) »Homines, qui attentionem vicissim ad alterutrum oculum convertere ab altero oculo avertere consueverunt, per vitra illa colorata perspicientes, res vicissim nunc hujus nunc illius vitri colore imbutas videbunt et saepe adeo maculas diverse coloratas in rebus animadvertent.«

Welcker.††) »Der Wettstreit der Sehfelder kann an jeder Stelle des gemeinschaftlichen Sehfeldes zu Gunsten des einen oder andern der beiden Lichteindrücke aufgehoben werden, indem wir durch unsern Willen dem einen oder andern Lichteindruck unsere Aufmerksamkeit zuwenden. In gleicher Weise wird

*) Lehrb. d. Physiol. (Wagners Lehrb. 4. Aufl.) 1856. S. 875.

**) Müller Arch. 1838. p. 61. 63.

***) N. Beitr. z. Physiol. d. Ges. p. 97. 99.

†) Progr. coll. 118.

††) Ueber Irradiat. 1852. p. 107.

der Wettstreit aufgehoben — und diess selbst gegen die Wahl unseres Willens — wenn eines der Netzhautbilder die Veranlassung, unsere Aufmerksamkeit ihm zuzuwenden, in sich selber birgt.«

Nach alle dem scheint die Aufmerksamkeitstheorie wohl begründet; auch werden von Funke,*) H. Meyer,**) Welcker***) die Phänomene im Sinne dieser Theorie gedeutet, wogegen Panum, in Opposition gegen Meyer, die Erweckung der Aufmerksamkeit bei den Contrastphänomenen vielmehr nur als einen Nebenerfolg der Contrastwirkung fasst, der aber nicht als causal dabei in Betracht zu ziehen sei.

Als eine mittlere Ansicht zwischen beiden liesse sich die folgende aufstellen:

Bei der willkührlichen Richtung der Aufmerksamkeit erscheint die verhältnissmässige Geltung, welche ein Phänomen gegen das andere in der Sinnlichkeit gewinnt, durch die Richtung und Stärke der Aufmerksamkeit bestimmt; bei der unwillkührlichen Richtung erscheint umgekehrt die Richtung und Stärke der Aufmerksamkeit durch ein unabhängig davon gegebenes Verhältniss der sinnlichen Affectionen des Bewusstseins bestimmt. Um beides unter einen gemeinsamen Gesichtspunct zu bringen, lässt sich annehmen, dass eine bestimmte Richtung und Stärke der Aufmerksamkeit und ein bestimmtes Verhältniss der Geltung zwischen gegebenen Phänomenen so wesentlich und unmittelbar zusammenhängen, dass man nicht eigentlich eins als prius des Andern ansehen kann; und nur anzuerkennen hat, dass beide gemeinsam eben so von Innen heraus durch Willkühr, als von Aussen unwillkührlich durch die verhältnissmässige Angriffsweise der Reize bestimmt werden und beide Bestimmungsweisen selbst in Conflict mit einander treten können. Es wird aber hier, wie bei jeder Wechselabhängigkeit, immer möglich und unter Umständen gestattet sein, die Abhängigkeit von dieser oder jener Seite her zu verfolgen, indem man immer fragen kann, wie, wenn die eine Seite gegeben ist, sich die andere dazu verhalten muss.

Wenn ich nicht irre, ist diese Fassung der Aufmerksamkeitstheorie da, wo sie überhaupt anwendbar ist, d. h. wo eine functionelle Abhängigkeit des Ueberwiegens dieser oder jener Eindrücke von der Richtung der Aufmerksamkeit überhaupt besteht, die geeigneteste zur Repräsen-

*) A. a. O.

**) Gräfe's Arch. II. Abth. 2. S. 77 ff.

***) Ueber Irradiat. p. 108.

tation der Verhältnisse, und ich würde ihr daher auch bei den Präponderanzphänomenen den Vorzug geben, falls sich ihre Anwendbarkeit auf sie erstrecken sollte, in welcher Hinsicht ich im Vorigen Alles geltend gemacht zu haben glaube, was Seitens des innern Zusammenhanges und Seitens der Erfahrung für diese Anwendbarkeit spricht. Auch bin ich mit Fleiss darin so weit gegangen, weil die negativen Resultate, die ich im Folgenden dagegen geltend mache, die Möglichkeit, durch positive Beweise auf einem andern Wege überboten zu werden, vielleicht noch nicht ganz ausschliessen. In der That aber vermöchte ich nach Folgendem der, von mir selbst anfangs mit Vorliebe acceptirten und in voriger Weise zurechtgelegten, Aufmerksamkeitstheorie für die Präponderanzphänomene des Auges nicht mehr beizupflichten, ohne sie desshalb für andre Verhältnisse der sinnlichen Wahrnehmung aufzugeben.

Zuvörderst ist im Allgemeinen zu bemerken, dass das Vermögen der Aufmerksamkeit, von gleichzeitigen Eindrücken den einen vor dem andern zur Geltung zu bringen, seine Gränzen und Bedingungen hat. Wenn sehr verschiedenartige Geräusche in dasselbe Ohr eindringen, gelingt die trennende Wahrnehmung des einen von dem andern durch demgemässe Richtung der Aufmerksamkeit. Sind es zugleich angeschlagene Töne desselben Instruments, so mag die gesonderte Auffassung des einen vor dem andern Musikern gelingen, mir selbst gelingt es nicht, einen Ton vor dem andern herauszuhören, und dasselbe sagt mir E. H. Weber.*) In der Sphäre des Gesichtssinnes gelingt es sicher, von Eindrücken auf differenten wie disparaten Stellen den einen vor dem andern durch demgemässe Richtung der Aufmerksamkeit ins Bewusstsein zu heben; niemals und unter keiner Bedingung aber gelingt es, wenn sie auf einer identischen Stelle zusammentreffen. Wie man die Aufmerksamkeit anstrenge, man kann aus Grün, was man mit beiden Augen oder einem Auge in gewöhnlicher Weise sieht, nicht Gelb und Blau abwechselnd zum Bewusstsein bringen, keinen Wettstreit zwischen beiden erzeugen. Doch sind Präponderanzphänomene auf einer identischen Stelle

*) Der Musikdirector Hauptmann in Leipzig hat mir auf mein Befragen erklärt, dass er allerdings im Stande sei, aus einem Akkord gleichzeitig angeschlagener Töne den einen oder andern besonders herauszuhören, und zwar nicht blos, wenn er unrein sei, sondern auch wenn der ganze Akkord rein sei. Jedenfalls aber bleibt diess eine viel schwierigere Sache, als wenn es die Trennung ungleichartiger Geräusche von einander durch Aufmerksamkeit gilt.

in gewissem Sinne so gut möglich, als auf correspondirenden Stellen; nur eben nicht durch willkührliche Richtung der Aufmerksamkeit. Es wird z. B. einem Auge Weiss, eine Zusammensetzung aller Farbenstrahlen, dargeboten; aber nach Umständen überwiegt der Eindruck des Roth, nach Umständen des Grün, je nachdem das Auge vorher für die gegentheilige Farbe ermüdet wurde, oder gegenwärtig für die gegebene erregbarer ist; wie die Thatsache der subjectiven Nach- und Nachbarfarben beweist. Es kann selbst Wettstreit auf diesem Wege entstehen, wie ein zuerst von Plateau angestellter, von Brücke wie von mir selbst bestätigter, Versuch*) beweist. Mit alle dem hat aber die Aufmerksamkeit nichts zu schaffen, und bei alle dem leistet die willkührliche Richtung der Aufmerksamkeit nichts. Also bleibt zunächst noch die Frage, ob sie bei den von uns betrachteten Präponderanzphänomenen auf correspondirenden Stellen etwas zu leisten vermag, was sie auf einer identischen Stelle nicht leisten kann, und ob nicht vielmehr die Präponderanzphänomene beidesfalls von denselben, freilich noch keineswegs erforderlich ins Reine gebrachten, Verhältnissen der sinnlichen Erregung und Stimmung abhängen, die jedenfalls die Aufmerksamkeit nichts angehen, auf correspondirenden Stellen aber aus dem S. 345 angegebenen Grunde ein freieres Spiel haben können, als auf einer identischen.

Zur Entscheidung wird es meines Erachtens schliesslich darauf ankommen, ob wirklich die willkührliche Richtung der Aufmerksamkeit, so wie es angegeben wird, einen mitbestimmenden Einfluss auf die Richtung des Erfolges bei den Präponderanzphänomenen auf correspondirenden Stellen hat. Wäre es nicht der Fall, so wäre unstreitig kein Grund, ja wäre es ganz müssig, der unwillkührlichen Richtung der Aufmerksamkeit etwas beizulegen, was der willkührlichen Richtung nicht zukommt; wäre es der Fall, so wäre umgekehrt kein Grund, jener abzusprechen, was dieser zukommt.

Nun haben nach den obigen Anführungen allerdings verschiedene Beobachter, und sehr zuverlässige Beobachter, von einem Einflusse der willkührlichen Richtung der Aufmerksamkeit bei den Wettstreitsphänomenen gesprochen, bald diese, bald jene Farbe zum Verschwinden oder Uebergewicht zu bringen. Aber die Angaben derselben beruhen offenbar in dieser Hinsicht nur auf beiläufigen Beobachtungen, und ich selbst

*) Pogg. XXXII. p. 550.

habe so lange nicht nur auf Grund beiläufiger, sondern wiederholt darauf gerichteter, Beobachtungen denselben Einfluss zweifelsfrei zu finden geglaubt, dass ich jetzt, wo mir derselbe mehr als zweifelhaft geworden ist, auch jenen Angaben kein Zutrauen mehr zu schenken vermöchte.

Im Allgemeinen ist zu erinnern, dass, wenn man überhaupt einen Effect bei diesen Phänomenen von der willkührlichen Richtung der Aufmerksamkeit erhalten will, es nicht hinreicht, dass man an die eine und andre Farbe denkt, mit der innern Willenserklärung, sie solle erscheinen, sondern man muss mit dem einen Auge vorzugsweise vor dem andern sehen wollen, es mit stärkerer Intention gebrauchen als das andere, es in eine gewisse Spannung versetzen, wie man überhaupt mit den Sinnesorganen thut, wenn man sie durch Aufmerksamkeit für eine sinnliche Wahrnehmung nach gewisser Richtung in Anspruch nimmt. In der That braucht man nur jetzt recht aufmerksam auf etwas zu horchen, dann wieder etwas aufmerksam anzusehen, so wird man finden, (und selbst Ausdrücke des gewöhnlichen Lebens beziehen sich hierauf) wie man unwillkührlich eine fühlbare Intention, die ich Aufmerksamkeitsspannung nenne, einesfalls mehr seitlich in die Ohren, andernfalls mehr nach vorn in die Augen verlegt, die man denn auch mit willkührlicher Anspannung der Aufmerksamkeit erzeugt und nach Massgabe stärker empfindet, als man die Aufmerksamkeit mehr anspannt.

Ich stellte nun meine Beobachtungen theils so an, dass ich zwei gleich grosse verschiedenfarbige Felder, z. B. ein rothes und grünes, rothes und blaues auf schwarzem Grunde durch Kreuzung der Sehaxen zur binocularen Deckung brachte, theils so, dass ich diese Deckung mittelst des Stereoskops vermittelte, theils endlich so, dass ich ein quadratisches weisses Feld (von etwa $^3/_4$ bis zu mehrern Zollen Seite bei verschiedenen Versuchen) auf schwarzem Grunde einfach mit beiden Augen fixirte, indess ich vor einem Auge ein rothes, vor dem andern ein grünes oder blaues Glas hatte. Ich habe auf allen drei Wegen entsprechende Resultate erhalten; wende aber am liebsten das dritte Verfahren an, wobei man die natürliche Augenstellung beibehält. Bei meinem rothen und dunkelgrünen Glase ist der unwillkührliche Wettstreit zwischen Roth und Grün auf dem weissen Felde ziemlich lebendig, und die Zuziehung des Spiels der Aufmerksamkeit hat mir in oft wiederholten Versuchen folgende Resultate gegeben, von denen die, welche ich zuerst anführe, die Aufmerksamkeitstheorie auf das directeste zu bestätigen

scheinen, indess sich durch die weiter folgenden diese Bestätigung nur als eine Täuschung erweist.

Gesetzt, während ich das weisse Feld mit dem rothen und grünen Glase vor einem und dem andern Auge betrachte, präponderire eben das Roth, so brauche ich nur willkührlich mein Auge hinter dem grünen Glase mit intendirter Aufmerksamkeit anzuspannen, um alsbald das Roth vom Grün verdrängt zu sehen, und dann wieder das Auge hinter dem rothen Glase, um das Grün durch Roth verdrängt zu sehen. Diese Wechsel sind mir so oft hinter einander in so bestimmter Abhängigkeit von der willkührlichen Anspannung an verschiedenen Tagen gelungen, dass mir kein Zweifel bleiben konnte, es walte hier wirklich ein Abhängigkeitsverhältniss ob. Nur, wenn ich längere Zeit die Aufmerksamkeit auf einer Seite fixirt halten wollte, stellten sich auch mitunter unwillkührliche Wechsel in entgegengesetztem Sinne ein; und wenn ich die Wechsel lange nach Willkühr fortsetzte, fingen sie endlich an, dem Willen nicht mehr wie früher zu pariren, erfolgten träger oder gar nicht mehr oder mitunter wider den Sinn des Gewollten, was jedoch theils auf Ermüdung der Aufmerksamkeit, theils darauf geschrieben werden konnte, dass die Willkühr ja nicht als das allein Bestimmende, sondern nur Mitbestimmende in Anspruch zu nehmen. Dazu nehmen bei mir nicht blos die willkührlichen, sondern auch unwillkührlichen, Wechsel mit der Dauer der Betrachtung ab und pflegen endlich aufzuhören.

Inzwischen machte ich folgende Bemerkung: wenn man die Aufmerksamkeit von einem Auge auf das andre umsetzt, so bewegt man meist unwillkührlich ein wenig die Augen, und schiebt sich in der Regel das binocular einfach gesehene Bild ein wenig auseinander, so dass ein Bild ein wenig über das andre greift, und das Bild in der neugewollten Farbe scheint entweder als oberes das andre mit der früher gesehenen Farbe zu verdecken, oder als unteres durch kräftigeres Durchscheinen dessen mehr verblassende Farbe zu verdrängen, was ich bald so, bald so finde. Es schien mir, dass der Wechsel der Farbe durch Willkühr mit der kleinen Augenbewegung in einer gewissen Beziehung stände; wenn schon bei möglichst guter Fixation des Bildes das Auseinanderweichen der Bilder manchmal kaum merklich oder nicht sicher constatirbar ist, ohne dass desshalb der Wechsel der Farbe durch Willkühr fehlt. Inzwischen blieb doch eine gewisse Abänderung der physischen Verhältnisse des Auges bei jeder neuen willkührlichen Aufmerk-

samkeitsspannung kaum auszuschliessen. Nun sind nach meinen eigenen *) wie Auberts **) Versuchen Nachbilder geneigt, bei jeder raschen Bewegung der Augen, Augenlider, ja selbst des übrigen Körpers zu verschwinden, schwache Lichtunterschiede, die bei ruhendem Auge unmerklich sind, treten bei schneller Augenbewegung merklich hervor; es konnte also der Verdacht entstehen, dass das Verschwinden der jeweilig präponderirenden Farbe und das Auftreten der andern dafür bei unsern Versuchen blos ein ähnlicher Effect einer innern oder äussern Bewegung sei, wobei die Aufmerksamkeit gar nicht wesentlich in Betracht komme. Dass dem aber wirklich so sei, muss ich daraus schliessen, dass bei näherer Untersuchung die Richtung des Erfolges sich nicht wesentlich abhängig von der Richtung der Aufmerksamkeitsspannung gezeigt hat, womit der wesentlichste Punct, welcher das Phänomen von Aufmerksamkeit abhängig erscheinen lassen könnte, wegfällt. Jede neue Aufmerksamkeitsspannung begünstigt nur überhaupt einen Wechsel in der Richtung des Erfolges, der aber eben so gut im einen als dem entgegengesetzten Sinne sein kann. Diess geht näher aus Folgendem hervor.

Bei den angeführten Versuchen, welche den Einfluss der Willkühr zu beweisen schienen, war ich natürlicherweise so verfahren, dass ich, wenn ich Roth sehen wollte, während Grün da war, die Intention oder Aufmerksamkeitsspannung auf das Auge mit dem rothen Glase verlegte, und wenn ich Grün sehen wollte, während Roth da war, die Intention auf das Glas mit dem grünen Glase verlegte. Nun aber fand ich, dass, wenn eben das Roth präponderirte, es ganz dasselbe war, ob ich die Intention im Auge mit dem rothen oder grünen Glase steigerte, der Wechsel zum Grün trat einesfalls wie andernfalls ein; und entsprechend der Wechsel zum Roth, wenn gerade Grün präponderirte; kurz, dass es überhaupt nur nöthig war, wenn keine besondre Aufmerksamkeitsspannung da war, diese in einem Auge, beliebig welchem, oder auch beiden zugleich, hervorzurufen, oder, wenn eine einseitige Spannung da war, mit dieser zu wechseln, um damit eine Disposition zum Wechsel der Farbe hervorzurufen, ohne dass die eine Anordnung des Versuches in dieser Hinsicht den geringsten Vortheil vor der umgekehrten zu haben

*) Pogg. XLIV. 525.

**) Moleschott Unters. IV. 236.

schien. Ich konnte den Wechsel in verkehrtem Sinne eben so leicht, eben so oft hinter einander hervorrufen, als im rechten, d. h. das Grün durch Umsetzung der Spannung auf das Auge mit dem rothen Glase, das Roth durch Umsetzung auf das Auge mit dem grünen Glase zur Präponderanz bringen, wenn die Verhältnisse danach lagen. Bei der Wichtigkeit der Frage habe ich diese Versuche sehr oft an verschiedenen Tagen wiederholt, und immer dasselbe Resultat wieder erhalten.

Ausserdem habe ich gefunden, dass ein kräftiges momentanes Zuschlagen der Augenlider den Wechsel der Farbe in ähnlicher Weise provocirt, als es mit einer neuen Aufmerksamkeitsspannung der Fall ist; nicht minder vermochten Grabau und Zöllner auf diese Weise sofort einen Wechsel zu erzeugen.

Hienach nun leugne ich zwar nicht den Einfluss willkührlicher Intention der Aufmerksamkeit schlechthin bei diesen Phänomenen; aber, so weit meine Erfahrungen reichen, den charakteristischen Einfluss der Richtung der Aufmerksamkeit auf die Richtung des Resultates und glaube, da er fehlt, dass der ganze Erfolg von einer Nebenwirkung der geänderten Richtung der Aufmerksamkeitsspannung ähnlicher Art abhänge, als ich oben S. 402 bezeichnete, ohne darüber etwas Bestimmteres angeben zu können.

Eben so wenig beabsichtige ich mit Vorigem, den Einfluss der Aufmerksamkeit auf die leichtere oder schwerere Unterscheidung differenter oder disparater Eindrücke zu leugnen; ich glaube nur eben, dass hievon kein Schluss auf die Präponderanzphänomene zu machen.

Uebrigens ist der Einfluss der Erneuerung oder des Wechsels der Aufmerksamkeitsspannung bei unsern Versuchen immer auch nur ein bedingter, vielmehr ein begünstigender als zwingender, und ich behaupte keineswegs, dass man sicher und unter allen Umständen durch einen Wechsel der Aufmerksamkeitsspannung einen Wechsel des Phänomens erzeugen könne; sondern nur, dass unter den Umständen, wo man einen solchen erzeugen kann, er eben so leicht im verkehrten als rechten Sinne erfolgt, worauf es bei der jetzigen Frage ankommt. Wenn bei mir der unwillkührliche Wechsel träg ist oder gar nicht zu Stande kommt, vermag ich auch schwer oder gar nicht einen willkührlichen Wechsel zu erzeugen. So nimmt, wie schon bemerkt, bei fortgesetzten Versuchen mit einem begränzten Felde in der angegebenen Weise der unwillkührliche Wettstreit und der Einfluss des

Wechsels der Aufmerksamkeitsspannung auf den Wechsel der Erscheinung zugleich bei mir ab. Auch der Schlag der Augenlider verliert dann seine Wirkung. Wenn ich mit zwei complementärgefärbten Gläsern in den Himmel statt auf ein weisses Feld auf schwarzem Grunde sehe, so finde ich den Wettstreit überhaupt sehr träg oder fehlend, und kann dann auch in keiner Weise durch willkührliche Intention, wie ich immer die Vorstellung oder Augen dabei anstrengen mag, einen Wechsel erzeugen. In einigen Fällen aber, wo der unwillkührliche Wettstreit nicht fehlte, schien auch die Willkühr wieder einigen Einfluss zu gewinnen; aber nur ganz in der oben angegebenen Weise so, dass neue Spannung der Augen einen Wechsel überhaupt begünstigte, ohne dass die Richtung der Aufmerksamkeit auf die Richtung des Erfolges einen Einfluss äusserte.

Wenn ich das Doppelbild eines begränzten kleinen Feldes auf irgend einem gleichförmigen Grunde nach der Weise der Versuche S. 378 ff. auseinanderschiebe, so dass Bild und Grund sich heterogen decken, so findet, wie schon früher angegeben, eben so wenig ein unwillkührlicher als willkührlicher Wettstreit zwischen dem Eindrucke des Bildes und des Grundes statt, sondern der Eindruck des begränzten Bildes bleibt in constantem Uebergewicht; auch vermag ich nicht, je nachdem ich eins oder das andre Auge anspanne, das eine Bild vor dem andern heller oder dunkler zu machen.

Eben so wenig als bei fehlendem unwillkührlichen Wechsel lässt sich bei sehr lebhaftem unwillkührlichen Wechsel ein Einfluss der Aufmerksamkeit auf den Wechsel nachweisen, indem dann der Wechsel unbekümmert, ob man die Aufmerksamkeit einseitig fixirt, so oder so richtet, fortgeht. Diess zeigte sich bei Wiederholung meiner Beobachtungen durch Grabau, Ruete und Zöllner. Sie erklärten bei unabhängig von einander angestellten Versuchen, Einer wie der Andre, der Wechsel gehe rasch und ganz unregelmässig vor sich und die Richtung der Aufmerksamkeitsspannung äussere keinen erkennbaren Einfluss auf seine Fixation und Regulirung. Auch Feddersen konnte einen solchen Einfluss nicht constatiren.

Selbst Funke und Volkmann wagten nach einigen neuen Versuchen, die ich sie anzustellen bat, sich nicht mehr entschieden über einen Einfluss der Richtung der Aufmerksamkeit auszusprechen; die Versuche gaben kein constantes Resultat in derselben Richtung.

Unter Zugeständniss der allgemeinen Möglichkeit, dass meine Weise, die Aufmerksamkeit in Anwendung zu setzen, nicht die rechte gewesen sei, und dass der Einfluss der willkührlichen Richtung der Aufmerksamkeit, ohne zu fehlen, nur so leicht von den unwillkührlichen Einflüssen oder von der Willkuhr mit ins Spiel gesetzten Nebeneinflussen uberwogen werde, um Erfolge, wie ich sie beobachtet habe, hervorzurufen, endlich, dass positive Resultate zu Gunsten der Aufmerksamkeitstheorie sich noch künftig ergeben; muss ich doch alle bisherigen Erfahrungsunterlagen derselben für so zweifelhaft oder zweideutig erklären, dass bis zur wirklichen Darbietung beweisenderer Resultate von dieser Theorie zur Erklärung der Präponderanzphänomene zu abstrahiren, und die Abhängigkeit derselben anderwärts zu suchen sein dürfte.

Eine zulängliche neue Theorie in dieser Hinsicht vermöchte ich nicht aufzustellen. Nur möchte ich vermuthen, dass dasselbe Beharrungsvermögen, was sich auch in den bekannten Erscheinungen der Nachdauer der Gesichtseindrücke beweist, den einmal präponderirenden Eindruck zu erhalten strebt, hiemit aber eine zunehmende Ermüdung für diesen Eindruck eintritt, vermöge deren endlich der andre Eindruck zum Uebergewicht kommt; und dass die Erneuerung oder der Wechsel der Aufmerksamkeitsspannung diesen Wechsel beschleunigt.

Nicht ohne Beziehung zum Vorigen ist folgende allgemeine Bemerkung.

Es ist ein für alle Sinnesgebiete gültiger, merkwürdiger, und scheinbar paradoxer Umstand, dass, während bei abgezogener Aufmerksamkeit der Eindruck eines Reizes ganz aus dem Bewusstsein schwinden, durch zugewandte Aufmerksamkeit ins Bewusstsein gehoben werden kann, doch die sinnliche Stärke, mit welcher der Eindruck empfunden wird, von dem Grade der Aufmerksamkeit, mit welchem er aufgefasst wird, wesentlich unabhängig erscheint, wenn die Aufmerksamkeit einmal hinreicht, den Eindruck ins Bewusstsein zu heben, dass verstärkte Aufmerksamkeit dann die Sinnesempfindung nicht verstärkt, und keineswegs einen verstärkten Reiz ersetzen kann. In der That, man betrachte eine weisse Fläche oder einen weissen Fleck auf schwarzem Grunde, man horche auf einen Ton, und lasse einmal den Sinnesreiz verstärken, ohne die Aufmerksamkeit willkührlich zu verstärken, das andremal verstärke man willkührlich die Aufmerksamkeit, ohne den Sinnesreiz zu verstärken, so wird man einen ganz verschiedenen Effect in der Seele

hievon spüren. Erstenfalls wird man wirklich die sinnliche Empfindung, letztenfalls aber eben nur die Aufmerksamkeit wesentlich verstärkt fühlen, und hiemit leicht die Ueberzeugung gewinnen, dass in der That die verstärkte Wirkung eines Sinnenreizes in keiner Weise durch eine verstärkte Wirkung der Aufmerksamkeit zu ersetzen ist, sondern die Leistung der Aufmerksamkeit aus ganz anderm Gesichtspuncte zu betrachten ist, als die des Reizes.

Allerdings spüren wir die verstärkte Aufmerksamkeit als eine verstärkte Thätigkeit unsrer Seele, aber wir wissen auch sehr wohl zu unterscheiden, was auf Rechnung der verstärkten Aufmerksamkeit und was auf Rechnung der verstärkten Sinnesempfindung kommt, und schlagen die vergrösserte Anspannung der ersten nicht als eine Verstärkung der letztern an.

Was für Empfindungen gilt, gilt auch für empfundene Unterschiede, Contraste. Um schwache Unterschiede auf einer beleuchteten Fläche, Unterschiede zwischen nahe liegenden Tönen wahrzunehmen, bedarf es im Allgemeinen einer grösseren Anspannung der Aufmerksamkeit, als um die Beleuchtung, die Töne überhaupt wahrzunehmen. Daher ein erster Blick, ein flüchtiges Hinhören feine Unterschiede nicht erkennen lässt, die man bei grösserer Aufmerksamkeit entdeckt. Aber wird ein Unterschied bei hinreichender Aufmerksamkeit überhaupt wahrgenommen, so verstärkt sein sinnlicher Eindruck sich nicht durch verstärkte Aufmerksamkeit. Ein feiner Unterschied zwischen zwei Lichtnüancen bedarf einer gewissen Aufmerksamkeit, um erkannt zu werden, erscheint aber nicht grösser und gröber durch verstärkte Aufmerksamkeit.

Einiges scheint dem Vorigen entgegenzustehen, doch wohl mehr scheinbar als wirklich.

Wenn wir eine Empfindung oder einen Empfindungsunterschied oft wiederholt durch Anspannung der Aufmerksamkeit aus dem Unbewusstsein ins Bewusstsein heben, so gelingt diess nach und nach mit immer geringerer Anspannung der Aufmerksamkeit, und ein Reiz oder Reizunterschied kann endlich bei gleicher Anspannung leicht spürbar werden, der früherhin gar nicht spürbar wurde. Es ist bekannt, wie weit es wilde Völkerschaften, Weinschmecker, Blinde u. s. w. durch Uebung hierin bringen. Hier scheint man denn doch sagen zu müssen, dass der Reiz oder Reizunterschied jetzt einen stärkern sinnlichen Eindruck als früher mache. Und da dieser Erfolg von wiederholter Anspannung der

Aufmerksamkeit abhängt, scheint auch jede einzelne Anspannung etwas in dieser Richtung leisten zu müssen.

Dieser Einfluss der Uebung ist noch unklar, aber es ist sehr fraglich, ob er wirklich als Verstärkung und nicht vielmehr blos als leichtere Isolation des sinnlichen Eindrucks zu fassen sei, was Beides einen analogen Erfolg haben kann, und doch nicht zu verwechseln ist. In der That nehmen wir ein Gemisch von Tönen, so wird jeder Ton nach Massgabe seiner Stärke dazu beitragen, und wir einen stärkern Totaleindruck haben, als von jedem einzelnen Ton. So lange wir nun die Aufmerksamkeit nicht auf die einzelnen Töne richten, so lange wir namentlich uns nicht geübt haben, sie dadurch zu isoliren, werden sie im gemeinsamen Eindrucke untergehen; isoliren wir sie aber durch Aufmerksamkeit, so klingen sie uns desshalb nicht stärker als vorher, wo ihre Stärke am gemeinsamen Eindrucke mitwirkte, sondern sie werden jetzt blos nach ihrer Stärke besonders aufgefasst. Nun ist in Rücksicht zu ziehen, dass mit jedem schwachen Sinneseindrucke andre Eindrücke, sei es innere, sei es äussere, und wären es auch nur innere Vorstellungen, mitgehen. Es könnte daher sehr wohl sein, dass auch hier die Uebung blos durch allmälig immer leichtere Isolation, nicht durch Verstärkung des sinnlichen Eindrucks wirkte.

Es ist sogar factisch, dass die Uebung einen Einfluss in diesem Sinne hat, nur dass noch fraglich bleiben kann, ob der Erfolg der Uebung blos hierauf zu schreiben ist, was ich nicht schlechthin zu behaupten wage. Sollte aber auch von dieser Seite ein verstärkender Einfluss der Aufmerksamkeit zugestanden werden müssen, so würde es doch nur ein sehr allmälig wirkender, vielleicht auf Herbeiführung einer abgeänderten Organisation der Sinnesorgane beruhender, sein.

Nicht ausser Acht zu lassen ist hiebei, dass es blos die wiederholte Anstrengung, eine Empfindung aus dem Unbewusstsein ins Bewusstsein zu heben oder eine schwache darin zu erhalten, ist, was die Uebung mitführt. Aufmerksamkeit auf starke sinnliche Eindrücke führt keine Uebung mit, und also kann hier jedenfalls kein allgemeiner Erfolg der Aufmerksamkeit gesehen werden.

Das Vorige zeigt jedenfalls, dass man der verstärkten Aufmerksamkeit nicht das Vermögen beilegen kann, einen isolirten sinnlichen Eindruck an sich zu verstärkter Geltung in der Empfindung zu bringen, sondern nur eine von der Aufmerksamkeit unabhängige Geltung zum

Bewusstsein zu bringen; aber es würde allerdings nicht hindern, dass nach Massgabe als die Aufmerksamkeit sich einseitig oder ungleich zwischen mehrern Eindrücken theilt, derselbe in verschiedener Stärke in der Resultante zur Geltung komme. Nur bleibt es immer eine Frage der Erfahrung, die für jedes Gebiet besonders untersucht werden muss, wie es sich wirklich hiebei verhält.

IX.

Vergleichsweise Dauer der Nachbilder von binocularen und monocularen Bildern und je nach dem Zustande der Aufmerksamkeit.

Nach den im 7. Abschnitt angeführten Ergebnissen unterscheidet sich ein, durch gewöhnliche Fixation mit beiden Augen erhaltenes, einfaches binoculares Bild, welches folgends mit Bin. bezeichnet werde, nur unbedeutend in der Erscheinung von den, folgends mit Dopp. zu bezeichnenden, monocularen Doppelbildscomponenten desselben Objects, auf welchem Grunde man immer das Object betrachte. Auch kann man sich leicht überzeugen, dass, wenn man von irgend einem gewöhnlich fixirten Object auf irgend einem Grunde ein monoculares Bild mit dem rechten Auge (R.) oder linken Auge (L.) dadurch gewinnt, dass man das andere verdeckt, ausser einem leichten Schatten, der sich im Momente der Verdeckung darüber legt, die Erscheinung des monocularen Bildes R. oder L. dieselbe bleibt, als die des binocularen Bin.

Es schien mir nun von Interesse, zu untersuchen, ob diese approximative Gleichheit zwischen dem binocularen und den monocularen Bildern sich auch auf deren Nachbilder erstreckt, oder ob das Nachbild des binocularen Bildes nicht etwa unter gleichen Umständen intensiver oder nachhaltiger ist, als das der monocularen. Die der Messung zugänglichere Dauer ward in dieser Hinsicht untersucht, und es hat sich gefunden, dass der Unterschied in der Dauer von Bin., Dopp., L. und R. weit grösser und entschiedener ist, als man nach der Aehnlichkeit der Erscheinung der Urbilder erwarten sollte, indem die Dauer von Dopp. sich nur $^1/_3$ bis $^1/_2$ so lang als von Bin. fand, indess L. und R. sich zwischen der von Bin. und Dopp. hielt. Auch hat sich diess übereinstimmend bei ganz verschiedenen Beobachtern so wiedergefunden, welche keine Kenntniss der von Andern zuvor in dieser Hinsicht erhaltenen Ergeb-

nisse hatten. Es wirken aber bei Dopp. zwei Umstände zusammen, die Dauer des Nachbildes zu verkürzen, einmal, dass die Bilder auf etwas seitliche Theile der Netzhaut fallen, was nach den zum Schluss angeführten Ergebnissen verkürzend wirkt, und dass sie sich heterogen mit dem Grunde decken, welcher Umstand bei L. und R. allein in Wirkung tritt.

Bei den Versuchen ist vorausgesetzt, dass das Nachbild, abgesehen von dem stets weissen Grunde, auf dem es aufgefasst wurde, stets entsprechend als das Urbild betrachtet wird, nämlich bei Bin. mit Offenhaltung beider Augen in der ursprünglichen Stellung einfacher Fixation, bei Dopp. in derselben Stellung der Augen, in der das Urbild doppelt gesehen wurde, bei R. und L. mit Offenhaltung desselben Auges, mit dem das monoculare Einzelbild gesehen ward, und Geschlossenbleiben des andern. Im Uebrigen liegt es in der Natur der Sache und bestätigt sich durch die Erfahrung, dass man das Nachbild eines durch gewöhnliche Fixation gesehenen einfachen binocularen Bildes nicht durch veränderte Augenstellung eben so zum Doppelbilde auseinanderschieben kann, als das Urbild, und umgekehrt das Nachbild eines Doppelbildes nicht wieder zum einfachen Nachbilde zusammenschieben kann.

Diese Versuche wurden im Allgemeinen so angestellt. Es wurde ein etwas weniger als 1 Quadrat-Zoll grosses weisses Quadrat auf schwarzem oder farbiges Quadrat auf complementärem Grunde jedesmal 15 Secunden aus gewöhnlicher Sehweite in verbreitetem Tageslichte fixirt, dann ein weisser Papierbogen als Grund für das Nachbild vorgeschoben und gezählt, wie viel Secunden bis zum Verschwinden der letzten Spur des Nachbildes darauf verflossen. Im Allgemeinen nimmt das Nachbild erst bis zu einer gewissen Gränze an Schärfe und Intensität zu, dann wieder ab. Die letzte Spur des Verschwindens ist nicht scharf zu bestimmen, daher man eine Mehrzahl Versuche anstellen und dabei denselben Massstab möglichst einzuhalten suchen muss. Auch verschwindet bei manchen Personen das Nachbild einmal und kehrt nachher wieder. Vor jedem neuen Versuche wurde mit beiden Augen ein schwarzer Papierbogen 15 Secunden lang betrachtet, um die Augen in gleichförmigen Ruhestand zu versetzen; eine Vorsicht, die jedoch bei der ersten der folgenden Reihe unter a noch nicht befolgt wurde.

Eine wesentliche Vorsicht ist, sowohl bei Betrachtung des Urbildes als Nachbildes, jedes Zwinkern mit den Augenlidern und jedes Zu-

schlagen derselben zu vermeiden, oder, sofern man die dauernde Offenhaltung während der Versuchszeit zu anstrengend fände, das Zuschlagen während der Betrachtung des Urbildes immer in gleicher Weise zu interponiren. Denn sonst entsteht schon bei Betrachtung des Urbildes eine Ungleichförmigkeit und bei Betrachtung des Nachbildes wird dieses zum zeitweisen Verschwinden disponirt, obwohl solches auch ohnedem eintreten kann.

Die Versuche wurden von jedem Beobachter hinter einander in der hier angegebenen Reihenfolge angestellt. Die Zahlen geben stets die Dauer des Nachbildes in Secunden an.

I. Volkmann. a) Hellgrüne Scheibe auf hellrothem Grunde. Es wurde stets das erste Verschwinden des Nachbildes notirt, welchem aber manchmal eine Wiederkehr folgte.

1) Bin. 21.
2) Dopp. viel weniger.
3) Bin. 15.
4) Dopp. 8.

Bei einer spätern Wiederholung an demselben Tage:

1) Bin. 14.
2) Dopp. 4.
3) Bin. 15.
4) Dopp. 5.

Bei nochmaliger Wiederholung an demselben Tage, wo aber statt eines grünen Feldes auf rothem Grunde ein weisses auf schwarzem angewendet ward:

1) Bin. 17 bis 18.
2) Dopp. 6.
3) Bin. 13 bis 14.
4) Dopp. 10.

b) (Einige Wochen nach a angestellt.) Weisses Feld auf schwarzem Grunde.

1) Bin. 16 bis 17.
2) Dopp. 5.
3) Dopp. 4.
4) L. 10 bis 11.
5) R. 9 bis 10.
6) Bin. 16 bis 17.
7) Dopp. 5 bis 6.
8) L. 10 bis 11.
9) R. 11 bis 12.
10) Bin. 16.

II. Fechner. Hellgrünes Feld auf hellrothem Grunde. Intermissionen des Nachbildes habe ich nicht bemerkt.

1) R. 15.
2) L. 15.
3) Bin. 16.
4) R. 13.
5) L. 12.
6) Bin. 13.
7) Dopp. 6.
8) Dopp. 7.
9) Bin. 18.
10) R. 16.
11) L. 15.
12) Bin. 19.

13) Dopp. 8. 16) Bin. 16. 19) Bin. 17.
14) R. 13. 17) R. 13. 20) R. 12.
15) L. 13. 18) L. 11.

Im Mittel Bin. 16,5; Dopp. 7; R. 13,7; L. 13,2.

III. Grabau, gelbes Feld auf violetem Grunde.

1) Bin. 10. 7) Bin. 8 bis 9.
2) R. 8. 8) Dopp. linkes Bild 5 bis 6, rechtes Bild fast 8.
3) L. 6 bis 7. 9) Dopp. l. B. 5; r. B. 5 bis 6.
4) R. 6. 10) Dopp. l. B. 4; r. B. 5 bis 6.
5) L. 6 bis 7. 11) Bin. 9 bis 10.
6) Bin. 9.

Im Mittel Bin. 9,3; Dopp. 5,4; R. 6,5; L. 6,7.

IV. Koch.*) Weisses Feld auf schwarzem Grunde.

1) R. 14. 4) R. 10. 7) R. 11.
2) L. 7. 5) L. 8. 8) L. 9 bis 10.
3) Bin. 16. 6) Bin. 13. 9) Bin. 16.

Im Mittel Bin. 15; R. 11, 7; L. 8,2.

Anstatt das Nachbild unter denselben Umständen als das Urbild zu betrachten, kann man auch die Umstände ändern. Hieher gehören folgende Versuche.

Hat man das weisse Urbild auf schwarzem Grunde mit einem Auge A bei Schluss des andern B 15 bis 30 Sec. betrachtet, schliesst dann A und öffnet B, um das Nachbild auf dem vorgeschobenen weissen Grunde damit zu betrachten, so sieht man nichts, als nur einen vorübergehenden dunkeln Schein (Fechner, Koch, Volkmann).

Koch betrachtete ein Urbild Weiss auf schwarzem Grunde jedesmal 15 Sec. lang mit beiden Augen, das Nachbild auf weissem Grunde in abwechselnden Versuchen mit beiden Augen (b), mit dem rechten Auge (r), mit dem linken Auge (l), bei Schluss des andern, und erhielt folgende Zahlen für die Dauer des Nachbildes:

1) b. 15, 3) l. 13. 5) r. 12. 7) b. 15.
2) r. 9. 4) b. 15. 6) l. 12.

Im Allgemeinen pflegt man, um das Nachbild eines Objects zu erzeugen, dieses sehr scharf zu fixiren; und es ist diess natürlich auch

*) Das eine Auge, ich erinnere mich nicht mehr welches, ist bei Koch viel kurzsichtiger als das andere.

nöthig, um das Nachbild in scharfer Begränzung zu erhalten, da bei schwankenden Augen das Bild sich verschiebt und das Nachbild sich mehr oder weniger verwischt. Dazu schien es von vorn herein wahrscheinlich, dass die Intention, mit der man das sichtbare Object auffasst, dessen Einwirkung erhöht, und hiedurch zur Verstärkung des Nachbildes beiträgt. Indessen ist mir zweifelhaft, ob letzterer Umstand wirklich mit in Rechnung kommt, und der Vortheil der scharfen Fixation nicht blos in ersterem Umstande zu suchen ist. Gewiss ist, dass intensive Nachbilder sichtbarer Objecte entstehen können, von welchen die Aufmerksamkeit ganz abgezogen ist. In dieser Hinsicht erwähne ich folgender Erfahrung.

Früh im Bette nach dem Erwachen pflege ich über Allerlei nachzudenken. Dem Bette gegenüber ist ein schwarzes Ofenrohr an einer hellgetünchten Wand. Da der Kopf still liegt, so imprimirt sich, wenn ich nach eingebrochenem Morgenlichte mit offenen Augen liege, der Eindruck des schwarzen Rohres stark im Auge, aber ich denke an ganz Anderes, und dieser Eindruck ist mir völlig unbewusst. Sehr oft aber bin ich, wenn ich dann einmal die Augen schloss und zugleich die Gedanken ruhen liess, durch ein sehr intensives weisses Nachbild des Ofenrohrs frappirt worden.

Hieher scheint auch folgende Erfahrung von Scoresby (l'Institut. 1854. p. 155) zu gehören: »Un autre résultat curieux, quoique prévu, que l'auteur décrit dans cette section, c'est la détermination, en observant les spectres, de pertions de diagramme ou d'éléments dans les surfaces peintes ou typographiques qui n'avaient pas été remarquées pendant l'acte de la vision directe. Ainsi, en regardant en particulier une ligne de caractères imprimés à un certain point, sans considérer ceux à droite et à gauche, il s'est produit une série considérable à droite et à gauche, tellement peinte sur l'organe visuel, qu'on pouvait aisément les reconnaitre, tandis qu'un point sur une ligne dans un placard imprimé, ayant été regardée de la même manière, les lignes au-dessus et au-dessous se sont présentés en fermant les yeux et ont pu souvent être lues ainsi.«

Es schien mir nun von Interesse, durch directe Versuche zu ermitteln, ob willkührlich verstärkte Aufmerksamkeitsspannung die Dauer der Nachbilder vermehrt, indem ich das Object einmal mit so geringer Aufmerksamkeit fixirte, als hinreichte, es überhaupt festzuhalten, das anderemal mit möglichst gespannter. Doch gestehe ich, mittelst mehrfacher Versuche, die ich theils selbst anstellte, theils durch Grabau, Koch, Volkmann anstellen liess, zu keinem recht entscheidenden Resultate

gekommen zu sein, da die Ergebnisse bei den verschiedenen Beobachtern nicht übereinstimmend ausfielen, mehrentheils zwar eine etwas längere Dauer nach der Beobachtung mit Aufmerksamkeitsspannung ergaben, theils jedoch auch keine solche unzweideutig finden liessen. Im Allgemeinen scheint doch ein, nicht sehr bedeutender, Vortheil für die verstärkte Aufmerksamkeitsspannung stattzufinden; nur bleibt ungewiss, ob er nicht blos davon abhängt, dass, wenn man das Object mit geringerer Aufmerksamkeit fixirt, auch von selbst stärkere Schwankungen des Auges eintreten.

Einige Versuche habe ich auch über die vergleichsweise Dauer des Nachbildes zweier neben einander gelegter weisser Streifen, anderemale kreisförmiger Scheiben, auf schwarzem Grunde angestellt, von denen das eine Object mit beiden Augen fixirt, das andere zugleich indirect gesehen ward. Der Abstand der Objecte von einander ward dabei mehrfach abgeändert. Im Allgemeinen traten Intermissionen der auf weissem Grunde gesehenen Nachbilder ein, und zwar intermittirte das indirecte stets zuerst und stand im Ganzen minder lange als das directe, was in schon früher von Aubert*) erhaltene Resultate bestätigend hineintritt.

X.

Einseitige Ermüdungsversuche des Auges.

Dass Ermüdung der Augen durch den Lichtreiz die Helligkeit des Sehens vermindert, lässt sich aus bekannten Thatsachen schliessen, u. a. daraus, dass ein weisses Feld bei anhaltender Betrachtung sich allmälig mehr und mehr verdunkelt, mit einer Art grauen Schleier überzieht. Nichts aber scheint geeigneter, diesen Einfluss deutlich herauszustellen und genaueren Versuchen zu unterwerfen, als das Auseinanderschieben eines Doppelbildes nach ungleicher Ermüdung beider Augen, da man hier den Effect unmittelbar an beiden gleichzeitig gesehenen Bildern vergleichen und die vergleichsweise Helligkeit der Bilder im ermüdeten und nicht ermüdeten Auge nach dem S. 365. 376 angegebenen Princip mittelst eines vor das nicht ermüdete Auge genommenen grauen Glases von bekanntem photometrischen Werthe messbar bestimmen kann.

*) Moleschott Unters. IV. p. 215 ff.

Um den Einfluss der Ermüdung im Allgemeinen darzuthun, stelle ich mich mit der Vorderseite gegen das Fenster, sehe eine Zeit lang, etwa 30 Sec., mit einem Auge, bei Schluss oder Verdeckung des andern, ohne dasselbe dabei zu drücken, in den Himmel, und schiebe dann, nach Wiederöffnung des letztern, das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde aus einander. Der Erfolg dieses Versuches ist bei mir äusserst frappant, und ward auch von Andern, deren Auge leicht ermüdet, so gefunden. Das Bild im ausgeruhten Auge erscheint ganz licht, das andere dunkelgrau. Ist der Himmel blau, so hat letzteres bei mir durch Complementärwirkung eine gelbröthlichgraue Farbe, und das andere nicht selten eine bläuliche Farbe, welche Färbungserscheinungen unter den Gesichtspunct der im 14. Abschnitt zu besprechenden treten. Einige Personen mit kräftigeren Augen hingegen nahmen bei derselben Versuchsweise, selbst nach längerem Blick in den Himmel, keinen so auffallenden, wenn schon immer einen deutlichen Helligkeitsunterschied zwischen beiden Bildern wahr.

Um den Versuch mit Massbestimmungen zu begleiten, nehme ich vor das geschlossene Auge eins meiner dunkeln Gläser von photometrisch bestimmtem Werthe, und behalte es davor, wenn ich dieses Auge dann öffne, um das Doppelbild auseinander zu schieben. Dann ist das Bild im freien Auge durch Ermüdung, das im andern Auge mit dem Glase durch Verdeckung mit dem grauen Glase grau, was ich kurz als Ermüdungsgrau und Glasgrau unterscheide, und man kann nun zunächst zusehen, welches dunkler oder heller ist, und bei Besitz eines Sortiments solcher Gläser in wiederholten Versuchen Gränzen des Glasgrau bestimmen, zwischen welche bei vergleichungsweiser Anstellung von Versuchen das Ermüdungsgrau fällt; auch werden sich so die Augen verschiedener Personen hinsichtlich der Leichtigkeit der Ermüdung vergleichen lassen. Aber auch mit einem einzigen Glase werden sich vergleichende Versuche unter verschiedenen Umständen und zwischen verschiedenen Personen anstellen lassen, wenn man die Ermüdung jedesmal so weit treibt, dass das Ermüdungsgrau im Beginn dunkler ist, als das Glasgrau, und dann die Zeit beobachtet, welche erfoderlich ist, damit durch allmälige Erhellung des erstern beide gleich werden.

Diese Versuche habe ich der Schonung meiner Augen halber allerdings nicht weit treiben, und das Verfahren nicht ausbilden können, bin jedoch überzeugt, dass sich über die Abhängigkeitsverhältnisse der Er-

müdung und Wiederherstellung von der Lichtintensität, von der Dauer und Wiederholung der Ermüdung u. s. w., nützliche Bestimmungen dadurch werden erhalten lassen.

Um einige beiläufige Versuche anzuführen, so schloss ich eines Tages erst 60 Sec. lang beide Augen, und öffnete dann das rechte, um 30 Sec. lang in den hellen Tageshimmel zu sehen, indess das andere Auge, mit dem grauen Glase 400 davor, geschlossen blieb, um nach Verfluss der 30 Secunden dasselbe zum andern hinzuzuöffnen, und sofort das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinanderzuschieben. Das Ermüdungsgrau war viel dunkler als das Glasgrau, und es bedurfte 15 Sec. von Oeffnung beider Augen an, ehe beide Bilder gleich dunkel erschienen.

An einem andern Tage wiederholte ich denselben Versuch unter ganz ähnlichen Umständen, nur dass der vorgängige minutenlange Schluss beider Augen nicht statt fand. Das Resultat war wesentlich dasselbe; und ich zählte 19 Sec., bis beide Bilder gleich erschienen (für ein paar Secunden kann man dabei nicht stehen). An einem dritten Tage zählte ich unter ähnlichen Umständen 18 Secunden.

Da das graue Glas 400 nur 400 Tausendtheile Licht durchlässt, und da diese Helligkeit erst 15 bis 19 Sec. nach stattgehabter Ermüdung durch 30 Sec. langen Blick in den Himmel wiederhergestellt war, so betrug also die Verdunkelung durch diese Ermüdung noch weit mehr als eine Halbirung der Helligkeit.

Der Himmel bei diesen verschiedenen Versuchen war ziemlich klar und einige Färbung an den Bildern zu bemerken, was die Bestimmung des Punctes, wo sie gleich wurden, etwas erschwerte. Ist die Färbung stark, wie man sie öfters nach dem einseitigen Blick in einen rein blauen Himmel mindestens an einem der Bilder findet, so kann die Möglichkeit eines Vergleiches dadurch fast aufgehoben werden. Man wird daher im Allgemeinen besser thun, dergleichen Versuche bei trübem Himmel anzustellen, falls man überhaupt die Ermüdung durch den Blick in den Himmel bewirken will.

XI.

Ueber die resultirende Helligkeit des Gesichtsfeldes bei ungleicher Helligkeit beider Netzhäute. Der paradoxe Versuch.

Zu den Versuchen dieses Abschnittes sind ausser den, auf S. 351 genannten, Mitbeobachtern noch eine ziemliche Anzahl Anderer, grösstentheils Laien, zugezogen worden, insofern es meist dabei blos auf einfache Wahrnehmung, ob sich das Gesichtsfeld bei einem bestimmten Versuche erhellt oder verdunkelt, ankam, und durch die Zahl der Individuen Unterschiede, die von der Individualität abhängen, in einem mittleren Resultate sich ausgleichen, Ungenauigkeiten, die bei den Einzelnen untergelaufen sein können, compensirt werden sollten.

Leider lassen die Versuche dieses Abschnittes in Betreff der Schärfe und Vollständigkeit der Bestimmungen noch Manches zu wünschen übrig, da ich selbst consequente Beobachtungen wegen des Zustandes meiner Augen nicht anstellen konnte, die gelegentlichen Versuche mit Andern aber nicht genügen, Alles zu erledigen, was zu erledigen ist.

In der Regel gilt als selbstverständlich, dass, wo überhaupt Empfindlichkeit für das Licht besteht, durch vermehrten Lichtzutritt vermehrte Helligkeit begründet werde. Inzwischen kennt die Physik schon im Gebiete der objectiven Lichtlehre eine Ausnahme von dieser Regel. Wenn zwei Lichtstralen, die von einem und demselben Puncte ausgegangen sind, wieder in einem und demselben Puncte zusammentreffen, kann je nach der Wegesdifferenz die Helligkeit, die der eine hervorbringt, durch sein Zusammentreffen mit dem andern eben so gut abnehmen als wachsen. Das Folgende fügt hiezu einen zweiten Ausnahmefall im Gebiete der subjectiven Lichtlehre: wenn zum Licht im einen Auge Licht im andern Auge hinzutritt, kann je nach den Intensitätsverhältnissen der Lichter die Helligkeit, die das eine Licht erzeugt, durch den Zutritt des andern eben so gut abnehmen als wachsen.

Der Grundversuch in dieser Hinsicht, den ich kurz den paradoxen Versuch nennen will, ist sehr einfach und von Jedem leicht anzustellen.

Während man mit beiden Augen in den Himmel oder auf eine

weisse Thür oder Wand sieht,*) nehme man vor eins beider Augen, welches künftig *B* heisse, ein stark verdunkelndes Mittel, indess das andere, welches *A* heisse, frei bleibt. Als verdunkelndes Mittel dient am bessten ein graues Glas, was mindestens die Hälfte Licht absorbirt, also z. B. 400, besser aber eine noch dunklere Nummer, wie 233, 145, 90, 71 oder 63, indem der Erfolg mit den dunklern dieser Gläser auffälliger als mit den hellern ist. Ist man nicht im Besitz grauer Gläser, so wird ein mit Rauch angelaufenes Glas oder die Combination zweier übereinander gelegter complementärfarbigen Gläser, wenn sie nur nicht alles Licht ausschliesst, dieselben Dienste vertreten können. Eine schwache Glasfärbung stört den Erfolg nicht; wie er denn mit dem nicht unerheblich bläulichen Glase 63 sehr gut zu erhalten ist.

Unstreitig trägt die mittelst jeder Netzhaut insbesondere zu gewinnende Helligkeitsempfindung zur totalen Helligkeit, in der das beiden Augen gemeinsame Gesichtsfeld erscheint, das Ihrige bei, und es kann hienach nur natürlich erscheinen, wenn sich mit Vornahme des dunkeln Glases vor *B* das gemeinsame Gesichtsfeld in gewissem Grade verdunkelt. Auch bestätigt sich diess durch den Versuch. Schliesst oder verdeckt man dann das freie Auge *A*, so nimmt, wie nicht minder zu erwarten, die Helligkeit des Gesichtsfeldes noch beträchtlich ab, da jetzt das Auge mit dem dunklen Glase allein offen bleibt. Schliesst oder verdeckt man statt des Auges *A*, das Auge *B*, vor welchem das dunkle Glas, indess *A* offen bleibt, so sollte man auch eine nur geringere Verdunkelung als vorigen Falls erwarten. Denn da sich schon mit Vornahme des grauen Glases durch Ausschluss eines Antheils Licht vom Auge *B* das Gesichtsfeld bis zu gewissem Grade verdunkelte, sollte eine weitere Verdunkelung erwartet werden, wenn man das Licht nun völlig von diesem Auge abhält. Statt dessen erhellt sich das Gesichtsfeld in augenfälliger Weise; um so mehr, je mehr die Verdunkelung bei Vornahme des Glases betrug.

Vollständige Verdunkelung eines bis zu gewissen Gränzen verdunkelten Auges bei unverdunkeltem andern Auge bewirkt also eine Erhellung des gemeinsamen Gesichtsfeldes.

*) Wo nichts Anderes bemerkt ist, ist bei den künftigen Angaben immer der Blick in den Himmel vorausgesetzt.

Beseitigt man die Verdeckung oder den Schluss des Auges *B* wieder, ohne das graue Glas zu entfernen, lässt also wieder etwas, doch nicht das volle, Licht in diess Auge zu, so verdunkelt sich das Gesichtsfeld wieder eben so augenfällig.

Zulassung des Lichts bis zu gewissen Gränzen in einem anfangs ganz verdunkelten Auge bei unverdunkeltem andern Auge bewirkt also eine Verdunkelung des gemeinsamen Gesichtsfeldes.

Von den möglichen Auffassungen dieses Versuches wird zum Schlusse dieses Abschnittes die Rede sein; für jetzt schreiten wir weiter in Darlegung der thatsächlichen Verhältnisse fort; deren aufmerksame Betrachtung den sich am natürlichsten darbietenden Erklärungen alsbald wichtige Schwierigkeiten entgegenstellt.

Der Erfolg des angeführten Versuches ist entschieden und sicher, wenn das zur unvollkommenen Verdunkelung angewandte Glas nicht zu hell ist; denn so viele Personen, Beobachter und Laien, ich auch denselben habe wiederholen lassen, und so oft ich selbst ihn wiederholt habe, er ist nie fehlgeschlagen, auch bei Personen, die schwer subjective Farben sehen, ungeachtet diejenigen, welche ich den Versuch anstellen liess, nach dem absichtlich von mir vorausgeschickten Hinweise, dass sie mit völliger Verdunkelung des halbverdunkelten Auges noch einen gewissen Antheil Licht vom Gesichtsfelde ausschlössen, stets vielmehr eine Verdunkelung als Erhellung desselben zu erwarten hatten.

Wenn man, anstatt das Glas vor einem Auge zu behalten und die Hand abwechselnd vorzulegen und wegzuziehen, oder, was dasselbe leistet, das Auge hinter dem Glase abwechselnd zu schliessen und zu öffnen, abwechselnd das graue Glas und die Hand vorlegt, so dass in der kurzen Zwischenzeit volles Licht in das Auge fällt, so erhält man nicht mehr dieselbe Constanz der Resultate, vielmehr je nach der Dunkelheit des Glases, der Helligkeit des betrachteten Grundes, der Stimmung der Augen, der Wiederholung des Versuches den wechselndsten Erfolg, d. h. den Ausschlag der überwiegenden Helligkeit bald zu Gunsten der vorgelegten Hand, bald des vorgelegten Glases, bald zeigt sich kein entschiedener Unterschied. Von dieser Inconstanz der Resultate bei der angegebenen Modification des Verfahrens gegenüber der Constanz bei dem erst angegebenen Verfahren habe ich mich durch mehrfache abwechselnd angestellte Versuche überzeugt, die jedoch nicht

hingereicht haben, bestimmte Regeln über den Erfolg der Abänderung anzugeben.

Dabei ist zu berücksichtigen, dass durch die zwischen die unvollständige und vollständige Verdunkelung eines Auges fallende Erhellung beider Augen und mithin des ganzen Gesichtsfeldes einerseits der Vergleich zwischen den Helligkeiten, die bei der unvollständigen und vollständigen Verdunkelung des Auges statt finden, alterirt wird, indem sich die zwischenfallende volle Helligkeit mit als massgebend für die Verhältnissbestimmung bei dem Vergleiche einschiebt, anderseits das Auge durch die, wenn auch nur kurze Zeit zwischenfallende, Helligkeit selbst in der Empfindlichkeit gegen das Licht etwas herabgesetzt wird. Ich halte daher diese Versuchsweise überhaupt für keine sehr geeignete, und habe sie nicht weiter angewendet.

Wiederholt man den paradoxen Versuch öfter hintereinander, so ist es besser, das dunkle Glas vor jedem neuen Versuche auf das andere Auge hinüberzunehmen, als stets vor demselben zu lassen, weil sonst die Augen allmälig einen verschiedenen Reizzustand erlangen, wodurch sich der Erfolg abändern kann, wie später zu besprechen.

Kurz will ich den bisher betrachteten Erfolg, wo mit völliger Verdunkelung des unvollkommen verdunkelten Auges Erhellung des Gesichtsfeldes eintritt, den negativen Erfolg, den entgegengesetzten, wo hiebei vielmehr Verdunkelung eintritt, den positiven nennen.

Ausdrücklich habe ich als Bedingung des negativen Erfolges angegeben, dass das zur Verdunkelung von *B* angewandte Glas nicht zu hell sei. Wenn ich mit meinen einfachen Gläsern über 400 zu 562 oder höher hinaufgehe, so kann ich für den negativen Erfolg nicht mehr stehen, obwohl er zumeist auch noch bei helleren Gläsern eintritt. Allgemein aber gilt Folgendes, was ich an mir selbst und andern Personen unter Anwendung der verschiedensten Dunkelheitsgrade constatirt habe.

Wenn der Erfolg bei einem Glase von irgendwelchem Dunkelheitsgrade negativ ist, so ist er sicher auch bei jedem noch dunkleren Glase negativ. Und wenn der Erfolg bei irgend einem Glase positiv ist, so ist er eben so sicher bei jedem hellern Glase positiv. Zwischen den negativen und positiven Gläsern, um damit kurz solche zu bezeichnen, welche respectiv den negativen und positiven Erfolg geben, muss es dann natürlich ein indifferentes Glas geben, d. h. ein solches, dass, wenn ein damit verdunkeltes Auge ganz verdeckt oder geschlossen wird, weder

Erhellung noch Verdunkelung des Gesichtsfeldes entsteht, es also gleichgültig für die Helligkeit des gemeinsamen Gesichtsfeldes ist, ob das Auge *B* ganz finster, oder nur durch das betreffende Glas verdunkelt ist.

In der That habe ich diess direct bei allen Individuen bewähren können, wo der Indifferenzpunct nicht oberhalb des hellsten meiner Gläser, d. i. 824, lag. Wo aber diess der Fall, wo selbst dieses Glas noch einen negativen Erfolg gab, ist nichts desto weniger ein Indifferenzpunct anzunehmen, der nur aber dann zwischen 824 und 1000 zu suchen ist. Denn auch diejenigen, welche bei gänzlicher Verdeckung eines mit dem Glase 824 verdunkelten Auges einen negativen Erfolg erhielten, erhielten doch bei Verdeckung eines gar nicht verdunkelten Auges, dessen Helligkeit durch 1000 repräsentirt ist, einen positiven Erfolg, d. h. eine gewisse Verdunkelung; welche Thatsache ich unten noch besonders bespreche.

Ich habe bei einer Mehrzahl von Individuen den Indifferenzpunct etwas näher zu bestimmen gesucht; doch ist eine allgemein-gültige Angabe nicht möglich, weil er nicht bei allen Individuen, auch wenn sie unter denselben Umständen geprüft werden, und bei demselben Individuum nicht, wenn es zu verschiedenen Zeiten geprüft wird, immer dieselbe Lage behält. Unstreitig haben abgeänderte Verhältnisse der Reizbarkeit einen Einfluss, der künftig erst genauer zu ermitteln sein wird. Auch wird die Bestimmung dadurch erschwert, dass oft in einer ziemlich grossen Breite das Urtheil zweifelhaft bleibt, ob bei Verdeckung des Auges *B* Erhellung oder Verdunkelung statt finde, zumal wenn die schwache Färbung der Gläser Einfluss auf das Urtheil über Helligkeit gewinnt. Man erkennt in der Nähe des Indifferenzpunctes nicht selten eine Veränderung bei der Verdeckung, weiss aber nicht recht, ob sie zum Hellern oder Dunklern geht. Da ferner die Helligkeit der Gläser blos stufenweise variirt, so findet man statt eines indifferenten Glases oft blos ein negatives und positives diesseits und jenseits, ohne sicher zu sein, der Mittelwerth beider Gläser sei der wirkliche Indifferenzpunct, wenn schon er dafür angenommen werden muss, so lange man ihn nicht sicherer bestimmen kann. Indessen, wenn man nur beabsichtigt, einen Durchschnittswerth für viele Individuen und Fälle zu erhalten, so gleichen sich diese Ursachen der Unsicherheit doch mehr oder weniger aus.

Die folgenden Angaben über den Indifferenzpunct nun sind aus 31

Bestimmungen an 24 verschiedenen Personen abgeleitet, indem einige Personen, bei denen Versuche an verschiedenen Tagen mehr oder weniger verschiedene Werthe gaben, mit eben so viel Werthen zugezogen sind. Hingegen gehen einige von mir geprufte Personen, deren beide Augen eine sehr ungleiche Helligkeit hatten, in diese Bestimmungen nicht mit ein.

Mehrere von den geprüften Personen gaben an, wenn ich sie abwechselnd das eine und das andre Auge schliessen liess, dass sie mit dem einen Auge etwas heller sähen, als mit dem andern, und zwar erklärte die Mehrzahl der Ungleichsehenden das linke Auge für das hellere. Ich bin nun im Allgemeinen so verfahren, dass ich den paradoxen Versuch, so wie die später zu besprechenden Combinationsversuche mit jedem Glase oder jeder Glascombination stets an beiden Augen nach einander vornehmen liess; dass ich solche Individuen, wo die Ungleichheit der Augen entschieden und erheblich war, und sich beim paradoxen Versuche bei mehrern Gläsern in einem Gegensatze zu erkennen gab, als abnorm von der Mittelbestimmung ausschloss, übrigens, wo ein Glas nur in Einzelfällen von einem Auge positiv, vom andern negativ befunden ward, diess Glas als ein indifferentes zur Mittelbestimmung zuzog. Dabei ist zu bemerken, dass ich manchmal auch bei mir selbst und bei Andern, deren beide Augen gleich hell sehen, doch das rechte und linke Auge entgegengesetzt oder das eine zweideutig, das andere positiv oder negativ finde, doch ohne Constanz; indess umgekehrt bei manchen von denen, bei denen nach ihrer Aussage eine Helligkeitsdifferenz beider Augen stattfindet, doch der paradoxe Versuch für beide Augen keine erheblich abweichenden Resultate gab. Ist indess der Helligkeitsunterschied der Augen beträchtlich, so macht sich ein solcher Unterschied beim paradoxen Versuch auch entschieden geltend. Darf ich nach 4 Fällen entschieden ungleich heller Augen, wobei überall das linke Auge das hellere war, schliessen, so ist der Erfolg einer erheblichen Ungleichheit allgemein der, dass das hellere Auge, als *B* gebraucht, positiver als das dunklere ist, oder dass der Indifferenzpunct für das hellere Auge zu einem dunkleren Glase herabrückt.

So gaben bei Dr. Winkler, bei dem die Ungleichheit sehr stark ist, alle Gläser, von 63 bis 611 aufwärts probirt, am linken Auge einen positiven Erfolg, am rechten hingegen bis 233 aufwärts einen negativen, 400, 562, 611 einen zweideutigen.

Stud. Wolff, ebenfalls mit starker Ungleichheit, fand 71 links positiv, rechts negativ; 90 l. null r. negativ, 233 und 400 mit beiden Augen positiv.

Stud. Nies fand das Glas 527 4mal links positiv, 4mal rechts null; 824 . 537 = 470 4mal links positiv, rechts 2mal null, 2mal negativ, 400 links wie rechts negativ.

O. K. gab an, dass 71 vor dem rechten Auge einen auffälligeren negativen Erfolg gebe, als vor dem linken.

Uebrigens hat diess Resultat nichts Auffallendes, da natürlich ein helleres Auge eines stärkern Verdunklungsgrades bedarf, um in ein gegebenes Verhältniss der Dunkelheit gegen ein dunkles Auge zu treten, als umgekehrt.

Von den Bestimmungen sind manche bei blauem Himmel oder mit Blick auf eine weisse Wolke bei sonst heiterm Himmel; andre bei trübem oder leicht bedecktem Himmel gewonnen, was ich kurz mit bl., w. W. und tr. bezeichne, ohne jedoch die Helligkeit des Himmels von wesentlichem Einflusse auf die Lage des Indifferenzpunctes zu halten, wie ich unten noch näher bespreche.

Ich selbst habe sehr oft gelegentlich meine Gläser versucht, und fast immer, bei blauem wie trübem Himmel, mein hellstes Glas 824 noch negativ, an einigen Tagen jedoch auch zweideutig oder selbst positiv gefunden. Unter 23 noch ausserdem geprüften Individuen fanden noch vier, Funke (bl. und tr.), Grabau (bl.), Welcker (tr.) und Zöllner (bl. und tr.) 824 negativ; jedoch Funke (w. W.) und Grabau (tr.) an einem andern Tage auch positiv, mithin den Indifferenzpunct tiefer. 400 ist immer negativ gefunden worden, obwohl in ein paar Fällen sehr schwach und zweideutig oder blos auf einem Auge, indess auf dem andern Auge nichts entschieden war. Der Indifferenzpunct scheint hienach bei normalen Augen einen Spielraum von ungefähr 500 bis gegen 1000 zu haben.

Im Mittel aus den 31 Bestimmungen finde ich 671 als Indifferenzpunct. Die Bestimmungen, aus denen dieses Mittel abgeleitet ist, sind aus den S. 420 angegebenen Gründen freilich so roh, dass ich nicht dafür stehen mag, es sei nicht um 20 bis 30 in plus oder minus irrig, d. h. abweichend von dem, welches durch eine grosse Zahl genauerer Bestimmungen sich ergeben würde. Doch kann man ihm zufolge vorläufig den Indifferenzpunct durchschnittlich bei ungefähr $^2/_3$ der vollen Helligkeit 1000 annehmen; mit Rücksicht jedoch, dass er in vielen Einzelfällen beträchtlich höher oder tiefer liegen kann.

Aus 10 Bestimmungen an verschiedenen Individuen bei heiterm Himmel insbesondere finde ich 712 als Mittel; aus 25 bei trübem Himmel 671, eine Abweichung zwischen heitern und trüben Fällen, die, namentlich in Betracht der geringen Zahl heitrer Fälle, viel zu klein ist, um sicher zu sein, und vielmehr beitragen kann, dafür zu sprechen, dass die Helligkeit des Himmels von keinem wesentlichen Einfluss auf die Lage des Indifferenzpunctes ist.

Die Zahl der heitern und trüben Fälle zusammen beträgt hiebei 35

statt 31, weil manche sowohl bei heiterm als trübem Himmel geprüfte Individuen in der Gesammtzahl der Fälle blos einmal verrechnet sind, wenn das Resultat sich gleich blieb. Wo das hellste Glas 824 noch negativ gefunden ward, ist 912 als Mittel zwischen 824 und 1000 zur allgemeinen Mittelbestimmung zugezogen.

Vielleicht wurde es noch räthlicher gewesen sein, anstatt des Himmels eine weisse Wand als Object der Betrachtung zu wählen, da ich aber die Versuche mit dem Blick in den Himmel begonnen hatte, wollte ich sie auch vergleichbar damit fortsetzen.

Der Erfolg der völligen Verdunklung eines unvollkommen verdunkelten Auges fodert auf, den Erfolg der völligen Verdunklung eines ganz freien Auges näher in Betracht zu ziehen, worüber ich bis jetzt nur mehr oder weniger oberflächliche Angaben vorliegend finde.

Wenn man, während man in den Himmel sieht, oder eine gleichförmig weisse oder graue Fläche betrachtet, ein Auge verdeckt, so legt sich momentan ein sehr leichter Schatten über die Fläche, welcher von nicht aufmerksamen Beobachtern meist übersehen wird. Unter einer Mehrzahl (ungefähr 30) Personen, die ich unabhängig von einander den Versuch anstellen liess, versicherten inzwischen 4, darunter drei, welche die Erhellung bei Verdeckung eines halb verdunkelten Auges sehr gut wahrnahmen, *) selbst nachdem sie wiederholt darauf hingewiesen wurden, nichts von einem solchen Schatten bei Verdeckung eines Auges wahrnehmen zu können; es sei ganz dasselbe, ob sie blos das eine oder andre oder beide Augen aufmachten.**)

Ich muss es dahingestellt sein lassen, ob in allen diesen Fällen die leichte Beschattung wirklich fehlte, oder zum Theil nur wegen nicht gehörig angewandter Aufmerksamkeit übersehen ward. Inzwischen ist es

*) Bei der vierten ward ein Versuch desshalb nicht angestellt.

**) Unter diesen 4 Ausnahmen befindet sich Prof. Möbius, den ich zweimal zu verschiedenen Zeiten desshalb befragt habe, und der das erste- wie das zweitemal bei Wiederholung des Versuches erklärte, dasselbe Resultat zu finden, gleich viel ob er das rechte oder linke Auge verdeckte; was um so bemerkenswerther ist, als beide Augen bei ihm sehr ungleich sind; das rechte nämlich viel weitsichtiger als das linke. Auch sieht er mit diesem rechten Auge den Jupiter im Fernrohr heller, als mit dem linken; wenn er jedoch abwechselnd beide Augen beim Blick in den Himmel verdeckte, zeigte sich kein unzweideutiger Unterschied in der Helligkeit des Gesichtsfeldes zu Gunsten des rechten Auges.

nicht nöthig, eine solche Annahme zu hegen, um auch bei diesen Personen einen Indifferenzpunct zu statuiren; er könnte nämlich bei ihnen nur so nahe an der vollen Helligkeit 1000 liegen, um keine Erkenntniss des Lichtunterschiedes bei Verdeckung des unverdunkelten Auges mehr zu gestatten; denn bekanntlich bedarf selbst jeder objective Lichtunterschied einer gewissen Grösse, um erkannt zu werden. Jedenfalls haben die obigen Angaben insofern Interesse, als sie beweisen, dass der Unterschied der Helligkeit beim Sehen mit zwei Augen und einem Auge gering genug sein kann, um völlig verkannt zu werden.

Es bleiben aber diese Fälle nur Ausnahmen. Alle, die ich sonst desshalb befragt habe, als Dove, Feddersen, Funke, Grabau, Ruete, Volkmann, Welcker, Zöllner und viele Laien, erklärten sich übereinstimmend mit meiner eigenen Erfahrung dahin, dass im Moment des Verdeckens eines Auges eine leichte Beschattung des Gesichtsfeldes eintrete.

Ich selbst finde, und eben so fand es Welcker, dass der, im Momente des Verdeckens eines Auges eintretenden, leichten Beschattung des Gesichtsfeldes sehr schnell eine kleine Wiedererhellung folgt, die jedoch immer nur bei grosser Aufmerksamkeit wahrgenommen wird, und manchmal deutlicher als andremale erscheint; am deutlichsten, wenn ich statt des Himmels ein begränztes weisses Feld auf schwarzem Grunde betrachte. Doch glaube ich zu finden, dass ich auch nach dieser Wiedererhellung definitiv mit einem Auge ein wenig minder hell sehe, als mit zweien. Mehrere Andre, wie Grabau, Ruete, Volkmann, die ich in dieser Beziehung befragte, konnten nichts von einer solchen Wiedererhellung wahrnehmen, wahrscheinlich weil die Pupillenerweiterung, welche bei Verdecken eines Auges bekanntlich in beiden Augen statt findet, und von welcher der Erfolg wahrscheinlich bei mir abhängt, bei ihnen sich noch schneller als bei mir vollziehen mag.

Alle übrigens stimmten dahin überein, dass die Verdunklung bei Verdeckung eines Auges nur sehr gering sei, abgesehen von solchen, wo eine entschieden ungleiche Helligkeit beider Augen statt findet, die sich dann dadurch äusserte, dass das Gesichtsfeld bei Verdeckung eines Auges erheblich dunkler erschien, als bei Verdeckung des andern. Nicht minder giebt bei ihnen, wie ich wenigstens bei dreien derselben constatirt habe, der Doppelbildsversuch mit dem weissen Felde auf schwarzem Grunde ungleich helle Bilder.

Nehme ich die Hand von dem verdeckten Auge weg, so tritt bei mir eben so eine momentane Erhellung mit nachfolgender rascher Verdunklung wie beim Verdecken Verdunklung mit nachfolgender Erhellung ein. Sehe ich mit einem Auge bei Verdecken des andern in den Himmel, so macht sich die plötzliche Erhellung bei Wegziehen der Hand als ein rasch vorübergehender Blitz geltend; der auch von andern Personen, die ich darum befragte, wahrgenommen ward. Unstreitig ist der Umstand, dass das offene Auge durch das Licht ermüdet, das verdeckte reizbarer dagegen wird, der Grund, dass das Phänomen der Erhellung bei Oeffnung des geschlossenen Auges überhaupt auffälliger als das Phänomen der Verdunklung bei Schliessung eines Auges erscheint.

Die Geringfügigkeit des Helligkeitsunterschiedes je nach dem Sehen mit zwei Augen und mit einem Auge kann einen doppelten Grund haben. Gewiss ist, und schon oben wurde diess erwähnt, dass bei Verdecken eines Auges sich die Pupille nicht nur des geschlossenen sondern auch des offenbleibenden Auges schnell erweitert, und es liesse sich denken, dass der durch Schliessung des einen Auges verminderte Lichtzutritt durch die von der Pupillenerweiterung des andern Auges abhängige Vermehrung des Lichtzutritts so weit compensirt würde, dass der Unterschied der Helligkeit nur ganz gering bliebe, ja vielleicht bei manchen Personen vermöge vollständiger Compensation wirklich fehlte.

So fasst Dubrunfaut die Sache. Er sagt (Compt. med. XLI. 1008):

»Si l'on regarde successivement une image, une surface blanche par exemple placée sur un fond noir, avec un oeil, puis avec les deux yeux, on ne peut reconnaitre aucune différence dans la sensation perçue, et l'éclat de la surface se montre le même dans les deux cas. . . .«

»En poussant plus loin cet examen, c'est à dire en observant ce qui se passe dans l'état de la pupille, dans les deux cas que nous venons de spécifier, on remarque qu'elle est inégalement dilatée: elle l'est moins dans la vision binoculaire et elle l'est plus dans la vision monoculaire. Si l'on accompagne ces observations de la mensuration du diamètre de la pupille dans les deux cas mentionnés, on reconnait, que le diamètre de la pupille dans la vision monoculaire est au diamètre de la même pupille dans la vision binoculaire $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{1}$.«

»Ce fait se vérifie dans tous les cas où la vision s'exerce sans malaise et sans contrainte c'est à dire dans les limites moyennes de contraction et de dilatation des pupilles. Il se vérifie sur des vues myopes comme sur des vues presbytes, nonobstant l'impressionabilité différente de ces vues par un même stimulus. Il se vérifie encore avec la lumière artificielle comme avec la lumière naturelle.«

Weder sind Masse beigefügt, noch über die Massmethode etwas angegeben.

Diese sehr kategorischen Angaben von Dubrunfaut sind aber weit entfernt, befriedigend zu sein. Dubrunfaut bemerkt nichts von dem leichten Schatten, der sich bei Verdecken eines Auges über das Gesichtsfeld legt, und giebt nichts über seine Methode der Pupillenmessung an. Unstreitig aber liesse sich nur durch eine sehr feine und schwierige Messung das von ihm angegebene Verhältniss der Pupillenerweiterung constatiren. Es muss daher der Zweifel erlaubt sein, ob das von ihm angegebene Verhältniss nicht vielmehr auf Theorie als Messung beruht, und der Erfolg des obigen paradoxen Versuches, mit welchem der Erfolg des jetzigen natürlich zusammenhängt, lässt mich schliessen, dass, wenn schon die Pupillenerweiterung bei Verdecken eines Auges unstreitig beiträgt, den verminderten Lichtzutritt zu compensiren, doch nicht der ganze Erfolg hieran hängen kann. In der That könnte man bei dem paradoxen Versuche von einer Erweiterung der Pupille höchstens dieselbe annähernde Compensation des verminderten Lichtzutritts erwarten, welche eintritt, wenn man von zwei freien Augen eins plötzlich ganz verdunkelt; wobei aber statt einer momentanen Erhellung vielmehr eine momentane Verdunklung in die Erscheinung tritt.

Ausserdem habe ich mich durch folgenden Versuch direct überzeugt, dass der Erfolg des paradoxen Versuchs nicht von Pupillenänderung abhängt. Ich sehe mit beiden Augen in den Himmel, mit dem einen *A* aber durch ein Nadelloch in einem Kartenblatte, mit dem andern *B* durch ein Glas, welches dunkel genug ist, um beim Doppelbildsversuche mit einem kleinen weissen Felde ein dunkleres Bild zu geben, als das Loch im Kartenblatt. Nun schliesse und öffne ich das Auge hinter dem Glase abwechselnd, oder lasse das Glas abwechselnd verdecken und wieder frei geben; dann zeigt sich der Erfolg der Erhellung und Verdunklung des Gesichtsfeldes wie beim gewöhnlichen paradoxen Versuche, ungeachtet hier der Einfluss einer Pupillenänderung ausgeschlossen ist. Stelle ich den Versuch mit einem meiner hellern Gläser an, welches eine hellere Componente im Doppelbildsversuch giebt, als das Nadelloch, so tritt, wie zu erwarten, vielmehr Verdunklung bei Verdeckung und Erhellung bei Freilassung von *B*, also ein positiver Erfolg ein; auch wenn das Glas dunkel genug ist, um ohne Zuziehung des Kartenblattes den negativen Erfolg zu geben.

Bei den Versuchsformen des folgenden Abschnittes, wo ein Dop-

pelbild auseinandergeschoben wird, tritt der Erfolg des paradoxen Versuches ein, ohne dass überhaupt ein Auge verdeckt wird; also kann auch hier der Erfolg nicht von Pupillenänderung abhängig gemacht werden.

Ausserdem habe ich schon früher gefunden und mitgetheilt,*) und finde es auch jetzt bei einer Wiederholung des Versuchs bestätigt, dass Auslöschen eines von zwei gleichen Lichtern eine erheblich stärkere Verdunklung des Gesichtsfeldes mitführt, als Schluss eines Auges.

Unter Umständen kann ein Wettstreit zwischen dem lichten Gesichtsfelde eines offnen, und dem schwarzen eines geschlossnen Auges statt finden.

Purkinje (I. 64) sagt von sich selbst: »wenn ich bei bedecktem rechten Auge das linke, welches schwach und fernsichtig ist, einige Minuten lang gegen eine lichte Fläche fixire, so entsteht bald ein Kampf zwischen der Sichtbarkeit der Gesichtsfelder beider Augen, die Aufmerksamkeit kann sich nicht andauernd im Gesichtsfelde des linken halten und überspringt wiederholt, so oft die Intention der Willensthätigkeit nachlässt, ins rechte Auge, dessen Gesichtsfeld sich dann als eine Finsterniss vor den zu sehenden Gegenstand schiebt. In diesem bemerke ich nun ein Gewimmel von kleinen weissen Pünctchen, die sich in Wirbeln bewegen und endlich bei länger fortgesetztem Schauen mit dem linken Auge in ein flackerndes homogenes Dämmerlicht übergehen.«

Volkmann findet abgesehen von dem bei ihm nicht eintretenden Gewimmel, welches unstreitig nur eine von der Individualität abhängige Nebenerscheinung ist, die Angabe Purkinje's über diesen Wettstreit ganz durch seine eignen Beobachtungen bestätigt, und machte mir darüber schon Mittheilung, ehe er Purkinje's Angabe kannte. Nur bemerkt er noch, dass er je nach abwechselnder Intention das Lichte oder Schwarze im Gesichtsfelde bei diesem Wettstreit auch mehr oder weniger willkührlich zum Uebergewicht bringen könne, ein Einfluss der Willkühr, dessen Deutung natürlich mit derjenigen zusammenhängt, welche dem Einflusse der Willkühr bei den übrigen Wettstreitsphänomenen zu geben sein wird (vgl. den 8. Abschnitt).

Mir selbst gelingt es nicht, diese Art Wettstreit zu erzeugen.

Auch bei der durch mich veranlassten Anstellung des paradoxen

*) Abhandl. d. Soc. d. Wissensch. IV. 489.

Versuches durch so viele Personen sind einigemale Wettstreitsphänomene beobachtet worden, so namentlich von Grabau. Vielleicht werden sie sich öfter zeigen, wenn man absichtliche Intention ins Spiel setzt, da, wie ich im 8. Capitel erörtert habe, solche überhaupt Wechsel durch ihre Wechsel begünstigt. Ich halte es in dieser Beziehung am besten, den paradoxen Versuch, zu dessen Betrachtung wir uns jetzt zurückwenden, mit möglichster Gleichgültigkeit anzustellen.

Selbstverständlich, wenn man vom Indifferenzpunct an die Dunkelheit des Glases steigert, wächst die Auffälligkeit des Erfolges beim paradoxen Versuche, und ich kann in dieser Hinsicht in der Reihe meiner einfachen Gläser keine Gränze finden, so dass ich, wenn ich Jemand den Versuch mit sicherm und augenfälligem Erfolge anstellen lassen will, ihm eins der dunkelsten Gläser, 63 oder 71 in die Hand gebe. Inzwischen ist von der andern Seite selbstverständlich, dass, wenn man mit der Dunkelheit des Glases vor *B* immer weiter gehen wollte, doch endlich eine Gränze des Vortheils eintreten müsste, und dass ein Glas, oder eine Glascombination, welche fast alles Licht ausschliesst, für die Auffälligkeit des Erfolges beim paradoxen Versuche eben so unvortheilhaft sein muss, als ein solches, welches dem Indifferenzpunct zu nahe liegt; weil die völlige Verdunklung eines schon fast ganz verdunkelten Auges keine erhebliche Aenderung mehr mitführen kann. Es muss also ein Glas oder eine Glascombination von einem gewissen Dunkelheitsgrade geben, wo der Erfolg der Erhellung des Gesichtsfeldes beim paradoxen Versuche am auffälligsten ist, wenn das dadurch verdunkelte Auge *B* verdeckt oder geschlossen wird, der Art, dass jedes hellere wie minder helle Glas einen minder auffälligen negativen, wo nicht gar (bei Uebersteigen des Indifferenzpunctes) positiven Erfolg giebt. Auch bestätigt diess die Erfahrung. Die dunkelsten einfachen Gläser meiner Skale geben mir einen entschieden deutlichern negativen Erfolg, als die hellsten noch negativen; aber, wenn ich statt eines der einfachen dunkelsten Gläser mehrere superponirt anwende, so wird der Erfolg des paradoxen Versuchs wieder geringer.

Wir erhalten also zum ersten bedeutungsvollen Punct, dem Indifferenzpunct, einen zweiten, den Maximumpunct des Erfolges beim paradoxen Versuche. Der letzte ist zugleich, wie man leicht übersieht, derjenige Punct, wo bei ungleicher Helligkeit beider Netzhäute das Gesichtsfeld das dunkelst mögliche ist, und insofern kann er auch den

Namen des Minimumpunctes erhalten, welchen wir künftig dafür brauchen werden.

Unstreitig ist eine Bestimmung dieses Minimumpunctes von nicht minderm Interesse, als die des Indifferenzpunctes; nur gilt auch dasselbe als für jenen, dass er nämlich schwer genau bestimmbar und nach Individualität und Umständen veränderlich ist.

Um zuvörderst die Thatsache desselben im Allgemeinen in einfachster Weise zu constatiren, nehme ich eine dazu geeignete Combination aus drei superponirten Gläsern, z. B. eine der folgenden

$$400 \,.\, 145 \,.\, 115 = 7$$
$$400 \,.\, 233 \,.\, 145 = 14$$

statt eines einfachen Glases vor das Auge *B*, und entferne zuerst das letztgestellte der drei Gläser, d. i. 115 oder 145; dann das zweite 145 oder 233, so dass zuletzt nur noch das Glas 400 davor bleibt. Bei der ersten Wegnahme tritt Verdunkelung, bei der zweiten Erhellung des Gesichtsfeldes ein. Nun sind die drei Helligkeiten des Auges *B*, die nach einander beim Versuch statt finden:

$$7;\ 58;\ 400$$
$$14;\ 93;\ 400.$$

Also verdunkelt sich das gemeinsame Gesichtsfeld, wenn ich die Helligkeit des Auges *B* von 7 auf 58 oder von 14 auf 93 steigere; erhellt sich dagegen, wenn ich sie von 58 oder 93 auf 400 steigere, und es muss also nach dem Versuche mit der ersten Combination der Minimumpunct zwischen 7 und 400, nach der zweiten zwischen 14 und 400 zu suchen sein.

Natürlich kann man auch umgekehrt verfahren, und, anstatt ein Glas nach dem andern abzuheben, ein Glas nach dem andern superponiren; der Erfolg wird in umgekehrter Richtung der entsprechende sein.

Endlich kann man, anstatt in voriger Weise mit superponirten Gläsern zu verfahren, auch mit juxtaponirten ungleich hellen Gläsern in solcher Weise verfahren, dass man nach einander das dunklere und hellere Glas vor das Auge schiebt, mit Vorsicht nur, dass nicht im Uebergange zwischen beiden volles Licht in das Auge falle. Zu diesem Zweck halte ich die beiden Gläser, das eine nach oben, das andre nach unten, mit den Rändern ihrer schwarzen Fassungen an oder etwas über einander, indem ich mit Daumen und Zeigefinger von beiden Seiten über die Fuge greife, und führe nun durch Auf- oder Abwärtsbewegung der

Verbindung das eine Glas nach dem andern vor dem Auge vorüber. Anstatt einfacher Gläser kann man auch Combinationen aus superponirten Gläsern so juxtaponirt verwenden, wenn man die Gläser jeder Combination durch Wachs an einander festigt oder durch geschicktes Halten der ganzen Verbindung die erforderliche Festigkeit giebt.

Bei diesem Verfahren mit Juxtaposition bin ich nicht im Stande, unter Anwendung meiner einfachen Gläser den Minimumpunct nachzuweisen; sondern die Helligkeit wächst, ohne innerhalb dieser Gläser eine Gränze zu finden, fortgehends, wenn ich von dunklern zu hellern Gläsern übergehe, und nimmt ab, wenn ich umgekehrt verfahre, was natürlicherweise damit zusammenhängt, dass die Auffälligkeit des paradoxen Versuchs durch die ganze Reihe meiner einfachen Gläser mit der Dunkelheit der Gläser wächst, und beweist, dass der Minimumpunct sehr tief liegen muss; wie er denn nach den weiter folgenden Versuchen sicher meist unter 50 liegt, indess das dunkelste meiner Gläser, die bläulichen mitgerechnet, 63 ist. Lasse ich aber Combinationen in die Juxtaposition eingehen, so ergiebt sich das Dasein eines Minimumpunctes sehr leicht. In der That erhielt ich Erhellung, wenn ich auf diese Weise von der Combination 562 . 562 = 54 sei es zu folgenden dunklern oder hellern juxtaponirten Combinationen, oder einfachen Gläsern überging.

Im Uebergange von

562 . 562	zu	71 . 90	d. i. von	54	zu	6	erfolgt Erhellung.
„ „	„	115 . 145	d. i. von	„	„	17	
„ „	„	115 . 205	d. i. von	„	„	23	
„ „	„	71	d. i. von	„	„	71	
„ „	„	90	d. i. von	„	„	90	

Da nun 54 sowohl Erhellung giebt, wenn von da zum nächst kleinern 23 als zum nächst grössern 71 übergegangen wird, so werden durch 23 und 71 hier Gränzen bestimmt, zwischen welchen der Minimumpunct bei mir liegen muss. (Ging ich von 54 zu 30 über, so erhielt ich nur ein zweideutiges Resultat: indem der Unterschied hier zu gering ist, um bemerklich zu werden.)

Um zu sehen, wie sich verschiedene Individuen in dieser Beziehung verhalten, habe ich ziemlich viele Versuche, die ich kurz Combinationsversuche nennen will, theils mit Superposition (oder Abheben), theils mit Juxtaposition der Gläser nach der durch vorige Beispiele erläuterten Weise angestellt. Das letzte Verfahren ist vorzu-

ziehen, und ich bedaure, erst später dazu übergegangen zu sein. Theils lässt es eine leichtere Abstufung der Lichtintensitäten zu, theils ist der Uebergang zwischen den Intensitäten gleichförmiger zu vollziehen, und das Urtheil sicherer, so dass nicht so viel zweideutige Fälle vorkommen, als bei dem Verfahren mit Superposition. Doch sind desshalb die mit Superposition erhaltenen Resultate nicht zu verwerfen; und es soll zunächst von einigen, auf diesem Wege erhaltenen, Resultaten die Rede sein.

Dabei soll das Glas das feste heissen, welchem das zweite Glas zugefügt, oder von welchem das zweite Glas abgehoben wird. Ferner soll Erhellung bei Zufügung eines Glases oder Verdunklung bei Wegnahme eines Glases, was dasselbe Phänomen, nur in umgekehrter Richtung verfolgt, ist, folgends als negativer Erfolg, Verdunklung bei Zufügung eines Glases oder Erhellung bei Wegnahme als positiver Erfolg bezeichnet werden.*) Die folgenden Versuche sind theils mit Zufügen, theils mit Wegnehmen angestellt; in jeder kleinen Reihe aber immer auf dieselbe Weise. Noch fehlt es an vergleichenden Versuchen, ob nicht die eine Modification des Verfahrens etwas andre Erfolge als die andre giebt. In der Folge verstehe ich beide gemeinschaftlich unter dem Verfahren mit Superposition.

Bei der Unzahl von Combinationen, die sich nach diesem Verfahren durchprobiren liessen, bevorzugte ich die Combinationen der (auf S. 354 durch eine Klammer vereinigten) gleichen oder nahe gleichen Gläser, welche meine Skale enthält, fügte jedoch in der Regel auch einige Versuche mit Combinationen aus nächstliegenden ungleichen Gläsern bei.

Hiebei wurde nun zunächst folgendes allgemeines Resultat erhalten, welches unter Voraussetzung des Minimumpunctes voraus zu sehen war, und umgekehrt zu den Beweisen seines Daseins gehört.

Wenn die gleichen oder nahe gleichen Gläser sehr dunkel sind, so geben sie bei dem Superpositionsverfahren negativen Erfolg, wenn sie hinreichend hell sind, positiven Erfolg. Dazwischen giebt es zwei Gläser, wo der Erfolg bei Entfernung oder Zufügung des einen zweideutig

*) Diese Bezeichnung so wie die damit zusammenhängende beim paradoxen Versuch bezieht sich darauf, dass Verdunklung bei Zufügung eines Glases oder bei Verdeckung der natürlichen Voraussetzung entspricht, Erhellung aber widerspricht.

bleibt. Wenn bei zwei gegebenen gleichen oder nahe gleichen Gläsern negativer Erfolg eintritt, so ist diess auch der Fall, wenn man statt dessen irgend zwei noch dunklere gleiche oder auch ungleiche Gläser zum Versuch verwendet. Und wenn bei zwei gegebenen gleichen oder nahe gleichen Gläsern positiver Erfolg eintritt, so ist diess auch der Fall, wenn man statt dessen irgend zwei noch hellere gleiche oder ungleiche Gläser zum Versuch verwendet. Bei gar zu hellen oder gar zu dunklen gleichen Gläsern muss freilich der Unterschied durch seine Geringfügigkeit zweideutig werden; doch geht die Skale meiner einfachen Gläser nicht so weit nach oben oder unten.

So erhielt ich selbst (bei hellem wie trübem Himmel), Funke (bei schön blauem Himmel) und ein dritter Beobachter (K.) (bei schwach bedecktem Himmel) folgende Resultate, wenn von den nachfolgenden Glascombinationen vor dem Auge *B* das vorderststehende Glas entfernt und dadurch eine grössere optische Helligkeit hergestellt wurde.

	Fechner	Funke	K.
63 . 63	—	—	—
71 . 90	—	—	—
90 . 71	—	—	—
115 . 145	—	+	0
145 . 115	—	+	0
233 . 233	0	+	+
394 . 400	+	+	+
744 . 752	+	+	+
795 . 824	+	.,	+

Man sieht hier, dass bei verschiedenen Personen der Wendepunct Null verschieden fällt, der allgemeine Gang des Phänomens aber bei allen drei Beobachtern derselbe bleibt. Auch habe ich diess bei allen Individuen bestätigt gefunden, die ich sonst noch in dieser Hinsicht geprüft habe; nur dass ich mich in der Regel begnügte, die Combinationen so weit zu verfolgen, bis sich ein Wendepunct herausgestellt hatte, der in der That nie verfehlt hat, sich herauszustellen.

Bei allen Individuen (mit nicht zu ungleich hellen Augen), mit denen ich bisher Versuche darüber anstellte, trat stets Verdunklung ein, wenn von den beiden dunkelsten Gläsern, die ich besitze, d. i. den zu 63 taxirten bläulichen Gläsern eins entfernt, Erhellung, wenn zum einen das andre zugefügt wurde, also negativer Erfolg. Nun sind zwei superponirte Gläser 63 äquivalent einem

Glase 4*); also trat stets Verdunklung des Gesichtsfeldes ein, wenn sich der Erleuchtungsgrad des Auges *B* von 4, welches der Combination entspricht, auf 63, welches dem einfachen Glase entspricht, steigerte.

Nicht minder trat bisher stets bei mir selbst wie bei allen von mir, zum Theil mehrmals geprüften, Individuen (im Ganzen 23) bei hellem wie trübem Himmel stets negativer Erfolg bei der Combination 71 . 90 = 6 ein, mochte 71 oder 90 das feste Glas sein. Nur bei einer unter diesen Personen (mit sehr guten kräftigen Augen) war der Erfolg, obwohl noch als negativ bezeichnet, doch fast zweideutig, wie ich überhaupt über den Grad der Entschiedenheit des Erfolgs sehr abweichende Aeusserungen von verschiedenen Personen zu vernehmen pflege.

Die Combination 115 . 145 = 17 giebt mir selbst, eben so bei hellem wie trübem Himmel untersucht, stets nur negativen Erfolg, mag 115 oder 145 das feste Glas sein. Eben so fand es sich in der Mehrzahl der Fälle, doch nicht ausnahmslos, bei anderen Individuen: nämlich unter 26 Fällen an 24 Individuen überhaupt 15 mal schlechthin negativ, 1 mal eine Spur negativ, 4 mal zweideutig oder verschieden, je nachdem das eine oder andre Glas das feste war; 1 mal eine Spur positiv, 2 mal schlechthin positiv.

Die Combination 233 . 233 = 54 gab mir selbst bei hellem wie trübem Himmel meist einen zweideutigen Erfolg, bei der Mehrzahl aber einen positiven Erfolg, überhaupt in 23 Fällen bei eben so viel Individuen 12 mal schlechthin positiv, 1 mal eine Spur positiv, 4 mal zweideutig, 3 mal eine Spur negativ, 3 mal schlechthin negativ.

Die Combination 394 . 400 = 158 gab überall einen positiven Erfolg, mit Ausnahme von ein paar Fällen, wo der Erfolg zweideutig erschien.

Die Combination 562 . 562 = 315 hat stets einen positiven Erfolg gegeben wo ich sie geprüft habe, was in 6 Fällen geschehen ist.

Fasst man die in voriger Einschaltung erhaltenen Resultate zusammen, so hat man für folgende Combinationen im Mittel der beiden Fälle, dass das eine und andre Glas jeder Combination zum festen gemacht wird, folgenden Erfolg beim Uebergange zwischen folgenden Erleuchtungsgraden des Auges *B*.

*) Nämlich mit Rücksicht, dass unsre photometrischen Zahlen Tausendtel der vollen Helligkeit bezeichnen, ist der wahre Werth des Glases 63 gleich 0,063; mithin der wahre Werth einer Combination von zwei solchen Gläsern 0,063 . 0,063 = 0,003969, oder abgekürzt gleich 0,004; d. i. gleich 4 Tausendtel der vollen Helligkeit.

Combination	Uebergang zwischen	Erfolg
63 . 63	4 : 63	—
71 . 90	6 : 80	—
115 . 145	17 : 130	— öfter als +
233 . 233	54 : 233	+ öfter als —
394 . 400	158 : 397	+
562 . 562	315 : 562	+

Hienach liegt durchschnittlich zwischen dem Uebergange von 17 zu 130 und von 54 : 233 eine Umkehr des Erfolges; und wenn man also von einem gewissen Glase, was zwischen 17 und 54 liegt, zu einem gewissen andern zwischen 130 und 233 übergeht, muss weder positiver noch negativer Erfolg eintreten.

Giebt es einen Minimumpunct, so muss überhaupt jeder physischen Helligkeit, kurz Lichtintensität, des Auges *B* diesseits des Minimumpuncts eine andre jenseits entsprechen, wo die Helligkeit des Gesichtsfeldes für die Empfindung, was wir kurz Helligkeit schlechthin nennen, dieselbe ist, der Art, dass, wenn man von der einen zur andern Intensität des Auges *B* übergeht, die Helligkeit des Gesichtsfeldes ungeändert bleibt. Solche Intensitäten des Auges *B* mögen conjugirte heissen.

Nun hatte man schon solche conjugirte Intensitäten in der circa bei 672 liegenden Intensität des Indifferenzpuncts und der bei gänzlicher Verdeckung des Auges *B* eintretenden Nullintensität, da ja die Helligkeit des Gesichtsfeldes sich nicht ändert, wenn man das mit dem indifferenten Glase verdeckte Auge ganz verdeckt. Diese beiden conjugirten Intensitäten sind die extremen, die es überhaupt giebt; indem es zu Intensitäten, welche oberhalb der oberen dieser Intensitäten liegen, keine conjugirte mehr giebt.

Zu den vorigen conjugirten Intensitäten haben sich dann die zwei einander näher liegenden gefügt, deren eine durchschnittlich zwischen 17 und 54, die andre zugehörige zwischen 130 und 233 zu suchen ist. Ausserdem muss es der Natur der Sache nach noch unzählige andre geben. In der That wird das Folgende theils eine nähere, theils vervielfältigte, Bestimmung solcher conjugirten Puncte bringen.

Bei Versuchen darüber hat man sich zu hüten, Erfolge, die nur desshalb zweideutig sind, weil die Intensitäten, zwischen denen man

übergeht, auf derselben Seite des Minimum einander zu nahe sind, um einen deutlichen Helligkeitsunterschied zu geben, kurz einseitige Nullerfolge, mit solchen zu verwechseln, die auf dem Uebergange zwischen wirklich conjugirten Puncten, die zu beiden Seiten des Minimums liegen, kurz zweiseitigen Nullerfolgen, zu verwechseln, was beim Verfahren mit Superposition noch leichter als mit Juxtaposition, jenseits des Minimumpuncts leichter als diesseits ist. Einzelne Beobachtungen gewähren in dieser Hinsicht überhaupt kein sichres Mittel der Unterscheidung, eine zusammenhängende Anstellung mehrerer aber lässt gemeinhin die Verwechslung leicht verhüten. So schliesse ich aus weiterhin mitzutheilenden Beobachtungen, dass der zweideutige oder Nullerfolg, welchen ich gewöhnlich mit Superposition bei der Combination 233 . 233 erhalte, nur ein einseitiger ist.

Die Ergebnisse der bisherigen Versuche lassen sich am leichtesten übersehen und die der folgenden am leichtesten darstellen, wenn man sie durch Ziehung einer Curve zugleich repräsentirt und interpolirt; deren Gestalt zwar bis zu gewissen Gränzen noch sehr zweifelhaft bleibt, aber nach den folgenden Datis doch nur die Wahl zwischen dem ungefähren Zuge einer der folgenden beiden Formen lässt; wobei der tiefste Punct μ noch weiter nach links liegend angenommen werden kann, als es sich in den Figuren darstellt. Diese Curven erläutern sich und dienen zur Erläuterung wie folgt.

Fig. 1.

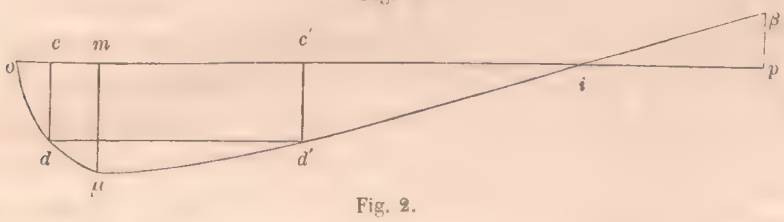
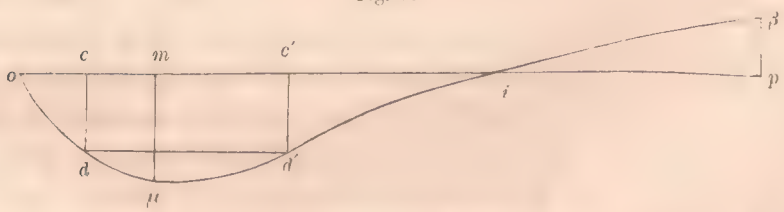


Fig. 2.



Stellen wir bei constant erhaltener, gleich 1000 gesetzter, Lichtintensität im Auge *A* die durch vorgenommene graue Gläser sich abändernde, durch deren photometrische Zahl gemessene, Intensität des Auges *B* durch die Längen der von einem Nullpunct *o* anhebenden

Abscissen dar. Dann geht die ganze Skale der Intensitäten, welche im Auge *B* durchlaufen werden kann, von Null bis 1000, wovon erster Werth bei gänzlichem Verschluss von *B*, letzterer dann statt findet, wenn *B* so frei und offen als *A* ist. Diese volle Abscissenlänge von 0 bis 1000 (Fundamentallänge) wird in den Figuren durch *op* vorgestellt.

Wenn es den Uebergang zwischen zwei Puncten dieser Intensitätenskale des Auges *B* gilt, so nennen wir die photometrische Zahl der kleinern Intensität, welche mithin einem Puncte näher an *o* oder einer kleinern Abscisse entspricht, die Vorderzahl, die, welche der grössern entspricht, die Hinterzahl.

Wenn das Auge *A* ganz offen, das Auge *B* ganz geschlossen ist, so findet eine gewisse Helligkeit des gemeinsamen Gesichtsfeldes statt, welche die Ausgangshelligkeit heisse. Substituiren wir für den Schluss des Auges die Verdunklung mit einem Glase, was dunkler als das indifferente des paradoxen Versuchs ist, so mindert sich die Ausgangshelligkeit; substituiren wir ein Glas, was heller ist, als das indifferente, so vermehrt sie sich, wie die frühern Versuche gelehrt haben. Der Zuwachs, den die Ausgangshelligkeit letztern Falls erfährt, und die Verminderung, welche dieselbe erstenfalls erfährt, soll kurz als positive und negative Differenzhelligkeit bezeichnet und durch positive und negative Ordinaten der Curve dargestellt werden.

Vielleicht kann man gegen diese Repräsentation ein formelles Bedenken aus dem Gesichtspuncte erheben, dass die Helligkeitsänderung des Gesichtsfeldes, um die es sich hiebei handelt, ein Empfindungswerth ist, und dass die Repräsentation eines Empfindungswerthes durch Ordinaten die Messbarkeit desselben voraussetzt; ein Mass von Empfindungswerthen ist aber seither nicht statuirt worden. Inzwischen glaube ich in meinen »Elementen der Psychophysik« dargethan zu haben, dass Empfindungswerthe dem Masse nicht unzugänglich sind, und das Folgende wird selbst zeigen, in wiefern doch die betreffende Repräsentation zur Erläuterung des allgemeinen Ganges der Empfindungswerthe dienen kann, um was es hier in der That viel mehr, als um ein genaues Mass zu thun ist.

Diess vorausgeschickt, so hat beim Anfangspunct *o* der Abscissen die Ordinate, welche die Differenzhelligkeit darstellt, nach dem aufgestellten Begriffe derselben einen Nullwerth; und da der Uebergang zwischen dem indifferenten Glase und dem Schluss des Auges beim para-

doxen Versuche keine Helligkeitsänderung giebt, so ist auch beim Indifferenzpunct i die Ordinate null, und die Curve der Differenzhelligkeiten schneidet also bei o und i die Axe der Abscissen. Beim Minimumpunct m erlangt die Differenzhelligkeit den grösstmöglichen negativen Werth $m\mu$, beim Endpunct p den grössten positiven Werth $p\pi$. Den conjugirten Puncten c, c' entsprechen zwei gleiche Differenzhelligkeiten cd und $c'd'$.

Die Data, welche nach dem Bisherigen zur Bestimmung des Ganges der Curve vorliegen, sind überhaupt folgende:

1) Die Abscisse des Indifferenzpunctes oi, wo die Curve die Abscissenaxe schneidet, ist durchschnittlich 672.

2) Die Abscisse des conjugirten Punctes c fällt zwischen 17 und 54, die Abscisse des zugehörigen c' zwischen 130 und 233.

3) Der zwischen den conjugirten Puncten zu suchende Minimumpunct liegt also sicher im ersten Viertel der Fundamentallänge op, oder der totalen Intensität 1000.

Zu diesen Datis lässt sich noch fügen:

4) Die Maximumordinate $p\pi$ ist erheblich kleiner als die Minimumordinate $m\mu$, und die Curve sinkt also im Minimum tiefer unter die Abscissenaxe, als sie im Maximo darüber aufsteigt.

Diess ergiebt sich daraus, dass, wenn man ein mit einem der dunkelsten einfachen Gläser der Skale (welche dem Minimumpunct nahe liegen) verdunkeltes Auge B im paradoxen Versuche ganz schliesst, d. i. ungefähr von der Helligkeit μ zu o übergeht, eine viel auffallendere Erhellung eintritt, als Verdunklung bei Schluss eines ganz offnen Auges d. i. bei Uebergang von p zu o. Nicht nur ist diess selbstverständlich bei den Personen, welche nach S. 423 bei Verdeckung eines freien Auges gar keine wahrnehmbare Verminderung der Helligkeit des Gesichtsfeldes wahrnehmen konnten, doch aber den negativen Erfolg des paradoxen Versuches deutlich erhielten, sondern ward auch von mir so wie mehreren meiner Mitbeobachter, welche eine leichte Beschattung bei Verdeckung eines freien Auges wahrnehmen, noch besonders constatirt.

Ich erläutere diese Repräsentation zunächst an drei Versuchsreihen, einer A mit Superposition, den beiden andren B und C mit Juxtaposition, die zu verschiedenen Zeiten tatonnirend angestellt wurden, um dem Minimumpunct etwas näher zu kommen, alle drei bei trübem Himmel. A und B von mir (respectiv am 23. Sept. und 4. Nov.), C von Grabau (am

16. Nov.). Aus der Reihe *B* sind die schon S. 430 mitgetheilten Resultate ausgezogen. Bei der Reihe *A* wurde zwischen den einzelnen Versuchen eine Zwischenzeit von mehrern Minuten interponirt, so dass die ganze Reihe mehrere Stunden in Anspruch nahm; bei den beiden andern sind die Versuche in continuo angestellt. Bei der Reihe *A* fand sich im paradoxen Versuche zu Anfang und nach Schluss der Reihe 752 zweideutig, 562 schwach negativ, also der Indifferenzpunct ungefähr bei 752, was ein Ausnahmefall ist, da ich sonst an den meisten Tagen nicht nur 752, sondern selbst 824 negativ finde. Auch war diess bei der Reihe *B* mit Juxtaposition zu Anfange wie nach Schluss der Versuche der Fall. Bei der Reihe *C* gab 824 einen zweideutigen, 744 einen schwach negativen Erfolg.

Jeder Versuch wurde, wie ich diess immer so halte, sowohl am rechten als linken Auge angestellt; wo aber die Resultate für beide übereinstimmend waren, ist das Resultat überall blos einfach dafür verzeichnet, sonst durch r und l für das rechte und linke Auge unterschieden. Wo mehrere, durch einen Verticalstrich getrennte, Angaben stehen, geschahe die Prüfung (jedesmal an beiden Augen) eben so viele verschiedene male, aber nicht unmittelbar nach einander, sondern durch Rückgang nach Zwischeneinschiebung anderer Versuche. Wo ein Fragezeichen beigefügt ist, war der Erfolg nur zweideutig in dem betreffenden Sinne. Ausserdem bedeutet st stark, sch schwach, Sp Spur, entsch entschieden. Mit Null sind auch solche Erfolge bezeichnet, wo zwar eine Veränderung gefunden wurde, aber zweideutig blieb, ob in + oder —, was, wie schon früher bemerkt, nicht selten der Fall.

Reihe *A* mit Superposition.
(Fechner)

3,7 : 41	entsch —
6 : 71	st —
90	st —
8 : 36	st —
12 : 131	—
16 : 41	—
17 : 145	— | — | —
19 : 131	sch —
30 : 131	0
52 : 131	0
54 : 233	0 | 0
74 : 131	0
93 : 400	sch +
97 : 131	0
125 : 537	+
131 : 562	st +
158 : 394	0 | 0
175 : 752	sch +
212 : 533	+
315 : 562	sch +

Reihe *B* mit Juxtaposition.
(Fechner)

6 : 45	st — | —
54	—
394	—
17 : 54	— | — | —
71	—
21 : 30	0 | Sp —
23 : 30	Sp —
54	—
30 : 35	—?
45	0 | 0 | — | —? | Sp +
54	0
92	sch —
115	—
158	—?
218	Sp —
233	+
34 : 45	Sp +
45 : 71	sch + | + | + | 0
90	+
205 : 394	+
233 : 400	st +

Reihe *C* mit Juxtaposition.*)
(Grabau)

6 : 30	deutl. —
8,2 : 30	sch —
14,6 : 30	sch —, 1 deutlicher
18 : 30	0
23 : 30	0 oder + ?
30 : 45	sch —
53	entsch —
66	0
71	0 od. Sp —
92	0
95	0
115	r Sp +, l 0
192	+
325	+
420	+

*) In dieser Reihe ist 205 . 145 = 29,7, (oben abgerundet zu 30 gesetzt) in allen Combinationen als Vorder- oder Hinterzahl angewendet. Auch 16,7 und 21,0 wurden so geprüft; gaben aber am linken Auge angewendet, so viel Wettstreit, dass sich keine sichern Angaben machen liessen.

Diese Tabellen sind nach den aufsteigenden Werthen der Vorderzahlen geordnet. Man sieht auf den ersten Blick, wie die negativen Erfolge in beiden beim Aufsteigen der Vorderzahlen aus dem Negativen ins Positive umschlagen. Da die Versuche tatonnirend ausgeführt sind, so war auch die Reihenfolge der Versuche mehr oder weniger unregelmässig, und die obige Ordnung ist eine Sache der Redaction, so dass man den Umschlag der Vorzeichen nicht etwa mit einem Einflusse der Versuchsperiode in Beziehung setzen kann. Nach dem Anblick der Curve muss vielmehr ein solcher der Natur der Sache nach erfolgen; denn wenn die Vorderzahl den Minimumpunct *m* überschritten hat, so kann kein negativer Erfolg mehr Platz finden, und blos noch positive Erfolge oder einseitige Nullerfolge. Mit Rücksicht hierauf lehrt uns die erste Reihe, dass der Minimumpunct über 19, die zweite und dritte, dass er über 30 hinaus liegt. Von andrer Seite kann kein positiver Erfolg statt finden, so lange der Minimumpunct durch die Hinterzahl noch nicht erreicht ist; und verfolgt man daher die Reihen nach der aufsteigenden Ordnung der Hinterzahlen, so muss der Minimumpunct diesseits der kleinsten Hinterzahl liegen, welche einen positiven Erfolg giebt. Diess ist in der Reihe *A* 400; in der Reihe *B* 45, in der Reihe *C* unter Nichtberücksichtigung des zweifelhaften + bei 23 : 30, welches auch mit den andern Zahlen nicht stimmt, 115; und der Minimumpunct wäre hienach in Reihe *B* zwischen den ziemlich engen Gränzen 36 und 45 zu suchen, vorausgesetzt, dass die Spur + bei 45 verlässlich ist. Alle übrigen Zahlen dieser Reihe stimmen sehr wohl zu dieser Voraussetzung. Ausserdem hat man darin zwei recht gut bestimmte conjugirte Puncte, nämlich 30 mit einem Mittel zwischen 218 und 233, d. i. 226, sofern 30 : 218 eine Spur —, 30 : 233 aber + gab, und der ganze Gang der Hinterzahlen zur Vorderzahl 30 stimmt sehr wohl hiezu. In Reihe *C* wird man 30 mit einem Werthe zwischen 115 und 192 conjugirt ansehen können.

Die Reihe *A* zeigt in grossen Intervallen Nullwerthe, die mindestens grossentheils offenbar einseitiger Natur sind, und nach Vergleich mit Reihe *B*, wo man diess nicht findet, beweisen, dass jenes Verfahren viel minder empfindlich als dieses ist.

Nachdem ich durch tatonnirende Versuche die sehr tiefe Lage des Minimumpunctes hinreichend erkannt hatte, suchte ich in einigen Versuchsreihen eine Mehrzahl conjugirter Puncte diesseits und jenseits des-

selben zu bestimmen, so weit sich diess mit meinen Gläsern erreichen lässt, wobei man in Rücksicht ziehen muss, dass die Lückenhaftigkeit der Gläserskale keinen methodischen Fortschritt zuliess. Hier folgen vier nach dem Verfahren der Juxtaposition zu diesem Zweck angestellte Reihen. Der oberhalb jeder Reihe angegebene Indifferenzpunct ist bei diesen Reihen vor, während und nach den Versuchen bestimmt worden, und, da er durch die Versuche keine unzweideutige Aenderung erlitten, schliesse ich, dass die Reizbarkeit nicht wesentlich durch die Versuche abgeändert ward, worauf man übrigens keineswegs immer rechnen kann. Ausser den vorigen habe ich zwar noch einige ähnliche Reihen begonnen und zum Theil durchgeführt, die aber aus verschiedenen Ursachen verunglückten. Bei einem Beobachter (Grabau) machten sich nicht nur bei der S. 439 Anm. schon angeführten, sondern auch einer andern versuchten Reihe Wettstreitsphänomene bei den dunklern Vorderzahlen zu störend geltend; bei einem Andern wirkten beide Augen, obschon sie keinen Helligkeitsunterschied erkennen liessen, doch zu ungleich, so dass in grosser Breite das eine Auge positive, das andre negative Erfolge gab. Auch unter den folgenden Reihen zeigt sich eine fast constante Ungleichheit beider Augen bei der von mir angestellten Reihe, sofern das linke fast überall negativere Erfolge giebt als das rechte, was bei den früher S. 439 angeführten Reihen nicht oder nicht auffällig von mir bemerkt worden ist, da keine verschiedenen Aufzeichnungen für r und l darin vorkommen, also auf einer temporären Stimmung beruhen musste. Bei der Zöllnerschen Reihe zeigte sich eine Ungleichheit andrer Art zwischen beiden Augen, sofern das rechte Auge nicht sowohl den Unterschied in bestimmter Richtung anders fand, sondern überhaupt nur etwas deutlicher fand, was mit der unten bemerkten Helligkeitsdifferenz seiner Augen zusammenhängen mag. Auch die v. Zahnsche Reihe ist aus diesem Grunde nicht frei von Ungleichheiten, wogegen sich in der Funke'schen nichts Auffälliges der Art zeigt.

Die Bezeichnungen in folgenden Reihen sind wie S. 438 angegeben, zu verstehen.

Fechner.

14. Nov. Ganz blauer Himmel. Indifferenzpunct ungefähr bei 824.

Vorder-zahl	Hinter-zahl	Erfolg	Vorder-zahl	Hinter-zahl	Erfolg
90 . 71 = 6,4	454	r o, l sch —	145.115 = 16,7	233	—
	591	sch — | r st +, l sch — | r +, l sch — | r +, l o		293	—
				320	0 | r +, l schwächer —
	744	st +		432	+
145.71 = 10,3	394	sch —	233 . 90 = 21,0	53	st —
	441	r +, l —		83	—
	454	sehr sch +		293	—
145 . 90 = 13,1	293	r sch —, l st — | r o, l — | r sch +, l —		302	r +, l — | r st +, l schwächer —
	302	+		315	r st +, l Sp —
	313	r Sp +, l —		394	+
	315	+			

Reihenfolge der Versuchsanstellung nach den Vorderzahlen: 16,7; 10,3; 13,1; 6,4; 21.

Hiezu noch folgende Data vom 12. und 13. Nov. bei blauem Himmel (paradox. Vers.: am 12. Nov. 824 null; am 13. negativ).

Datum	Vorderzahl	Hinterzahl	Erfolg
12. Nov.	205 . 145 = 29,7	133	r st —, l sch —
		233	r 0, l Sp —
		293	r +, l —
13. Nov.	145 . 115 = 16,7	185	entsch —, r stärker als l
		313	r +, l sch —
		320	r +, l — (gleich st)
		394	r sch +, l 0.

Diese Zahlen scheinen mit denen der Hauptreihe vergleichbar zu sein. Ich bestimme nach beiden die conjugirten Puncte ungefähr wie folgt:

Gegen die Vorderzahl 6,4 erscheint 591 noch mit schwachem positiven, 454 mit schwachem negativen Uebergewicht; daher ich das Mittel von 454 und 591 = 523 mit 6,4 als ungefähr conjugirt annehme. — Mit 10,3 erscheint 441 conjugirt. — Mit 13,1 setze ich das Mittel von 313 und 293 gleich 305 conjugirt. — Mit 16,7 320; mit 21 302.

Funke.

7. Nov. Bedeckter Himmel. Indifferenzpunct ungefähr bei 824.

Vorderzahl	Hinterzahl	Erfolg 1. Abth.	2. Abth.
145.71 = 10,3	394	—	
	441	sch —	
	537	0	
	571	+, l mehr als r	Sp —
	613	l 0, r +? | 0	Sp —
	655	sch +	0 | 0 od. Sp +
	744	,,	+
145.90 = 13,1	205	deutlich —	
	225	—	
	293	—	
	325	Sp —	
	394	0 oder Sp —	— | 0 od. Sp —
	465	,,	sch —
	537	Sp —	vollkommen 0
	613	,,	+
	655	Sp +	sch +
	744	+	
205.71 = 14,6	233	—	
	394	Sp —	deutlich —
	441	0 od. Sp —	sch —
	537	0 od. Sp —	Sp —
	571	+	Sp +

Beide Abtheilungen sind unmittelbar nach einander angestellt.
Reihenfolge der ersten Abth. 14,6; 10,3; 13,1
,, ,, zweiten ,, 10,3; 14,6; 13,1.
Nach Zusammenfassung beider Abtheilungen nehme ich zu 10,3 conjugirt das Mittel von 537, 571 und 613 = 574; zu 13,1 537 und zu 14,6 das Mittel von 441, 537 und 571 = 503.

Zöllner.

7. Nov. Graulicher Himmel. 824 noch negativ, also Indifferenzpunct etwa bei 912.

Vorderzahl	Hinterzahl	Erfolg	Vorderzahl	Hinterzahl	Erfolg
8,2	325	r 0, l Sp —	14,6	90	Sp —
	400	0 oder —?		145	0 od. Sp +
	454	Sp —		233	0
	537	—		394	r Sp +, l 0
	537	Sp +		441	Sp —
	538	+		537	+
	613	+			

Vorder-zahl	Hinter-zahl	Erfolg	Vorder-zahl	Hinter-zahl	Erfolg
10,3	233	—	16,7	35	—
	293	0		46	—
	302	0 od. Sp —		51	Sp —
	325	0		67	0
	400	0		74	Sp —
	454	0		81	r Sp —, l 0
	537	Sp +		90	r —, l 0
	558	+		125	r Sp +, l 0
13,1	71	st —			
	95	Sp —			
	115	0			
	125	0			
	125	r 0, l —			
	169	0			
	225	0			
	302	+			
	454	+			

Reihenfolge: 8,2; 10,3; 13,1; 16,7; 14,6.

Zu 8,2 nehme ich 537 conjugirt; zu 10,3 das Mittel aus 325 und 454; zu 13,1 das Mittel aus 169 und 225; zu 14,6 das Mittel aus 90 und 145 (der negative Werth bei 441 ist wohl anomal); zu 16,7 das Mittel aus 90 und 125.

Zöllner gehört zu denen, bei denen das linke Auge etwas heller sieht, wie sich sowohl bei abwechselnder Verdeckung der Augen, als im Doppelbildsversuche zeigt; doch ist der Unterschied gering, indem er beim Doppelbildsversuche durch Verdunklung des linken Auges mit meinem hellsten Glase 824 schon übercompensirt wird.

v. Zahn.

13. Nov. Ganz blauer Himmel. Indifferenzpunct ungefähr bei 657.

Vorder-zahl	Hinter-zahl	Erfolg	Vorder-zahl	Hinter-zahl	Erfolg	Vorder-zahl	Hinter-zahl	Erfolg
10,3	51	—	16,7	71	r 0, l —	29,7	48	r 0, l +
	66	—		74	r 0, l —		81	0
	108	—?		90	—		115	r +, l +?
	133	0		131	0		117	+
	225	+		315	+		131	+*)
	320	+					218	+*)

Reihenfolge: 10,3; 16,7; 30.

*) Rechts stärker als links.

Da 10,3 mit 133 und 16,7 mit 131 einen zweideutigen oder Nullerfolg giebt, setze ich 132 mit dem Mittel von 10,3 und 16,7 = 13,5 conjugirt. Die Data zu 29,7 deuten dahin, dass 29,7 schon jenseits des Minimumpunctes liegt.

Auch die Augen v. Zahns sehen ungleich hell, das linke heller als das rechte. Durch ein Glas 744 oder 752 vor dem linken Auge ward die Ungleichheit fast doch nicht ganz compensirt, durch 824 . 795 = 655 schon übercompensirt.

Hienach würden sich ungefähr folgende Zahlen für conjugirte Puncte bei den vier verschiedenen Beobachtern ergeben. a heisse die Zahl für den Indifferenzpunct, b für den vordern, c für den hintern conjugirten Punct; x eine aus a, b, c abgeleitete Zahl, deren Berechnung und Bedeutung später angegeben werden wird.

Fechner ($a = 824$)			Funke ($a = 824$)			Zöllner. ($a = 912$)		
b	c	x	b	c	x	b	c	x
6,4	523	17,1	10,3	574	30,6	8,2	537	19,5
10,3	441	21,6	13,1	537	35,9	10,3	390	17,6
13,1	305*)	21,4	14,6	503	33,6	13,1	197	16,4
16,7	320	26,4				14,6	118	15,4
21,0	302	31,9				16,7	108	18,6
29,7	293**)	43,6						

v. Zahn ($a = 657$)

b	c	x
13,5	132	16,2.

Zu diesen Bestimmungen conjugirter Puncte will ich noch einige, gelegentlich bei tatonnirenden Versuchen nach dem Verfahren der Superposition erhaltene rohe Bestimmungen fügen, unter Beifügung des ebenfalls roh bestimmten, hier überall ziemlich niedrig liegenden, Indifferenzpunctes.

Beobachter	Vorderzahl	Hinterzahl	Indifferenzpunct
Volkmann	11,5	145	537
L. G.	12,3	113,3	551
Ruete	14,9	110	562
Feddersen	16,5	81	657
W. V.	19,3	105,3	609

*) Nach Vergleich mit den andern Zahlen wahrscheinlich zu klein.

**) Wenn dieser Werth nicht unbeträchtlich höher als der am 4. Nov. S. 440 bestimmte Werth 226 für dieselbe Vorderzahl 30 (das abgerundete 29,7) ist, so kann das theils an der Verschiedenheit der Beobachtungstage, theils der Unsicherheit beider Bestimmungen liegen.

Diese Bestimmungen schliessen sich alle besser den von Zöllner und v. Zahn, als von Funke und von mir erhaltenen Resultaten an.

So wenig Anspruch auch sämmtliche vorstehende Bestimmungen auf Genauigkeit haben, so sind sie doch genau genug, um sich danach überzeugt zu finden: 1) dass conjugirte Puncte im angegebenen Sinne überhaupt bestehen; 2) dass, je grösser (bei demselben Individuum) die photometrische Zahl des vordern, um so kleiner die des hintern ist, so dass sie nach einem Puncte convergiren, der nichts Andres als der Minimumpunct sein kann; 3) dass je nach der Individualität beträchtliche Verschiedenheit bezüglich der Lage der conjugirten Puncte und hiemit des Minimumpunctes obwalten; 4) dass aber der zwischen je zwei conjugirten Puncten fallende Minimumpunct überall weit diesseits der Mitte der Fundamentallänge liegt.

Genauere Bestimmungen über die Verhältnisse der Curve als diese aus den vorigen Ergebnissen ableiten zu wollen, halte ich für bedenklich in Betreff des Grades der Unsicherheit der Ergebnisse nach ihrem Vergleich unter einander, wie nach dem Anblick der Data, aus denen sie abgeleitet sind, worauf ich unten noch zurückkomme. Insbesondre zeigt sich die von mir angestellte Reihe von den andern darin sehr abweichend, dass die Hinterzahlen zu den grössern Vorderzahlen der conjugirten Puncte fast constant sind, obschon, wenn man die Bestimmung bei 13.1 ausser Acht lässt, doch auch hier alle Hinterzahlen abnehmen, während die Vorderzahlen wachsen. Es lässt sich für jetzt nicht entscheiden, ob dieses abweichende Verhalten eine Sache wirklicher Abnormität meiner Augen, eine Sache der Unsicherheit der Methode oder das eigentlich gesetzliche Verhalten ist.

Will man doch versuchen, nach der Lage der conjugirten Puncte die Lage des Minimumpunctes noch etwas genauer zu bestimmen, so wird Folgendes zu bemerken sein.

Man würde natürlich untriftig verfahren, wenn man die Mitte zwischen zwei conjugirten Puncten für die Lage des Minimumpunctes nehmen wollte, da er vielmehr nach dem durchschnittlichen Gange der Curve näher am vordern als hintern conjugirten Puncte zu suchen ist, weil die Curve rascher vom Ausgangspuncte an nach dem Minimumpuncte zu abfällt, als von ihm an nach dem Indifferenzpuncte ansteigt, was schon ohne genaue Kenntniss seiner Lage aus den bisher erlangten Datis über die engsten Gränzen, die ihm durch die einander nächsten conjugir-

ten Puncte gesetzt sind, und über die Lage des Indifferenzpunctes zu folgern ist. Man würde ihn nun genauer bestimmen können, wenn man die Curvenstücke $o d \mu$ und $\mu d' i$ approximativ als gerade Linien betrachten könnte, wie es nach der Form der Fig. 1 der Fall wäre. Ob aber diess statthaft sei, muss sich durch die Berechnung selbst ergeben, indem nämlich dann die Lage des Minimumpunctes sich nach dieser Voraussetzung aus den verschiedenen conjugirten Puncten merklich übereinstimmend wiederfinden muss; denn schon zwei conjugirte Puncte reichen ausser den beiden extremen o, i zur Bestimmung des Minimumpuncts hin, wenn $o d \mu$ und $\mu d' i$ für gerade Linien genommen werden können; auch lässt sich dann, wenn man μi noch bis β geradlinig verlängert, das Verhältniss der Maximumordinate βp und das Verhältniss der conjugirten Ordinaten cd, $c'd'$ zur Minimum-Ordinate bestimmen. Folgendes die Formeln dazu. Sei:

$$\begin{aligned} om &= x & oi &= a \\ m\mu &= y & oc &= b \\ \beta p &= z & oc' &= c \\ cd &= u & op &= 1000 \end{aligned}$$

dann hat man die Proportionen

$$u : y = b : x$$

$$u : y = a - c : a - x$$

und hieraus

$$x = \frac{ab}{a + b - c}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{1000 - a}{a - x} \quad ; \quad \frac{u}{y} = \frac{b}{x}.$$

Die hienach berechneten Werthe von x*) sind auf S. 445 den conjugirten Puncten b, c, aus denen sie folgen, zugefügt, und man sieht, dass sie bei Funke und bei Zöllner im Sinne der Curvenform Fig. 1 wirklich der Constanz sich mehr nähern, als man nach der Sachlage dieser Versuche hätte erwarten können. Hingegen würden die aus meiner Reihe folgenden Werthe besser zu einer Form wie Fig. 2 stimmen. Da ich nun für jetzt nicht im Stande bin, Versuche über diese Frage bis

*) Man kann bemerken, dass ein ziemlich beträchtlicher Unterschied in der Lage des Indifferenzpuncts bei den conjugirten Puncten unsrer Versuche doch keinen sehr bedeutenden in der Grösse von x mitführt, wovon man leicht die Probe machen kann; so dass die Unsicherheit in der Bestimmung des Indifferenzpunctes bei der Berechnung von x nicht so sehr in Betracht kommt.

zur Entscheidung fortzuführen, so lasse ich dieselbe dahingestellt; und gehe daher auch nicht auf eine Berechnung von $\frac{z}{y}$ und $\frac{u}{y}$ ein, welche unter Voraussetzung, dass die Curve sich wirklich nahehin als eine Verbindung gerader Linien betrachten liesse, ein gewisses Interesse haben würde.

Jedenfalls wird man den Minimumpunct als nicht weit abweichend von dem Werthe x anzusehen haben, der aus dem grössten b und kleinsten c fliesst, und da die Mehrzahl der Bestimmungen, welche auf S. 445 gegeben sind, mit dem Zöllnerschen Werth nahe stimmt, so dürfte der Minimumpunct in den meisten Fällen 20 kaum übersteigen, doch in manchen Fällen auch 40 ziemlich erreichen, oder selbst etwas übersteigen. Auf S. 433 sind Fälle erwähnt, wo selbst der Uebergang von 54 zu 233 noch einen negativen Erfolg gab. In diesen Fällen, deren mehrere jedoch nur auf flüchtigen Versuchen beruhen, müsste der Minimumpunct noch erheblich über 54 hinaus liegen.

Es ist nicht ausser Acht zu lassen, dass, wenn man, wie es von uns geschehen ist, die Lichtintensität des geschlossenen Auges B als Ausgangspunct der Abscissen annimmt, hiebei nicht vom absoluten Nullpunct der Intensitäten ausgegangen wird, weil im geschlossenen Auge noch der kleine photometrische Werth des Augenschwarz übrig bleibt (vgl. S. 364). Sollte vom absoluten Nullpunct ausgegangen werden, so müssten die Abscissen etwas rückwärts von o als dem Puncte, wo das Auge B ganz geschlossen, aber der photometrische Werth des Schwarz darin noch vorhanden ist, anfangen. Dem würde natürlich auch noch eine nach rückwärts und aufwärts gehende Fortsetzung der Curve entsprechen, und sie dürfte leicht dadurch im absoluten idealen Anfange bis zur vollen Höhe $p\beta$ gehoben werden. Sollte diese Vorstellung richtig sein, die sich freilich erst begründen liesse, wenn das Gesetz der Curve genau bekannt wäre, so würde man zu der merkwürdigen Folgerung geführt, dass wir mit einem Auge allein genau eben so hell sehen würden, als mit zweien, wenn das andre Auge gar nichts, auch nicht das Schwarz im Auge, empfände, und dass dieses vermöge seines photometrischen Werthes schon in ähnlicher Weise eine gewisse Verdunklung des Gesichtsfeldes bewirkt, als diess von dem photometrischen Werthe sehr dunkler Gläser gilt, wenn sie an die Stelle des Augenschlusses vor das Auge B treten. Unter Voraussetzung der

approximativen Reducirbarkeit der Curve auf gerade Linien würde sich selbst hienach der photometrische Werth des Augenschwarz $\left(= \frac{xz}{y}\right)$ aus der Lage des Minimumpuncts x und dem nach S. 447 bestimmten Werthe $\frac{z}{y}$ leicht berechnen lassen; aber es würde nutzlos sein, auf solche Rechnung einzugehen, so lange die Voraussetzungen dazu noch so precär sind.

Allen bisherigen Versuchen liegt eine Erleuchtung des Auges *A*, welche die Haupterleuchtung heisse, unter, wie sie durch das Licht eines hellen oder trüben Himmels bewirkt wird, und die Erleuchtungen des Auges *B*, repräsentirt durch die (als Decimalbruch geschriebenen) Zahlen der dunkeln Gläser, drücken Bruchtheile dieser Erleuchtung aus. Es fragte sich, ob die absolute Intensität der Erleuchtung Einfluss auf die Resultate, d. i. die Lage des Indifferenzpuncts, des Minimumpuncts und die conjugirten Puncte habe, also z. B. andre Werthe bei hellem als trübem Himmel erhalten werden. So viel ich nach theils indirecten Erfahrungen, theils directen Beobachtungen darüber schliessen kann, ist diess nicht der Fall; so lange die Haupterleuchtung nur nicht so schwach wird, oder die Erleuchtung des Auges *B* nicht durch das dunkle Glas so weit reducirt wird, dass sie mit dem photometrischen Werthe des Augenschwarz vergleichbar wird; wo dann nach der Bemerkung S. 364 die photometrische Zahl des zur Verdunklung des Auges angewandten Glases nicht mehr richtig dessen wirklichen Verdunklungsgrad repräsentirt. Wenn ich statt in den Himmel auf einen schwarzen Grund blicke, so finde ich allerdings, dass der Indifferenzpunct beim paradoxen Versuche zu einem dunklern Glase herabrückt, d. h. dass es eines dunklern Glases bedarf, um noch Verdunklung bei Verdeckung zu erhalten; wogegen folgende Thatsachen dafür sprechen, dass der Einfluss des Grades der Erleuchtung bei stärkerer Erleuchtung verschwindet.

Ich habe schon bemerkt, dass ich gewöhnlich bei hellem, wie trübem Himmel mein hellstes Glas 824 im paradoxen Versuch noch negativ finde, und wenn es sich mitunter schwach positiv zeigt, so habe ich nicht finden können, dass diess mit dem Helligkeitsgrade des Himmels zusammenhinge. Eben so hat Funke bei hellem wie trübem Himmel einen negativen Erfolg damit erhalten. Verdeckt man von beiden offnen Augen das eine, ohne ein dunkles Glas davor zu haben, so sieht man immer denselben leichten Schatten sich über das Gesichtsfeld legen,

mag man in ein Feuer oder auf eine weisse Wand, auf den Milchglasschirm der brennenden Lampe oder das weisse Papier vor sich sehen. Bei der Beobachtungsreihe Funke's, welche S. 443 angeführt ist, stellte derselbe jedesmal den Versuch vergleichungsweise mit dem Blick in den grauen Himmel und auf eine herbstliche Wiese an, die eine weit geringere Lichtintensität darbot, und fand den Erfolg stets von gleicher Richtung, nur beim Blick auf die Wiese etwas leichter beurtheilbar als beim Blick in den Himmel, was er geneigt war, auf die grössere Gleichförmigkeit der Wiese zu schreiben, da der Himmel nicht ganz gleichförmig grau war.

Verschiedene Versuche habe ich vergleichungsweise mit der vollen Hauptbeleuchtung durch den Himmel und einer durch eine dunkle Brille auf 233 künstlich reducirten angestellt; ohne sei es beim paradoxen Versuche oder Combinationsversuchen einen unzweideutigen Unterschied im Resultate finden zu können. Hiezu wurden in das S. 353 beschriebene Brillengestell die beiden Gläser 233 eingesetzt, die Brille vor die Augen gesetzt, so dass beide Augen gleich stark verdunkelt waren, und dann die zu den Versuchen noch nöthigen Verdunklungsgläser des Auges *B* vor der Brille eben so, wie sonst ohne Brille, angewendet.

So fand Zöllner bei blauem Himmel mit und ohne dunkle Brille mein hellstes Glas 824 im paradoxen Versuche noch negativ. Grabau fand bei grauem Himmel mit und ohne Brille im paradoxen Versuche 824 positiv, 571 schwach negativ, 537 entschieden negativ; und in einem Superpositionsversuche mit 205 . 205 ohne Brille auf dem einen Auge Wettstreit, auf dem andern negativen Erfolg, mit Brille auf jenem Nullerfolg, auf diesem negativen Erfolg.

Stud. Nies, dessen linkes Auge heller als das rechte sieht, erhielt bei wiederholter Anstellung eines Superpositionsversuches mit der Combination 115 . 145 = 17 auf dem rechten Auge in mehrmals abwechselnden Versuchen einen negativen oder Nullerfolg, auf dem linken einen positiven, mochte 115 oder 145 das feste Glas sein, mochte die dunkle Brille dabei angewendet werden oder nicht. Ich selbst habe wiederholt den paradoxen Versuch um den Indifferenzpunct herum vergleichungsweise mit und ohne Brille Abends gegen den Milchglasschirm einer brennenden Lampe angestellt. Ich fand den Indifferenzpunct bei einem dunkleren Glase als am Tage (zwischen 744 und 571), aber gleichgültig, ob ich die dunkle Brille dabei vor Augen hatte oder nicht. Hin-

gegen schien mir, wenn ich den paradoxen Versuch mit dem Glase 71 anstellte, der Erfolg, obschon mit und ohne dunkle Brille negativ, doch auffälliger ohne als mit Brille; wobei zu berücksichtigen, dass durch die Superposition der Brille 233 und des Glases 71 die Erleuchtungsintensität von 1000 auf 17 reducirt wird.

Wenn nach Vorstehendem eine Verschiedenheit der Beleuchtungsstärke, falls diese nur nicht gar zu schwach wird, der Vergleichbarkeit der Versuche keinen wesentlichen Abbruch thut, so ist dagegen die Dauer des Versuchs, ob man ein Glas längre oder kürzre Zeit vor den Augen hält, ehe man die Verdeckung beim paradoxen oder den Wechsel beim Combinationsversuch vornimmt, ein zu berücksichtigendes Moment. Im Allgemeinen ist bei den Versuchen so verfahren worden, dass alsbald nachdem das Glas vor die Augen genommen worden, der Versuch angestellt ward; und eine gewisse Gleichförmigkeit in dieser Hinsicht stellt sich bei jedem Beobachter leicht von selbst ein; doch wird bei einer künftigen Wiederaufnahme dieser Versuche eine noch sorgfältigere Wahrung der hiedurch gebotenen Rücksicht zu fodern sein, als bei den hier mitgetheilten Versuchen, die in so vieler Hinsicht erst den Character von vorläufigen tragen, statt gefunden hat. Unten komme ich auf diesen Punct zurück. Hier folgen thatsächliche Belege.

Zöllner fand gelegentlich bei seiner oben angeführten Reihe mit Juxtapositionsversuchen, dass der Uebergang von 16,7 zu 35 wie zu 46 den in der Tabelle verzeichneten negativen Erfolg gab, wenn er in gewöhnlicher Weise schnell vollzogen wurde, dagegen ein positives, wenn 16,7 erst längere Zeit vor den Augen gehalten ward, ehe zum hellern Glase übergegangen wurde, was sich beides bei wiederholten Versuchen bestätigte.

Ausdrückliche Versuche bezüglich der Dauer stellte Grabau unter Zuziehung des Zählers wie folgt an. Der paradoxe Versuch wurde dazu gewählt,*) vor jedem neuen Versuche 15 Sec. auf einen schwarzen Grund gesehen, dann der Blick in den (grauen) Himmel gerichtet, sofort das Glas 394 vor das rechte Auge genommen und, nachdem es genau 1 Sec. vorgehalten worden, was ich kurz als 1 Sec. Dauer bezeichne, diess Auge verdeckt und der Erfolg beobachtet; dann ohne Zwischenruhe derselbe Versuch am linken Auge wiederholt; darauf

*) 824 gab an diesem Tage einen negativen Erfolg.

nach Interposition der 15 Sec. Ruhe derselbe Versuch mit demselben Glase am rechten und linken Auge nur mit der Abänderung wiederholt, dass das Glas vor der Verdeckung 2 Sec. vorgehalten ward, was ich 2 Sec. Dauer nenne; dann nach abermaliger Ruhe eben so folgeweise mit der Dauer 4 Sec., 8 Sec., 16 Sec., 24 Sec.

Nachdem so mit dem Glase 394 verfahren worden, ward mit der Combination 145 . 115 = 17 ganz in derselben Weise verfahren.

Diese beiden Versuchsabtheilungen mit 394 und 17 wurden jede viermal, abwechselnd mit einander, angestellt, um zu sehen, ob bei verschieden hellen Gläsern ein verschiedner Einfluss der Dauer statt habe.

Das Resultat war, dass die Dauer einen augenfälligen, bei 394 noch schneller als bei 17 wirkenden, Einfluss äusserte, die Gläser in der Positivität heraufzurücken, so jedoch, dass bei beiden 2 Sec. Dauer noch nicht hinreichte für den negativen einen positiven Erfolg zu erzeugen.

Bei der Dauer von 1 Sec. wie von 2 Sec. blieb der Erfolg mit 394 eben so wie mit 17 negativ, übereinstimmend mit dem Fall, wenn der Versuch in gewöhnlicher schneller Weise angestellt ward; doch ward nach 2 Sec. Dauer schon eine merklich, und zum Theil selbst viel schwächre Erhellung bei Verdeckung von *B* wahrgenommen als nach 1 Sec. Dauer. Bei 4 Sec. Dauer war das Resultat mit 394 in drei Versuchsabtheilungen bei beiden Augen null, nur in einer spurweise noch negativ; mit 17 in allen 4 Abtheilungen noch negativ, aber erheblich schwächer als bei 2 Sec. Dauer; bei 8 Sec. mit 394 theils null, theils zweideutig positiv; mit 17 theils null, theils noch negativ; bei 16 Sec. und 24 Sec. (welche nur respectiv in 2 und 1 Abth. geprüft wurden) mit 394 null, mit 17 schwankend zwischen null, negativ und zweifelhaft positiv.

Auch mit dem Glase 71 und der Combination 233 . 205 = 48 wurde je eine Versuchsabtheilung angestellt, welche für 71 bei 4 und 8 Sec. Dauer noch negativen Erfolg, für 48 nichts mehr gab; für 71 bei 16 Sec. nichts, für 48 zweifelhaft positiven Erfolg.

Nächst der Dauer der Versuche kommt die Wiederholung derselben in Betracht.

Wenn ich eins meiner grauen Gläser vor einem Auge fortgehends behalte, während ich in den hellen Himmel blicke, und den paradoxen Versuch mit der Verdeckung desselben Auges immer von Neuem schnell hinter einander wiederhole, so wird die Erhellung oder der negative Erfolg dabei successiv immer schwächer, und endlich tritt re-

gelmässig Verdunklung statt Erhellung bei der Verdeckung oder positiver Erfolg ein, wie ich an vielen Tagen mit sehr verschiedener Dunkelheit der Gläser (71 bis 400) constatirt habe. Auch Ruete brachte es durch fortgesetzte Wiederholung bis zur Umkehr; fand aber nachher das Auge sehr angegriffen; und sahe noch lange nachher Farben.*) Eben so schien bei Feddersen Umkehr einzutreten, sicher Schwächung, aber, weil sich schon während des Versuches Farben einzustellen anfingen, konnte die Umkehr nicht ganz sicher constatirt werden. Nicht minder erhielten Grabau und Welcker bei oft hinter einander angestellter Wiederholung der Verdeckung eine entschiedene Schwächung des positiven Erfolgs, ohne dass sie bis zur Umkehr gelangten. Wogegen Funke und Volkmann den Versuch sehr oft hinter einander wiederholten, ohne die jedesmalige Erhellung schwinden oder sich entschieden mindern zu sehen. Es ist versäumt, aufzuzeichnen, welche Gläser von den verschiedenen Beobachtern hiebei angewendet wurden.

Ich habe früherhin nicht bestimmt, nach wie viel Verdeckungen unter Anwendung eines gegebenen Glases bei mir die Umkehr aus dem negativen in den positiven Erfolg einzutreten pflegte; erinnere mich aber sehr wohl, dass dazu viel mehr Verdeckungen nöthig waren, als jetzt, nachdem durch die vielen Versuche, zu denen die verschiedenen Gegenstände dieser Untersuchung Anlass gegeben, unstreitig die Reizbarkeit der Augen sehr gewachsen ist. Sehr wenige Verdeckungen, 4 bis 5, innerhalb eben so vieler Secunden nach dem Zähler vollzogen, reichen jetzt (im Juli und Nov. 1859 verificirt) regelmässig hin, die Umkehr zu bewirken, wenn ich den paradoxen Versuch unter Anwendung des Glases 400 anstelle; ausserdem konnte ich bei einigen vergleichenden Versuchen keinen entschiedenen Unterschied in dieser Hinsicht bemerken, wenn ich $400 \cdot 394 = 158$, oder eins der ganz dunklen Gläser 90 oder 71 anwendete. Zwar mag ein Unterschied vorhanden sein; aber er konnte nicht bedeutend genug sein, um durch eine Verdeckung mehr oder weniger bei einer so geringen Zahl Verdeckungen repräsentirt zu werden.

Ganz anders aber verhält sich der Erfolg, wenn ich, anstatt das Glas vor demselben Auge zu lassen, und abwechselnd die Hand vorzu-

*) Ich selbst habe während und nach den bis zur Umkehr getriebenen Versuchen nichts von Farben wahrgenommen.

nehmen und wegzunehmen, das Glas vor jeder neuen Verdeckung auf das andre Auge hinübernehme, indem dann die Schwächung des negativen Erfolges durch Wiederholung des Versuches nicht eintritt. An einem Tage (3. Juli), wo mit dem Glase 400 vor demselben Auge, beim Blick in den blauen Himmel, schon ein paarmal wiederholte Verdeckungen hinreichten, die Umkehr zu bewirken, blieb der Erfolg ganz ungeschwächt, als ich 25 mal hinter einander das Glas vor jeder neuen Verdeckung auf das andre Auge herüber nahm; als ich es aber von da an vor dem rechten Auge liess, reichten 3 Verdeckungen hin, die Umkehr zu bewirken, und als ich es dann auf das linke hinübernahm und dort liess, reichten 4 bis 5 hin, sie zu bewirken.

Andern Tages (4. Juli) wiederholte ich diesen Versuch so, dass ich mit dem Glase 400 vor einem Auge die Verdeckungen unmittelbar hinter einander vor demselben Auge jedesmal so lange fortsetzte, bis Umkehr eintrat, dann das Glas auf das andre Auge hinüber nahm, und hier wieder so verfuhr, und so im Ganzen 4 mal hin- und wieder, indem sich am andern Auge dann jedesmal wieder negativer Erfolg, d. i. Erhellung bei der Verdeckung einstellte. Erst war das Glas vor dem rechten Auge. Bei der 4. Verdeckung ward der Erfolg zweideutig, bei der 5. trat entschieden positiver Erfolg ein; und ganz dasselbe Resultat ward mit bemerkenswerther Uebereinstimmung bei allen 4 Wechseln wieder erhalten, so dass also jedes Auge in der Zwischenzeit, wo die Verdeckung am andern vorgenommen ward, wieder in den ersten Zustand zurückkam.

Es fragt sich, wovon die Umkehr des Phänomens aus Negativ in Positiv durch Wiederholung oder Dauer des Versuchs abhängt.

Wiederholt habe ich mich überzeugt, dass, wenn die Umkehr eingetreten ist, das Auge *B* mit dem grauen Glase, vor welchem die Verdeckungen vorgenommen wurden, minder ermüdet ist, als das freigebliebene Auge *A*, so dass nicht etwa die Abwechselung zwischen voller und unvollständiger Verdunklung des Auges *B* eine Ermüdung desselben hervorbringt, sondern im Gegentheil bringt der Umstand, dass es dabei doch immer dunkler bleibt, als *A*, eine Erholung desselben in Verhältniss zu *A* mit. Man überzeugt sich hievon leicht, indem man nach eingetretener Umkehr das dunkle Glas weglegt und sofort das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinanderschiebt. Die Componente in dem Auge, vor dem sich das Glas befand, und an welchem

die Verdeckungen vollzogen wurden, erscheint heller als die andre. Es schiene also, dass nach Massgabe, als das freie Auge *A* ermüdet, die vollständige Verdunklung des unvollkommen verdunkelten Auges den Einfluss verliert, Erhellung des Gesichtsfeldes mitzuführen. In der That findet das positive Phänomen gleich bei der ersten Verdeckung statt, wenn ich, ehe ich die Verdeckung von *B* vornehme, eine Zeit lang (20 Sec.) mit dem Auge *A* frei, mit *B* durch das Glas (400) in den Himmel sehe, was mit den oben angeführten Versuchen Grabau's stimmt. Inzwischen ist dasselbe auch der Fall, wenn ich vor dem Verdeckungsversuche mit beiden Augen frei eine gleiche Zeit lang in den Himmel sehe, und einen Null-Erfolg erhielt ich, wenn ich vor den Verdeckungsversuchen die Augen eine Zeit lang schloss. Diese Resultate weiss ich noch nicht genügend zu deuten; sie lehren aber jedenfalls, dass man bei genauen Versuchen, zur Vergleichhaltung der Resultate, die Augen auch zwischen und vor den Versuchen in vergleichbarem Zustande erhalten muss.

Hier die Versuchsbelege: An demselben Tage, 3. Juli, wo die Versuche S. 454 angestellt wurden, stellte ich folgende an, jedesmal 5 bis 10 Min. Zwischenzeit zwischen den Versuchen interponirend, und vor jedem neuen Versuche ein Doppelbild auseinanderschiebend, um mich durch die gleiche Helligkeit der Bilder von dem gleichen Zustande beider Augen zu überzeugen; ausserdem jedesmal, ehe ich zum neuen Versuche überging, durch einen einzigen Verdeckungsversuch am nachher als *B* zu gebrauchenden Auge mich überzeugend, dass negativer Erfolg statt fand. Die Versuche wurden um Mittag bei schön blauem Himmel mit dem Glase 400 angestellt.

1) Glas vor rechtem Auge, linkes frei, so 20 Secunden in den Himmel gesehen, dann die Verdeckung des Auges *B* vorgenommen, es entstand sofort positiver Erfolg, d. i. Verdunklung statt Erhellung.

2) Derselbe Versuch mit linkem Auge vorgenommen. Gleiches Resultat.

3) Mit beiden Augen frei 20 Sec. lang in den Himmel gesehen, dann das Glas vor das rechte Auge genommen und sofort verdeckt. Verdunklung.

4) Wiederholung, nur dass das Glas vor das linke Auge genommen ward. Eben so Verdunklung.

5) Beide Augen 20 Secunden geschlossen, und die Hände überdiess vorgehalten, dann geöffnet, das Glas vor das rechte Auge genommen und sofort verdeckt. Weder Erhellung noch Verdunklung.

6) Wiederholung dieses Versuches unter Anwendung des linken Auges. Eben so kein Resultat.

Die 4 Versuche 3 bis 6 wurden am folgenden Tage, 4. Juli, ganz unter denselben Umständen wiederholt, nur mit der Abänderung, dass statt des einfachen

Glases 400 diess Glas combinirt mit 394 vor die Augen genommen ward, was = 158 ist. Das Resultat war bei allen 4 Versuchen dasselbe. Auch hier wurde vor jedem Versuche der negative Erfolg wie oben durch einen einfachen Versuch constatirt.

Auch noch an einem andern Tage überzeugte ich mich, dass nach Sehen mit beiden Augen durch 30 Sec. in den Himmel ein Glas 115 sofort und sehr entschieden das positive Phänomen gab, nachdem bei einem Versuche vor jener Ermüdung eben so entschieden das negative erhalten worden war.

Da man nach Ermüdung eines Auges dunkler mit demselben sieht als mit dem andern, wie die Versuche des 10. Abschnitts beweisen, so fragte sich, ob diese Verdunklung äquivalent der äussern wirkt, d. h. ob man durch Verdeckung eines ermüdeten Auges ohne graues Glas auch vermehrte Helligkeit erzeugen kann. Diess scheint nicht der Fall zu sein. Allerdings habe ich bei ein paarmal wiederholten Versuchen gefunden, dass, wenn man 15 bis 30 Sec. lang mit einem Auge in den klaren Himmel sieht, indess das andre Auge geschlossen ist, dann diess Auge öffnet, wo eine plötzliche Blendung entsteht, dann sofort das vorher offne, also ermüdete, Auge verdeckt, eine neue Blendung entsteht, welche mir den Character einer Erhellung zu haben scheint, wogegen Wiederverdeckung des vorher geschlossenen Auges eine eben so auffällige Verdunklung des durch die Oeffnung erhellten Gesichtsfeldes bewirkt; ein Versuch, dem noch näher nachgegangen zu werden verdient, da ich selbst mich scheuen musste, ihn oft und mit Abänderungen anzustellen. Aber, wenn ich nur 5 Sec. wartete, ehe ich die Verdeckung vornahm, fiel das Resultat anders aus, ungeachtet nachweislich noch eine Ermüdung fortbestand, welche das Auge dunkler machte, als ein Glas, welches vor das frische Auge genommen und verdeckt negativen Erfolg gab.

So eben noch stellte ich im Zusammenhange und vergleichungsweise mit dem zweiten der S. 415 angeführten Ermüdungsversuche folgenden Versuch an; und hatte schon früher ähnliche Resultate, nur ohne Zahlbestimmung, erhalten.

Ich sahe 30 Sec. lang mit dem rechten Auge bei Verdeckung des linken in den hellen Himmel, was dem nachher angestellten Ermüdungsversuche zufolge eine beträchtlich grössere Verdunklung bei mir erzeugt, als durch ein graues Glas 400 am ausgeruhten Auge entsteht, öffnete dann das linke Auge, wartete 5 Secunden, um die erste Blendung vorübergehen zu lassen, und stellte dann, bei fortgesetztem Blick in den Himmel mit beiden Augen, den Verdeckungsversuch ohne Glas wiederholt am rechten Auge an: aber die Verdeckung gab jedesmal statt einer Erhellung eine leichte Beschattung des Gesichtsfeldes. Als nach-

her das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinandergeschoben ward, war das Bild in dem rechten Auge immer noch viel dunkler als das andre, zum Beweise, dass noch ein erheblicher Grad der Ermüdung fortbestand.

Ich wiederholte nach einiger Zeit den Versuch, indem ich das linke statt des rechten eben so, durch 30 Sec. langen Blick in den Himmel, ermüdete, und verdeckte nach Oeffnung des rechten und 5 Sec. Zwischenzeit das linke, es trat ebenfalls leichte Beschattung des Gesichtsfeldes ein, aber deutlich stärkere, als bei Verdeckung des rechten, nicht ermüdeten, also heller sehenden, Auges. Einige Zeit nachher, und nachdem durch Auseinanderschieben eines Doppelbildes die Ueberzeugung gewonnen war, dass keine merkliche ungleiche Helligkeit in den Augen von den frühern Versuchen her fortbestand, ward dann der Ermüdungsversuch S. 415 angestellt, bei welchem es 19 Sec. dauerte, ehe das durch 30 Sec. ermüdete Auge sich nur bis zu einer Helligkeit 400 erholt hatte, wonach und nach ähnlichen Versuchen anderer Tage die Dunkelheit des ermüdeten Auges nach blos 5 Sec. noch viel beträchtlicher als 400 sein musste, welches im paradoxen Versuche als graues Glas vor dem nicht ermüdeten Auge angewendet sicher negativen Erfolg giebt. Ein durch Ermüdung bis weit unter 400 verdunkeltes Auge ohne Glas giebt also durch Verdeckung Beschattung, während ein Glas 400 oder ein noch dunkleres vor dem nicht ermüdeten Auge durch Verdeckung sicher Erhellung giebt. Die durch Ermüdung erzeugte Dunkelheit des Auges *B* kann also nicht die durch ein graues Glas erzeugte beim paradoxen Versuche ersetzen.

Der Einfluss der Dauer und Wiederholung der Versuche bleibt hienach bis jetzt noch unaufgeklärt. Man kann ihn vielleicht auf einen Einfluss der Gewöhnung reduciren, nur ist damit nicht viel erklärt; denn es würde sich erst noch fragen, worauf Gewöhnung selbst beruht.

So weit gehen die Erfahrungen, die ich über den paradoxen Versuch mitzutheilen habe. Man sieht daraus, dass, so einfach dieser Versuch erscheint, doch ein vollständiger Verfolg dessen, was zu ihm gehört, eine ziemlich umfängliche Aufgabe ist, die mit dem Vorigen nur als theilweis und ganz im Groben gelöst anzusehen ist, und eine Wiederaufnahme der Untersuchung mit zulänglichern Mitteln und Kräften erfodert. Hier muss ich das Bedauern wiederholen, nicht selbst mehr in dieser Hinsicht haben leisten zu können; aber nachdem ich durch die vielen hier mitgetheilten und noch mehr hier übergegangene Versuche erst nach und nach zu der Erkenntniss gekommen, wie die Versuche ferner anzustellen sein möchten, halte ich es für räthlicher, eine Aufgabe, die hienach so zu sagen noch einmal von vorn vorzunehmen wäre, fal-

len zu lassen, und kann nur wünschen, die Aufmerksamkeit andrer Beobachter darauf gelenkt zu haben. Denn obschon ich namentlich zu Versuchsreihen wie die S. 439 und S. 442 angeführten immer nur Zeiten geringerer Reizung meiner Augen wählte, und während der Anstellung jener Reihen keine auffällige Vermehrung des Reizzustandes spürte, machte sich doch eine solche mit verstärktem Lichtflackern jedesmal noch Tagelang in der Nachwirkung geltend, so dass ich es mir entschieden versagen muss, der Verlockung zu einer weitern Fortsetzung dieser Versuche ferner nachzugeben. (Gesunde Augen scheinen nicht eben durch diese Versuche bei stetem Wechsel mit beiden Augen angegriffen zu werden.) Was aber die Ergänzung und den Ersatz der eigenen Beobachtung durch Andre anlangt, so habe ich zwar für die, durch so manche Mitbeobachter mir gewordene, Unterstützung die grösste Ursache dankbar zu sein, kann aber doch nicht über Zeit und Interesse derselben so disponiren, wie es für die Vollständigkeit dieser Untersuchung nöthig wäre, wobei es sich nicht mehr um neue rhapsodische Versuche, was alle bisherigen nur sind, sondern consequent fortgesetzte und abgeänderte Versuche handeln würde, was Beobachter mit eigenem Interesse am Gegenstande oder die Verfügung über ein physiologisches Institut voraussetzt. Die Hauptaufgaben dabei würden sein: eine genauere Bestimmung der Hauptpuncte und des Ganges der Curve der Differenzhelligkeiten, ihrer Abhängigkeit von Individualität, Reizbarkeits- und andern Verhältnissen, mit einer vollständigeren (diese Aufgaben selbst schon zum Theil erfüllenden) Voruntersuchung der Umstände, welche auf die Vergleichbarkeit der Versuche Einfluss haben können.

Aus dem Bisherigen ergiebt sich schon, dass namentlich auf die gleichförmige Einhaltung einer bestimmten Dauer der Versuche in dem S. 451 angegebenen Sinne sorgfältiger Bedacht zu nehmen sein würde, als bisher genommen worden ist. Noch in der letzten Zeit habe ich zwar selbst versucht, einige Reihen zur Bestimmung conjugirter Puncte durch Andre mit, durch den Zähler abgemessener, secundenlanger Dauer anstellen zu lassen; aber theils fanden es die Beobachter zu unbequem, sich ohne Einübung danach zu richten, theils missglückten die Versuche durch die S. 441 angegebenen Umstände. Von der nicht sicher vergleichbaren Dauer bei den Versuchen können manche Incongruenzen oder Abweichungen von der Constanz der Resultate abhängen, welche sich in den mitgetheilten Reihen zeigen; aber auch Andres trägt zur Unsicherheit bei.

Ich habe zwar meine Mitbeobachter bei dem paradoxen und den Combinationsversuchen immer mit den Augen wechseln lassen; aber ungeachtet wiederholter Erinnerung nicht leicht einen regelmässigen Wechsel bei ihnen zu erlangen vermocht, da jeder immer geneigt war, sich durch wiederholte Versuche an demselben Auge erst recht von der Richtung des Erfolges zu versichern, ehe er zum andern Auge überging; namentlich bei etwas zweifelhaftem Erfolge; was aber gerade das Bedenklichste ist, da hier am leichtesten durch die Wiederholung an demselben Auge ein Umschlag erfolgen kann. Auch hierin wird also eine strengere Regel einzuüben und einzuhalten sein. Wiefern bei stetem Wechsel mit den Augen noch Gefahr von Abänderungen der Reizbarkeit für die Vergleichbarkeit der Erfolge hervorgeht, ist auch noch nicht ganz entschieden. In der Regel bin ich zum Schluss der Versuche mit einem Individuum zu den ersten Versuchen zurückgegangen, und habe mehrfach selbst nach längeren Reihen wesentlich dieselben Werthe wiedergefunden, manchmal aber auch Abänderungen, in welchem Falle ich, wenn sie entschieden waren, die Versuche gar nicht oder nur nach ihren Anfangswerthen benutzte; doch kann ich nicht ganz dafür stehen, dass gar kein Einfluss abgeänderter Reizbarkeit durch die Versuche statt gehabt habe.

Bei dem Verfahren mit Juxtaposition bin ich stets so verfahren, dass ich die dunklere Nummer unten, die hellere oben anwandte oder anwenden liess, und durch Abwärtsbewegung der Combination das hellere Glas nach dem dunkleren Glase vor das Auge bringen liess. Wahrscheinlich aber geht aus dieser einseitigen Richtung ein constanter Fehler hervor, der durch eben so oftmalige Anstellung des Versuches in umgekehrter Richtung sich compensiren lassen würde; doch bedarf diess, wie so viele andre Puncte, die möglicherweise von Einfluss auf den Erfolg der Versuche sein können, erst der genaueren Untersuchung durch consequente Beobachtung.

Anstatt sich bei Beobachtungen eines und des andern Tages zu begnügen, werden sie natürlich oft von demselben Individuum zu wiederholen sein, um die grosse Unsicherheit einer einzelnen Reihe durch eine Mehrheit von Bestimmungen zu mindern oder zu heben.

Nicht nur die Beobachtungen, sondern auch Beobachtungsmittel in Bezug auf unsern Gegenstand dürften eine Vervollkommnung erfahren können. Zu einer vollständigeren Untersuchung wird auch eine vollstän-

digere Skale wo möglich noch farbefreierer Gläser, als ich mir zur Zeit verschaffen konnte, nöthig sein, und die kleine Unsicherheit ihrer photometrischen Bestimmung durch Wiederholung derselben noch mehr zu reduciren sein. Ein Mittel, welches gestattete, die Verdunklung eines Auges continuirlich und zugleich messbar abzuändern, für die nur sprungweise abgestuften und sprungweise zu wechselnden grauen Gläser dürfte die directe Bestimmung des Minimumpunctes mittelst eines Mittels aus mehrern Einstellungen sehr erleichtern; wenn schon sich conjugirte Puncte nicht so leicht dadurch würden bestimmen lassen. Man denkt dabei leicht an die Combination von zwei Nicols. Vor dem Auge *B* müsste ein festes Nicolsches Prisma zur Polarisirung, ein zweites drehbares zur Helligkeitsabänderung angebracht sein, und vor dem Auge *A* zwei eben solche Prismen in der Lage, welche das Maximum oder einen bestimmten Bruchtheil des Maximum der Helligkeit giebt, oder ein äquivalentes graues Glas. Freilich ist das Maximum der Lichtintensität, was man so erlangen kann, ein auf die Hälfte, oder, mit Rücksicht auf die nicht völlige Durchsichtigkeit der Prismen, über die Hälfte geschwächtes, Licht, und man erhält nur helle Flecke statt eines ganz erhellten Gesichtsfeldes; doch dürften beide Umstände eine nützliche Anwendung dieses Apparates nicht ausschliessen.

Nach Allem wird sich noch fragen, aus welchem Gesichtspuncte das Phänomen des paradoxen Versuches zu betrachten ist.

Ich habe zwar nicht gefunden, dass Jemand denselben früher vorausgesehen hätte, und gestehe, selbst nicht durch Theorie, sondern durch Zufall im Laufe von Versuchen, die sich nur auf Verwandtes bezogen, darauf geführt worden zu sein; nachdem aber der paradoxe Versuch einmal da war, haben ihn die Meisten gar nicht mehr paradox gefunden, und viele sogar ziemlich selbstverständlich, was er denn doch nicht ist.

Zwei Auffassungen sind mir namentlich begegnet.

Kein Wunder, sagten Einige, dass bei gänzlichem Schluss oder Verdeckung des Auges, vor dem sich ein graues Glas befindet, Erhellung des Gesichtsfeldes entsteht, denn bei Vornahme des dunklen Glases vor das Auge *B* setzt sich die Dunkelheit, die diess Glas erzeugt, mit der Helligkeit des Auges *A* zusammen, indess wir bei gänzlicher Verdeckung des dunklen Auges *B* mit dem hellen wieder allein sehen. Auch, wenn beide Netzhäute von ungleich farbiger Beleuchtung betroffen wer-

den, zeigt sich der Eindruck einer Farbe durch den der andern modificirt. So zeigt sich bei Vornahme eines dunklen Glases der Eindruck der grössern Helligkeit im einen Auge durch den Eindruck der geringern im andern modificirt, und es geht daraus vielmehr ein Mittleres zwischen Hell und Dunkel, als eine Zufügung der geringern Helligkeit im einen zur grössern Helligkeit im andern Auge hervor.

Aber, wenn sich eine Farbe mit der andern zusammensetzt, so setzt sich eine Lichtqualität mit einer andern Lichtqualität zusammen; und also sollte man nach dieser Analogie auch meinen, dass sich die Lichtquantität auf einer Netzhaut mit der Lichtquantität auf der andern, nicht aber mit einer negativen Dunkelheit zusammensetzen müsste; oder dass, wenn eine solche Zusammensetzung möglich wäre, sie auch mit der vollen Dunkelheit des ganz verdunkelten Auges erfolgen müsste; weder auf die eine noch andre Weise aber repräsentirt sich der Indifferenzpunct, der Minimumpunct, die conjugirten Puncte des paradoxen Versuches und der Combinationsversuche. Sollte die resultirende Helligkeit ein Mittleres zwischen den Helligkeiten beider Netzhäute, oder, wenn man lieber will, zwischen der Helligkeit der einen und Dunkelheit der andern, sein, so müsste ein continuirliches Ansteigen der resultirenden Helligkeit erwartet werden, wenn bei constanter Intensität im Auge *A* die Intensität im Auge *B* von Null an steigt; wogegen der Versuch anfangs ein Sinken, erst von einem gewissen Puncte an ein Steigen der resultirenden Helligkeit finden lässt.

Man hat zweitens die Aufmerksamkeitstheorie auch auf die jetzigen Phänomene anwenden wollen, und ich selbst war anfangs dazu geneigt. Man hat gesagt, wenn zum Licht im hellen Auge *A* Licht im dunkeln *B* tritt, so mindert sich der Totaleffect der Empfindung, weil die Aufmerksamkeit dadurch veranlasst ist, sich zu theilen, statt dass sie sich vorher auf das helle Auge concentriren konnte.

Aber gesetzt, die Aufmerksamkeitstheorie sei überhaupt in dem früher angegebenen Sinne haltbar, so würde doch durch diese Auffassung nichts erklärt sein. Denn warum überwiegt die Theilung der Aufmerksamkeit blos bis zu gewissen Gränzen die Vermehrung des Lichtreizes; und was kann berechtigen der Theilung der Aufmerksamkeit zwischen zwei Netzhäuten einen Erfolg beizulegen, den sie bei Theilung zwischen verschiedenen Stellen derselben Netzhaut nicht zu äussern vermag. In der That, wenn zum Licht auf einer Stelle der Netz-

haut Licht auf einer Nachbarstelle tritt, können wir doch nie sagen, dass durch die Theilung der Aufmerksamkeit die Helligkeitssumme im Ganzen abgenommen habe, indess die Helligkeitssumme abnimmt, wenn zum Licht im Auge *A* Licht im Auge *B* tritt, so lange der Zuwachs nicht gewisse Gränzen übersteigt. Spielte also auch die Aufmerksamkeit bei unserm Versuche eine Rolle, so wären doch ihre Gesetze für vorliegenden Fall erst zu finden, nicht aber würde man den Erfolg derselben schon aus irgend welchen bekannten Gesetzen der Aufmerksamkeit erklären können.

Uebrigens treten bei mir die beschriebenen Phänomene ganz abgesehen von willkührlicher Intention der Aufmerksamkeit ein, und wenn sie nach Massgabe der Umstände mannichfachen Abwandlungen unterliegen, scheinen diese, so weit meine Beobachtungen reichen, mehr von Reizbarkeitsverhältnissen und unwillkührlicher Stimmung des Auges abzuhängen, als dass die Willkühr dabei Einfluss hätte.

Ohne meinerseits eine eigentliche Erklärung des Phänomens aus bekannten Principien versuchen zu wollen, scheint mir dasselbe doch folgenden Gesichtspuncten unterzuordnen.

Ganz im Allgemeinen sieht man, dass es nicht gleichgültig ist, ob man immer mehr Licht auf derselben Netzhaut häuft, oder es theilweis auf die andere überträgt oder mit andern Worten, dass die Theilung des Lichts zwischen beiden Netzhäuten einen andern Erfolg hat, als die Häufung auf einer und derselben, so dass sich also auch hier Correspondenz abweichend von Identität zeigt. Geht man in beiden Augen von völliger Dunkelheit aus, so wächst die Helligkeit continuirlich, in welchem beider Augen man auch das Licht einseitig wachsen lassen mag; da nun aber die schon einseitig erzeugte Helligkeit bis zu gewissen Gränzen wieder abnimmt, wenn man das Licht nachmals auch im andern Auge bis zu gewisser Gränze wachsen lässt, so äussert der Hinzutritt des Lichtes auf der zweiten Netzhaut zum Licht auf der ersten eine beschränkende Wirkung auf die Empfindung des Lichts. Dieses nicht hypothetische, sondern factische, Verhältniss bezeichnen wir kurz mit dem Namen eines antagonistischen, da es sich sammt den damit in Verbindung stehenden thatsächlichen Verhältnissen, wovon die folgenden Abschnitte handeln, mit den antagonistischen Verhältnissen, welche sonst im Organismus zwischen der Thätigkeit verschiedener Theile vorkommen, unter einen gemeinsamen Gesichtspunct fassen lässt. Es kann

aber für das Auge immer nur als Thatsache hingenommen werden, dass hier ein solches Verhältniss besteht, und die Gesetze und nähern Bestimmungen dieses Verhältnisses sind hier besonders zu untersuchen, ohne dass jene allgemeine Unterordnung etwas davon erspart, die ich eben desshalb auch nicht für eine eigentliche Erklärung ausgebe.

Mit dieser Auffassung steht nicht in Widerspruch, dass, wenn man die Intensität im Auge *B* über den Minimumpunct der Helligkeit des Gesichtsfeldes hinaus steigert, doch ein Wachsthum der Helligkeit eintritt. Denn unstreitig geht die Wirkung des vermehrten Lichtes auf der einen wie der andern Netzhaut an sich dahin, vermehrte Helligkeit zu erzeugen, nur dass der Antagonismus beider Netzhäute eine Gegenwirkung hiegegen mitführt, die bis zum Minimumpuncte überwiegt, darüber hinaus überwogen wird.

Ich halte es für wahrscheinlich, dass dieser Antagonismus nicht blos die psychische Thätigkeit der Empfindung, sondern auch die durch das Licht erweckte unterliegende physiologische Thätigkeit angeht. Doch können ihn die vorigen Erfahrungen direct blos für die erstere beweisen.

XII.

Ueber den wechselseitigen Einfluss der Beleuchtung begränzter Stellen beider Netzhäute.

Der paradoxe Versuch mit dem Blick in den Himmel oder auf eine ausgedehnte Fläche, wie er im vorigen Abschnitte erörtert worden, beweist ein antagonistisches Verhältniss in dem S. 462 angeführten Sinne zwischen beiden Netzhäuten im Allgemeinen, ohne dass man daraus entnehmen kann, ob sich dasselbe blos auf correspondirende Stellen beziehe oder auch für disparate gelte. Zur Entscheidung sind Versuche mit Reizung beider Netzhäute auf begränzten Stellen nöthig. Solche folgen in diesem Abschnitte, und es ergiebt sich daraus, dass der Antagonismus nicht minder für disparate als correspondirende Stellen gilt, so dass er überhaupt von irgend einer Stelle einer Netzhaut zu irgend einer Stelle der andern Netzhaut herüber als gültig angesehen werden kann.

Zum Beweise für correspondirende Stellen fixire ich einfach mit beiden Augen ein kleines weisses Feld auf schwarzem Grunde, während

ich vor dem Auge *B* eins meiner dunkelsten Gläser, 115, 90 oder 71 habe, merke mir die Helligkeit des weissen Feldes und schiebe ein Doppelbild auseinander, indem ich dabei das Bild im freien Auge *A* fixirt halte. So wie sich das dunkle Bild im Auge *B* vom hellen Bilde im Auge *A* ablöst, sieht man diess heller hervortreten, als das vorher binocular fixirte Bild, ungeachtet ihm doch jetzt das ganze Licht des Bildes *B* entzogen wird, und beim Zusammenschieben sich eben so wieder verdunkeln, ungeachtet ihm doch jetzt das Licht von *B* zugefügt wird, was dem negativen Erfolge des paradoxen Versuches entspricht. Bei Anwendung meiner hellsten grauen Gläser aber kann ich einen solchen Erfolg nicht bemerken, sondern erhalte entweder einen zweideutigen oder einen positiven Erfolg.

Entsprechende Erfolge als durch Auseinanderschieben eines Doppelbildes erhalte ich am Bilde *A* durch Verdeckung des Auges *B*. Findet sich 115, 90 oder 71 vor *B*, so erhellt sich das Bild bei der Verdeckung etwas; findet sich eines der hellsten Gläser davor, so ist der Erfolg zweideutig oder es findet schwache Verdunklung statt.

Bezüglich disparater Stellen beginne ich mit derjenigen Versuchsweise, die mir stets das auffälligste Resultat gegeben hat, indem sie zugleich die Möglichkeit ausschliesst, das Resultat von Pupillenänderungen abhängig zu machen.

Ich nehme eine Karte mit einem Nadelloch vor ein Auge *A* und fixire durch dasselbe ein weisses Feld auf schwarzem Grunde, indess ich das andre Auge *B* schliesse oder verdecke, und beobachte die Helligkeit des Bildes. Darauf öffne ich das Auge *B*, so dass zum Bilde im Auge *A*, das Bild im Auge *B* erscheint.*) So wie es geschieht, verdunkelt sich das erste durch das Loch gesehene Bild sofort, und zwar für meine Augen in sehr auffälliger Weise; indess das mit *B* gesehene Bild lichtweiss erscheint. Verdecke oder schliesse ich *B* wieder, so erhellt sich das mit *A* gesehene Bild wieder und so fort im Wechsel.

Dieser Versuch hat bei allen Personen, welche ich denselben wiederholen liess, Dove, Feddersen, Funke, Grabau, Hankel, Ruete, Volkmann, E. H. Weber, Zöllner, abgesehen von der Stärke des Erfolges,

*) Da der Fixationspunct des Auges *B* meist nicht mit dem des Auges *A* im Object zusammentrifft, wenn *A* durch das Loch sieht, so ist bei der Oeffnung des Auges *B* meist sofort ein Doppelbild da.

dasselbe Resultat gegeben. Und da die Versuche unabhängig von einander und ohne zuvorige Kenntniss der zu erwartenden Richtung des Resultats von ihnen angestellt wurden, kann man das Resultat für zweifelsfrei ansehen; nur dass ausser Dove und Zollner, welche mit mir hinsichtlich der Auffälligkeit des Erfolgs übereinstimmten, keiner dieser Beobachter denselben so auffallend gefunden hat, als ich selbst ihn finde. Insbesondere fanden Feddersen, Funke, Volkmann und E. H. Weber denselben zwar nicht fehlend, doch nur sehr geringfügig, und waren zum Theil geneigt, nur ein gewöhnliches Contrastphänomen darin zu sehen, anzunehmen nämlich, dass das Bild im Auge *A* bei Schluss des Auges *B* nur desshalb sich zu erhellen scheine, weil das hellere Bild in *B* zum Vergleich wegfalle. Aber, wenn schon ich selbst glaube, dass das Phänomen aus einem gewissen allgemeinen Gesichtspuncte mit den Contrastphänomenen unter dieselbe Kategorie zu bringen ist, so lässt sich doch durch Versuche wie folgt (welche auch von mehrern der Obgenannten constatirt wurden) leicht beweisen, dass diese Contrasterscheinung zwischen disparaten Stellen nicht den gewöhnlichen Contrasterscheinungen zwischen differenten Stellen gleichgeltend zu setzen ist.

Wenn man beim gewöhnlichen Sehen mit beiden offenen Augen oder mit einem Auge bei Schluss des andern einem kleinen grauen oder weissen Felde ein andres kleines weisses Feld abwechselnd nähert und wieder davon entfernt, werden keineswegs entsprechende Helligkeitswechsel als bei vorigem Versuche mit dem Kartenblatte spürbar. Auch dann ist es nicht der Fall, wenn man unter Schluss eines Auges mit dem andern durch eine inwendig schwarze Röhre nach einem kleinen weissen oder grauen Felde sieht, und ein weisses kleines Feld abwechselnd herzuschiebt und wegschiebt.

Eigenthümlich ist, dass das durch das Loch im Kartenblatte gesehene Bild oft eine stark violete Nüance hat, wie nicht nur ich selbst, sondern auch Grabau und Ruete, die ich auf die Färbung aufzumerken veranlasste, fanden. Doch habe ich manchmal auch das Bild blos grau gesehen. Vielleicht hängt der Unterschied mit von der Himmelsbeleuchtung ab, was ich nicht hinreichend untersucht habe.

Ausserdem glaube ich folgende Eigenthümlichkeit nicht übergehen zu dürfen, ungeachtet sie sich bisher bei Niemand als bei mir selbst hat constatiren lassen. Die Helligkeit des Bildes im Auge *A*, welches durch

das Loch im Kartenblatt sieht, wächst sehr bedeutend, wenn ich, ohne das Auge *B* selbst irgendwie bei der Verdeckung desselben zu drücken, einen starken Druck auf die Umgebung desselben, d. i. auf Stirn und Wange, ausübe. Zusehends nimmt damit die Weisse des Bildes in *A* zu. Ich finde diesen Erfolg so oft bestätigt, als ich den Versuch wiederhole, was an vielen Tagen geschehen ist; Funke und Grabau aber konnten nichts der Art wahrnehmen.

Bei der vorigen Versuchsweise ist ein Einfluss der Pupillenänderung ausgeschlossen, bei den folgenden Versuchen ist diess nicht der Fall, und dieselben also unstreitig mit Erfolgen der Pupillenänderung bei der Verdeckung und Wiederbefreiung des Auges complicirt.

Wenn ich das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinandergeschoben habe, so brauche ich nur das eine Auge *B* zu schliessen, oder ganz mit der Hand oder auch nur mit einem dunkeln Glase (400 bis 71) zu verdecken, so steigt sogleich die Helligkeit des Bildes im andern Auge *A*, und zwar steigt sie für mein Auge vom Momente des Verdeckens an meist noch bis zu gewisser Gränze fort, so dass, wenn ich einige Zeit (10 Sec. oder länger) nachher die Verdeckung wieder entferne, eine Verdunklung eintritt, die noch auffälliger ist, als die vorige Erhellung. Doch finde ich diesen allmäligen Zuwachs des Erfolges nicht immer gleich deutlich, manchmal entschiedener mit einem Auge als dem andern. Bei den Versuchen mit dem Loch im Kartenblatt schien er zu fehlen, blieb jedenfalls zweideutiger, als bei vielen Versuchen nach jetziger Weise, daher er wenigstens theilweis, wenn nicht ganz, von allmäliger Pupillenerweiterung abhängen mag.

Dove und Grabau fanden die Erhellung und Wiederverdunklung des Bildes in *A* je nach Verdeckung von *B* mit der Hand und Wiederöffnung ebenfalls bestätigt; Grabau konnte aber bei wiederholten Versuchen die allmälige Zunahme der Erhellung bei dauernder Verdeckung, und grössere Stärke der Verdunklung, wenn die Verdeckung erst nach einiger Zeit beseitigt ward, nicht wahrnehmen, was auf einer schneller sich vollziehenden Pupillenerweiterung beruhen könnte. Bei Dove ward nicht auf diesen Punct geachtet.

Funke und Ruete erhielten bei diesem Versuche überhaupt kein deutliches Resultat; d. h. das Bild in *A* schien sich je nach Verdeckung und Oeffnung von *B* nicht zu ändern. Zöllner fand bei der Verdeckung eine sehr schwache, fast zweideutige Erhellung.

Nun hatten dieselben doch bei dem Versuche mit dem Loche im Kartenblatte einen Erfolg, und Zöllner einen sehr auffälligen Erfolg, erhalten. Diess hängt daran, dass der Erfolg überhaupt deutlicher ist, wenn das Bild im Auge *A*, dessen Veränderung man beobachtet, dunkler als das andre im Auge *B* ist, das man abwechselnd zulässt oder ausschliesst, daher man auch statt des Lochs im Kartenblatt, wodurch das Bild im Auge *A* dunkel erscheint, ein dunkles Glas vor dem Auge *A* mit Vortheil für die Deutlichkeit des Erfolges anwenden kann.*)

In der That, wenn ich mit einem meiner dunkelsten grauen Gläser oder einer Combination von mehrern vor einem Auge das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinanderschiebe, und das freie Auge ganz verdecke, so erfolgt sofort augenfällige und gewöhnlich vom Moment der Verdeckung an noch sichtlich wachsende Erhellung des übrig bleibenden Bildes, so wie bei nachheriger Entfernung der Verdeckung Wiederverdunklung.**) Und zwar ist bei den dunklen Gläsern der Erfolg viel auffälliger als ohne Glas.

Unter dieser Form fand auch Ruete (Glas 71) den Erfolg ganz deutlich, konnte aber ein Wachsthum des Erfolges je nach der Dauer der Verdeckung nicht constatiren. Funke fand (mit 71, 63 und 63 . 63) den Erfolg der Erhellung nicht fehlend, doch sehr geringfügig; aber nach längerer Verdeckung die Verdunklung durch Entfernung der Verdeckung ebenfalls augenfälliger. Volkmann konnte bei 63 einfach keinen deutlichen Erfolg wahrnehmen, bei 63 doppelt einen schwachen, der sich aber bei wiederholten Versuchen bestätigte. Manche andre Mitbeobachter, wie Zöllner, haben den Erfolg sehr deutlich gefunden. Auch fand Zöllner die Helligkeit mit der Dauer der Verdeckung wachsend.

Wenn ich bei den vorigen Versuchen mit dem grauen Glase vor einem Auge statt des freien Auges das Auge mit dem grauen Glase ver-

*) Der fehlende Erfolg des Versuches bei Funke und Ruete beweist zugleich, dass der Pupillenänderung, die unstreitig auch bei ihnen eintrat, doch kein zu grosser Antheil am Effect bei unserm Versuche beizulegen sein dürfte.

**) Diese Verdunklung tritt bei dieser Versuchsweise für mich fast stets mit einem eigenthümlichen Wogen ein, welches vielleicht davon abhängt, dass die Pupille um den verengerten Zustand, bei dem sie zuletzt stehen bleibt, erst ein wenig oscillirt. Denn bei den Versuchen mit dem Kartenblatte habe ich nichts davon bemerkt. War jenes Wogen zu Ende, so änderte sich die Verdunklung nicht mehr merklich.

decke, so zeigt sich bei Anwendung eines der hellen Gläser auch einige Erhellung und, wenn die Verdeckung nach einiger Zeit wieder beseitigt wird, Verdunklung des Bildes im unverdeckten Auge; wie ich Solches entschieden genug und an verschiedenen Tagen constatirt habe; bei dunklen Gläsern aber war der Erfolg eines- und andern Falls zweideutig.

Verdunklung eines Auges durch Ermüdung scheint einen ähnlichen begünstigenden Erfolg zu haben, als Verdunklung durch ein graues Glas, wenn man die Verdeckung nachher auf das nicht ermüdete Auge anwendet.

In der That erhielt ich an zwei Tagen (4. und 5. Juli) übereinstimmend folgenden Erfolg.

Wenn ich 15 bis 30 Secunden in den hellen Himmel mit einem Auge gesehen, indess das andre geschlossen war, nachher das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinanderschob und nun abwechselnd ein und das andre Auge verdeckte, so zeigte sich bei Verdeckung des nicht ermüdeten Auges jedesmal deutliche Erhellung des grauen Bildes, bei Wiederöffnung eben so Wiederverdunklung, indess Verdeckung des ermüdeten Auges keinen recht unzweideutigen Erfolg am lichten Bild des andern Auges mitführte.

Längerer Schluss beider Augen hingegen scheint eben so wie bei den frühern Versuchen (S. 455) das antagonistische Verhältniss eine Zeit lang ausser Kraft zu setzen.

In der That: Wenn ich 60 Sec. lang beide Augen unter Vorhaltung der Hände geschlossen, so zeigte sich, wenn ich unmittelbar nachher ein Doppelbild auseinanderschob, bei Verdeckung eines Auges niemals die geringste wahrnehmbare Erhellung am Bilde im andern Auge, wie ich (zum Theil vergleichungsweise mit vorigen Versuchen) an 4 verschiedenen Tagen constatirt habe, und wie auch Grabau constatirt hat, wenn schon hinreichend deutlich die Verdunklung, wenn ich nach 10 Sec. oder später die Verdeckung wieder beseitigte; indem die Helligkeit doch allmälig durch die Verdeckung wuchs. Wogegen, wenn ich, statt gemeinsamen Augenschluss voranzuschicken, von den gewöhnlichen Tagesgeschäften oder nach 20 Secunden langem Sehen mit beiden Augen in den Himmel (was auch von Grabau constatirt ward) zu den Versuchen überging, der Erfolg wie oben S. 466 angegeben ausfiel, d. h. es zeigte sich bei Verdeckung sofortige Erhellung.

Schliesslich noch folgende Abänderungen der bisherigen Versuche:

Wenn ich das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinanderschiebe, während ich vor einem Auge eine Combination meiner 3 dunkelsten grauen Gläser, welche = 0.7 ist, also noch nicht ein Tausendtel Licht durchlässt, habe, indess das andre Auge frei ist, so ist das Bild im verdunkelten Auge fast unerkennbar, erscheint nur in einer Spur, wird aber allmälig sehr deutlich, wenn ich das freie Auge schliesse oder verdecke.

Wenn ich eine inwendig schwarze Röhre vor ein Auge *A* und eine andre vor das andre Auge *B* nehme, und durch jede derselben ein besondres weisses Feld auf schwarzem Grunde oder auch eine besondere Stelle auf einem gleichförmigen weissen Grunde in das Auge fasse, so erhellt sich, wenn ich das Auge *B* schliesse oder die Röhre davor verdecken lasse, das durch die andre an disparater Stelle gesehene Weiss deutlich, und verdunkelt sich wieder, wenn das Auge *B* oder die Röhre davor geöffnet wird, so dass das Weiss ins Gesichtsfeld des Auges *B* tritt. Die Röhre vor dem Auge *A* kann bei diesem Versuche auch noch mit einem dunklen Glase armirt sein.

XIII.

Zusammensetzung subjectiver Färbungen auf beiden Netzhäuten.

Nach den Versuchen der beiden vorigen Abschnitte konnte durch Verdeckung eines Auges vermehrte Helligkeit erzeugt werden, wenn die demgemässen Erleuchtungsverhältnisse beider Augen getroffen waren; nach folgenden Versuchen kann ohne Dasein objectiver Farbe durch Verdeckung eines Auges Farbe erzeugt werden, wenn die Augen dazu unter die erforderlichen Vorbedingungen gebracht sind.

Die Präparation der Augen dazu besteht darin, dass man durch ein kräftiges Mittel zu einander complementäre subjective Farbenstimmungen in beiden Netzhäuten erzeugt, um der Kürze halber und unabhängig von aller Theorie mit subjectiver Farbenstimmung jenen factischen Zustand der Empfindlichkeit der Augen zu bezeichnen, vermöge dessen in den bekannten Phänomenen der subjectiven Nach- und Nachbarfarben objectives Weiss farbig erscheint.

Es werde z. B. ein rother Fleck eine Zeit lang angesehen, so erlangt das Auge eine dazu complementäre subjective grüne Farbenstimmung, welche sich dadurch beweist, dass das Auge vom rothen

Fleck auf Weiss gerichtet statt Weiss Grün sieht. Diess nenne ich: die subjective Farbenstimmung wird zur Geltung gebracht. Unstreitig nämlich war die Veränderung, welche das Auge dazu befähigte, Weiss grün zu sehen, schon während der Betrachtung des rothen Flecks allmälig erzeugt worden; konnte sich aber nicht äussern, so lange nicht objectives Weiss, sondern objectives Roth da war; oder nur dadurch äussern, dass mit verlängerter Betrachtung das Roth immer unscheinbarer wurde. Hingegen kann eine subjective Farbenstimmung selbst auf Schwarz und im geschlossenen Auge einigermassen zur Geltung kommen, insofern das Schwarz nur ein geringer Grad des Weiss ist.

Man streitet, ob die Farbe, die bei Erblicken des Weiss zur Geltung kommt, auf positiver Erweckung der Farbe, oder auf Herabstimmung der Empfindlichkeit für die Complementärfarbe im Weiss beruhe. Es ist bei Darstellung der folgenden Thatsachen nicht nöthig, auf diesen Streit einzugehen, doch tragen diese Thatsachen selbst bei, für die letztere Auffassung zu entscheiden.

Um behufs der folgenden Versuche die zu einander complementären subjectiven Farbenstimmungen in beiden Augen möglichst kräftig zu erzeugen, halte ich zwei zu einander complementär gefärbte Gläser, das eine vor das eine, das andre vor das andre Auge, und sehe damit eine Zeit lang, bei mir reichen 15 Secunden oder noch viel weniger vollkommen hin, in den Himmel (was mit den gewöhnlichen Wettstreitsphänomenen begleitet ist), wodurch jedes Auge die zu seinem Glase complementäre Stimmung erlangt; diese Vorbereitungsweise beider Augen durch zwei complementärgefärbte Gläser will ich die Methode *C* nennen, gegenüber der später damit zu vergleichenden, mit *E* zu bezeichnenden, wo vor beide Augen ein und dasselbe Farbenglas genommen, übrigens wie nach *C* verfahren wird. Ist nun die Vorbereitung nach *C* geschehen, so richte ich nach Weglegen der Gläser oder auch während ich die Gläser noch vor den Augen habe, den Blick auf ein weisses Feld auf schwarzem Grunde, fixire es einfach mit beiden Augen, und ziehe, wenn es nicht schon eher geschehen, jetzt die Gläser von den Augen weg. Wären nun beide Augen mit derselben Farbe gereizt worden, so würde man jetzt, wie sich auch durch einen Versuch nach *E* sofort beweisen lässt, das Weiss mit der Complementärfarbe dazu erblicken; es fragt sich, was statt hat, da beide mit zu einander complementären Farben gereizt worden. Falls beide Netzhäute im Sinne

einer vollkommenen Identität als eine einzige wirkten, so hätte man vorauszusetzen, dass sich die complementären subjectiven Farbenstimmungen aufhöben und zerstörten, und eine subjective Nachfarbe auf diesem Wege nicht zu erlangen sei, oder nur eine einzige insofern schwach und flüchtig zu erlangen sei, als eine vollkommen gleich starke Wirkung beider Gläser nicht zu erlangen gewesen. Als Bestätigung hievon könnte zunächst erscheinen, dass man beim Wegziehen der Gläser entweder sofort, oder nach einem kurzen schnell vorübergehenden Schein der einen oder andern Farbe oder fleckweisem Gemeng derselben, alsbald das Feld rein weiss sieht; auch bleibt es so, so lange man es einfach mit beiden Augen fixiren mag. In der That aber nicht die complementären Farbenstimmungen heben sich auf, sondern blos die dadurch erzeugten Farben, wenn sie gleichzeitig auf correspondirenden Stellen zur Geltung gebracht werden sollen. Denn man braucht nach der angegebenen Vorbereitung blos ein Auge und das andre Auge abwechselnd zu verdecken, so kommt an dem weissen Felde abwechselnd die eine und andre Complementärfarbe zu dem Glase, was vor das respective Auge gehalten war, zum Vorschein, indess sofort wieder Weiss da ist, wenn man beide Augen zugleich öffnet, ein Wechsel, den man beliebig wiederholen kann, bis die subjectiven Stimmungen allmälig erloschen sind.

Dasselbe, was sich durch Verdeckung des einen und andern Auges abwechselnd erlangen lässt, erlangt man durch Auseinanderschieben des Doppelbildes des weissen Objects auf einmal. Das weisse Object zerlegt sich dabei in zwei complementärfarbige Bilder, die beim Zusammenschieben wieder in Weiss verfliessen, ebenfalls in beliebigem Wechsel. Auch bleibt, wenn man ein Auge verdeckt, während beide Bilder gesehen werden, das im andern Auge gesehene mit seiner Farbe stehen, womit man auf die erste Versuchsform zurückkommt.

Wenn man nach Weglegen der Gläser den Blick in den Himmel gerichtet behält, anstatt ihn auf ein begränztes weisses Feld zu richten, und die Augen abwechselnd verdeckt, so erhält man abwechselnd das ganze Gesichtsfeld mit der jedesmaligen Complementärfarbe erfüllt.

Anstatt mit beiden Augen durch die Farbengläser in den Himmel zu sehen, und erst nachher das weisse Feld auf schwarzem Grunde zu fixiren, kann man auch gleich das weisse Feld auf schwarzem Grunde durch die Farbengläser eine Zeit lang betrachten, und hiebei in doppelter Weise verfahren:

a) Man betrachtet das Feld mit beiden Augen in einfacher Fixation, wobei die gewöhnlichen Wettstreitsphänomene eintreten, entfernt nach einiger Zeit die Gläser und schiebt das Doppelbild auseinander (oder verdeckt ein Auge), wo sich wie oben das weisse Bild in seine farbigen Componenten zerlegt.

b) Man hält das Doppelbild auseinandergeschoben, während man die Farbengläser vor den Augen hat, wo jedes Auge das ihm angehörige Bild in der Gleichfarbe des Glases sieht, entfernt dann die Gläser, wo sich die Gleichfarbe derselben in den Bildern durch die Complementärfarbe ersetzt, und schiebt beliebig das Doppelbild wieder zum einfachen weissen Bilde zusammen.

Sowohl bei *a*) als *b*) giebt nachheriges wiederholtes Auseinanderschieben und Zusammenschieben den Wechsel zwischen Farben und Weiss wie bei der ersten Methode.*)

Ich habe mich durch hinreichende Versuche von dem wesentlich gleichen Erfolge dieser sämmtlichen Modificationen des Versuches überzeugt, indem ich dazu theils das dunkelrothe und dunkelgrüne, theils das blaue und röthlichgelbe Glas anwandte, welche S. 365 characterisirt sind; in der Regel jedoch das Verfahren mit Auseinanderschieben eines Doppelbildes nach dem Blick in den Himmel in der S. 470 angegebenen Weise angewandt, worauf sich daher auch die folgenden Angaben beziehen, wo nichts Andres bemerkt ist. Wahrscheinlich ist sie etwas wirksamer als die Methoden *a*) und *b*), wo man sich ohne zuvorigen Blick in den Himmel gleich mit den Farbengläsern an das weisse Feld auf schwarzem Grunde wendet; doch habe ich keine hinreichend vergleichenden Versuche in dieser Hinsicht angestellt.

Räthselhaft erscheint folgender Umstand bei letztern Methoden. Man sollte meinen, dass bei *a*) blos die centrale Stelle der Netzhäute, mit welcher das weisse Object durch die Gläser fixirt wird, bei *b*) blos die zwei seitlichen Stellen, wohin die Componenten beim Sehen durch die Gläser fallen, complementär zu den Gläsern gestimmt werden könnten, da auf schwarzem Grunde um das weisse Object keine Farbe über-

*) Mehrmals habe ich versucht, diese subjectiven complementären Nachfarben auf einem gleichförmigen weissen Grunde zur Geltung zu bringen, indem ich nach Weglegen der Gläser die Augen von den auseinandergeschobenen Componenten des weissen Feldes auf schwarzem Grunde auf einen gleichförmigen weissen Grund richtete; aber ich konnte niemals eine recht deutliche Erscheinung damit erhalten.

haupt merklich ist. Nun führe ich aber nach *a*) bei nachherigem Auseinanderschieben des Doppelbildes und nach *b*) bei Zusammenschieben desselben die Componenten über Theile der Netzhaut, die vorher nur von Schwarz getroffen waren. Und doch habe ich, in sehr oft und an verschiedenen Tagen wiederholten Versuchen, auch nach stetigster Fixation des Objectes oder seiner Componenten keine merkliche Schwächung der Farben im Laufe des Auseinanderschiebens oder Zusammenschiebens der Componenten des Doppelbildes bemerken können, wie weit ich auch die beiden Componenten trennen mochte; und keine geringere Färbung, als wenn ich ohne Trennung in Componenten bei forterhaltener Fixation ein Auge verdeckte. Nur, wenn ich beide Augen zugleich stark seitlich wende, so werden allerdings die beiden Bilder weiss, und nehmen bei der Zurückwendung wieder die erste Färbung an.

Was sich zur Deutung dieses eigenthümlichen Umstandes sagen lässt, verspare ich auf den folgenden Abschnitt, wo sich das Phänomen von Neuem unter ähnlichen Verhältnissen darbietet.

Der Erfolg dieser Versuche, die ich von Andern immer theils mit Verdeckung eines Auges, theils Erzeugung eines Doppelbildes nach dem Blick in den Himmel wiederholen liess, ist bei verschiedenen Personen sehr verschieden. Ich selbst, der ich nur zu leicht subjective Farben sehe, habe ihn äusserst frappant gefunden, indem ich das complementäre Roth und Grün oder Blau und Rothgelb in oft und an verschiedenen Tagen wiederholten Versuchen immer sehr intensiv gesehen habe. Auch Dove, Feddersen, Funke, Grabau, Ruete, Volkmann, Zöllner haben die complementären Farben im Doppelbilde so wie bei Verdecken eines Auges sehr gut und zum Theil sehr intensiv gesehen; indess der Versuch bei andern mehr oder weniger oder völlig fehl schlug. E. H. Weber konnte bei mehrmals hinter einander wiederholten Versuchen auf keine beider Weisen Farben wahrnehmen. Als er aber die Wiederholung immer erneuerte, wodurch unstreitig die Reizbarkeit zunahm, machten sie sich geltend, so dass sie zwar nicht stark, aber unzweideutig gesehen wurden. Die angewandten Gläser waren das rothe und grüne. Weber sahe aber statt der complementären Farben Grün und Roth, welche bei mir selbst und Andern erscheinen, Bläulich und Röthlich; bemerkt übrigens, dass sein Farbenunterscheidungsvermögen überhaupt verhältnissmässig nicht scharf sei.

Prof. Möbius und zwei andre Personen konnten bei einpaarmaliger

Wiederholung des Versuches nicht das Geringste von Farben wahrnehmen. Koch nahm nur Spuren wahr. Einige Personen nahmen blos eine beider Farben wahr und sahen das andre Bild weiss.

Wendet man zu den beschriebenen Versuchen unter einer oder der andern Form statt eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde ein schwarzes auf weissem Grunde an, so zeigen sich die Ergänzungsfarben, welche bei dem weissen Feld auf diesem erscheinen, bei dem schwarzen in Form von Höfen, die in der Umgränzung der schwarzen Bilder am intensivsten sind, und sich gegen einander und in den Grund verlaufen, rings um die schwarz erscheinenden Componenten.

Die vorigen Versuche haben ein mehrseitiges Interesse, sofern sich dadurch beweist,

1) dass correspondirende Netzhautstellen verschiedene subjective Farbenstimmungen gleichzeitig erlangen und behaupten können, ohne dass sich dieselben bei complementären Verhältnissen neutralisiren;

2) dass die von subjectiven Farbenstimmungen abhängigen Farben sich eben so zusammensetzen und zerlegen können, als objective;

3) dass eine Zusammensetzung von Farben zu Weiss und eine Zerlegung des Weiss in Farben auf correspondirenden Stellen eben so gut erfolgen kann, als auf einer identischen Stelle;

4) dass die subjectiven Complementärfarben, welche einem primären Eindruck und dessen (gewöhnlich kurzer) Nachdauer folgen, nicht auf positiver Erweckung der betreffenden Farbe, sondern auf Abstumpfung für die Gleichfarbe des Eindrucks beruhen.

Hiezu einige Erläuterungen.

Den dritten Punct insbesondre anlangend, so hat man längere Zeit bezweifelt, dass sich Farbeneindrücke auf correspondirenden Stellen eben so zu Weiss zusammensetzen lassen, als auf einer identischen. Gegenwärtig wird diess nicht mehr bezweifelt; namentlich nach den früher erwähnten Versuchsmethoden von Dove, Foucauld und Regnault. Inzwischen empfiehlt sich unsre Methode als eine besonders einfache, keiner schwierigen Hülfsmittel bedürfende, für die, welche leicht subjective Farben sehen.

Was den vierten Punct anlangt, so bemerke man Folgendes: wenn ich mit den beiden complementärgestimmten Augen das weisse Feld auf schwarzem Grunde einfach fixire, so hat kurz ausgedrückt und im Sinne der Thatsachen verstanden jedes Auge objectiv Weiss, und

subjectiv Farbe. Schliesse ich ein Auge, so schliesse ich damit das objective Weiss aus, aber nicht die subjective Farbe, wenn sie auf einem positiven Erregungszustande der Netzhaut beruht; und es ist kein Grund, dass sie sich nicht noch eben so gut als vorher mit der complementären subjectiven Farbe des andern Auges zu Weiss zusammensetzen sollte, wenn sie nicht gar dadurch zum Uebergewicht kommt, dass sie nicht mehr durch objectives Weiss in demselben Auge abgeschwächt wird. Es wäre also unter jener Voraussetzung Eins oder das Andre zu erwarten, entweder dass bei Verdeckung eines Auges das weisse Bild weiss bliebe, oder dass es sich überwiegend mit der subjectiven Färbung des verdunkelten Auges tingirte. Aber weder das Eine noch Andere tritt ein, vielmehr, wenn wir ein Auge verdecken, und damit das Weiss in diesem Auge ausschliessen, schliessen wir damit zugleich die Farbe in diesem Auge aus. Diess aber versteht sich von selbst, wenn die Farbe darin nur durch Ermüdung für gewisse Farbenstralen des Weiss zu Stande kommt. Das sog. innere Licht des Auges ist zu schwach, um hiebei einen erheblichen Erfolg zu geben.

Aus den vorigen Versuchen würde an sich noch nicht folgen, dass die Thätigkeiten beider Augen dabei einen Einfluss auf einander ausüben, sondern man könnte sich denken, dass in jedem Auge die complementäre Farbenstimmung zu seinem Farbenglase eben so entstände, als wenn das andre Auge nicht da oder nicht gleichzeitig mit einem andern Farbenglase gereizt wäre. Die folgenden Thatsachen aber beweisen, dass hiebei in der That ein wechselseitiger Einfluss beider Augen anzuerkennen ist.

Wenn ich bei vorigen Versuchen vor einem Auge *R* ein rothes, vor dem andern ein grünes Glas habe, so erhalte ich im Auge *R* eine grüne Nachfarbe. Wenn ich aber vor einem Auge *R* ein rothes, vor dem andern ein blaues Glas habe, so erhalte ich im Auge *R* nicht eine grüne, sondern blaue Nachfarbe. Die Nachfarbe, welche ich im Auge *R* erhalten, wird also nicht blos durch die Weise, wie das Auge *R* selbst gereizt ist, sondern auch wie das andre Auge gereizt ist, bestimmt (die Nachfarbe im andern Auge ist erstenfalls roth, letzternfalls rothgelb). Ich habe diesen vergleichsweisen Versuch nicht nur selbst mehrmals mit gleichem Erfolge wiederholt, sondern auch Grabau erhielt entschieden denselben Erfolg.

Allgemeiner stellt sich der Wechseleinfluss beider Augen bei den

angegebenen Versuchen, und zwar im Sinne eines Antagonismus, dadurch heraus, dass man die Ergebnisse der Methode *C* mit zwei complementären Gläsern mit denen der Methode *E*, wo blos ein Glas vor beide Augen genommen wird, vergleicht.

Unter Anwendung der Methode *E* hinterbleibt natürlich in beiden Augen eine und dieselbe complementäre Stimmung zu dem Glase, und wenn man mit derselben nach Entfernung des Glases das weisse Feld auf schwarzem Grunde ins Auge fasst und einfach fixirt, erscheint es also auch mit dieser Complementärfärbung. Schiebt man nachmals ein Doppelbild auseinander, so verbleibt beiden Componenten diese Färbung ohne erhebliche Schwächung, gerade so, wie wenn man das Doppelbild eines objectiv gefärbten Feldes auseinanderschiebt. Nun fragt sich, wie sich die Intensität und Dauer der nach dieser Methode erhaltenen Färbung zu derjenigen verhält, welche man erhält, wenn man nach der Methode *C* vor beiden Augen complementäre Gläser hatte und das Doppelbild auseinanderschiebt.

Hiebei sind drei Fälle denkbar. Entweder die Nachfarbe nach Methode *E* ist gleich intensiv und dauernd, als die entsprechende Nachfarbe nach Methode *C*, oder sie ist mehr oder sie ist weniger intensiv und dauernd. Erstenfalls hat man keinen Grund, anzunehmen, dass die Art der Reizung einer Netzhaut auf den Erfolg der Reizung der andern influire; zweitenfalls hat man anzunehmen, dass die gleichzeitige Reizung beider Netzhäute mit derselben Farbe eine wechselseitige Unterstützung in Erzeugung der Complementärstimmung mitführt; drittenfalls, dass sie vielmehr eine Gegenwirkung, und die Reizung mit Complementärfarben eine Unterstützung in dieser Hinsicht mitführt.

Der Erfolg entspricht nun mit völliger Entschiedenheit der dritten Voraussetzung.

Was mir von vorn herein merkwürdig bei den Eingangs beschriebenen, nach der Methode *C* angestellten, Versuchen erschien, und sich auch bei den andern Beobachtern, welche das Phänomen mit hinreichender Intensität wahrnahmen, so wieder fand, war die grosse Tenacität der Farben, wenn die Componenten des Doppelbildes zugleich im Auge behalten wurden. Im Allgemeinen erfolgt bei mir, wenn ich nur 20 Sec. lang mit den complementären Gläsern in einen grauen Himmel gesehen, die Abschwächung der Farben der beiden Bilder so langsam, dass ich sie nicht unmittelbar gewahre, sondern immer einige Zeit, 15

Secunden und länger durch glaube, dass die Farben ganz oder fast unverändert bleiben, indess das Nachbild eines 15 bis 20 Sec. lang in gewöhnlicher Weise betrachteten weissen Flecks auf schwarzem oder grünen Flecks auf rothem Grunde in verbreitetem Tageslichte, auf weissem Grunde betrachtet, in derselben Zeit bei mir erloschen ist, wie man aus den Versuchen S. 410 f. hat ersehen können, und wie ich noch eben vergleichend mit den vorigen Versuchen constatirt habe.

Am entscheidendsten aber sind Versuche, wo man die Erfolge der Methoden *C* und *E* direct vergleicht. Hiebei kann man in doppelter Weise verfahren, je nachdem man mit den nach Methode *C* erhaltenen Farbencomponenten *α*) das nach *E* erhaltene nicht auseinandergeschobene Bild, oder *β*) das nach *E* auseinandergeschobene Doppelbild, vergleicht. Hier folgen die von mir selbst und von Grabau in dieser Hinsicht erhaltenen Resultate:

Eigene Versuche nach *α*).

Jedesmal 10 Sec. langer Blick durch die Gläser oder das Glas in den Himmel; dann die Gläser oder das Glas weggelegt, und bei *E* das weisse Feld auf schwarzem Grunde einfach mit beiden Augen fixirt, bei *C* ein Doppelbild auseinandergeschoben; und die Dauer der Nachfarben beidesfalls bestimmt. Vor jedem neuen Versuche 15 Sec. langer Blick auf einen schwarzen Grund, um die Augen gleichförmig zu stimmen.

1) *E.* Dunkelgrünes Glas vor beiden Augen. Die röthliche Nachfarbe auf dem weissen Felde erlosch binnen etwa 10 Sec.

2) *E.* Rothes Glas vor beiden Augen. Die grünliche Nachfarbe erlosch schon binnen 1 Sec.

3) *C.* Vor dem linken Auge das grüne, vor dem rechten Auge das rothe Glas; die grüne Nachfarbe des linken Bildes (welches dem rothen Auge angehört) erlosch etwa binnen 17, die rothe des rechten binnen 10 Sec.

4) *C.* Umgekehrt das rothe Glas vor dem linken, das grüne vor dem rechten Auge. Die rothe Nachfarbe erlosch binnen etwa 23, die grüne binnen 19 Sec.

5) *E.* Wiederholung von 2), eine Nachfarbe war gar nicht merklich.

6) *E.* Wiederholung von 1), die röthliche Nachfarbe erlosch binnen 5 Sec.

7) *C.* Wiederholung von 4), die rothe Nachfarbe erlosch binnen etwa 27, die grüne binnen 46 Sec.

Eigene Versuche nach *β*).

Sowohl bei *C* als *E* jedesmal blos 6 Sec. in den Himmel gesehen; dann beidesfalls das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinan-

dergeschoben, und ohne Gläser betrachtet. Zwischen den einzelnen Versuchen einige Minuten, und 15 Sec. langen Blick auf einen schwarzen Grund interponirt.

1) *E.* Dunkelgrünes Glas vor beiden Augen. Die röthliche Nachfarbe beider Componenten erlosch binnen 4 Sec.

2) *C.* Vor dem linken Auge das grüne, vor dem rechten Auge das rothe Glas; die rothe Nachfarbe im linken Auge viel stärker als unter 1. Erlosch erst binnen 24 Sec.

3) *C.* Vor dem linken Auge das rothe, vor dem rechten das grüne Glas. Die rothe Nachfarbe im rechten Auge ebenfalls viel stärker als unter 1; erlosch in 24 Sec.

4) *E.* Wiederholung von 1. Die schwach röthliche Nachfarbe erlosch binnen 2 Sec.

Grabau stellte den Vergleich nach *β)* sowohl mit rothem und dunkelgrünem Glase, als röthlichgelbem und blauem Glase, wechselnd nach *C* und *E*, und bei *C* wechselnd mit der Lage der Gläser vor linkem und rechtem Auge an, jedesmal mit 6 Sec. langem Blick in den grauen Himmel, und je 2 Min. mit Blick auf schwarzen Grund zwischen den einzelnen Versuchen interponirend. Im Mittel von 7 Versuchen mit rothem und dunkelgrünem Glase nach *C* stand die grüne Nachfarbe 87, die rothe 53 Secunden; nach *E* konnte bei grünem Glase in zwei Versuchen nur ein röthlicher Schein von etwa 12 Sec., und bei rothem Glase in zwei Versuchen ein grünlicher von fast verschwindender Dauer erhalten werden. — Im Mittel von 8 Versuchen mit röthlichgelbem und blauem Glase nach *C* stand die blaue Nachfarbe 59 Sec., und die röthlichgelbe eben so lange, wogegen die Nachfarbe nach *E* in je zwei Versuchen für Röthlichgelb wie für Blau wieder nur in einem flüchtigen Scheine bestand.

So wie sich die complementären Reize in Erzeugung complementärer Nachbilder auf beiden Netzhäuten unterstützen, so unterstützen sich aber auch die complementären Nachbilder selbst in Stärke und Dauer durch ihr gleichzeitiges Vorhandensein.

In der That habe ich in mehrfachen Wiederholungen gefunden, dass die bei den Versuchen nach *C* erhaltenen Farben der monocularen Bilder schneller verblassen, wenn man eins allein im Auge behalten will, sei es, dass man bei einfach mit beiden Augen fixirtem Bilde oder nach schon auseinandergeschobenem Doppelbilde eins beider Augen verdeckt, als wenn man beide Bilder zusammen im Gesicht behält; ja es gab Tage, wo das Verblassen eines allein im Auge gehaltenen Bildes sehr schnell erfolgte, indess es an andern Tagen und bei andern Personen weniger der Fall war. An allen Tagen nun, wo bei Verdecken eines Auges das Verblassen des Bildes im offen gehaltenen bald erfolgte, habe ich folgende interessante Wiederbelebungsphänomene beobachtet.

Sei die Farbe des Bildes im offenen Auge *A* geschwunden, indess man das andre *B* geschlossen hielt, so schliesse man nun *A*, öffne *B*, und lasse die Farbe des Bildes auch hierin schwinden. Oeffnet man jetzt wieder *A* und schliesst *B*, so zeigt sich die Farbe im Auge *A* wieder belebt; und so kann man, falls die Farben überhaupt von Anfange herein intensiv genug sind, und das Verblassen schnell genug erfolgt, jede beider Farben oft wiederholt durch abwechselndes Oeffnen und Schliessen des einen und andern Auges sich abschwächen und wieder beleben lassen.

Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Wiederbelebung nicht durch eine zwischenfallende Ruhe des Auges, sondern durch das dazwischenfallende Erblicken der andern Farbe zu Stande kommt. Es hat nämlich Schluss beider Augen keineswegs dieselbe wiederbelebende Kraft. Vielmehr, wenn bei Oeffnung des Auges *A* und Schluss von *B* die Farbe in *A* erloschen ist, ich dann beide Augen schliesse, und nach einer entsprechenden Zeit, als nach voriger Weise zur Wiederbelebung hinreicht, *A* wieder öffne, indess *B* geschlossen bleibt, so bleibt das Bild weiss, wie ich in einigemale wiederholten Versuchen gefunden.

Hingegen kann man den Erfolg der Wiederbelebung noch frappanter als durch abwechselndes Schliessen und Oeffnen des einen und andern Auges dadurch hervorbringen, dass man, wenn das monoculare Bild in einem Auge unter Schluss des andern seine Farbe verloren hat, das andre dazu öffnet und ein Doppelbild auseinanderschiebt, wo mit Erscheinen der andern Farbe die erste sich in auffälligster Weise wiederbelebt, wie diess auch von andern meiner Mitbeobachter constatirt wurde. Einigermassen kann es auch dadurch geschehen, dass man blos das eine Auge offen behält, und eine kurze Zeit auf einen Grund von der Complementärfarbe des verblassten Bildes blickt, um nachher auf dieses zurückzublicken.

Wenn ich nach dem Blick in den Himmel (Methode *C*) unter Anwendung des blauen und röthlichgelben Glases respectiv vor dem Auge *A* und *B* und nach Weglegen der Gläser das Doppelbild des weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinandergeschoben habe, und im Auge *A* das röthlichgelbe, im Auge *B* das blaue Complementärbild habe, und wenn ich dann einseitig das blaue Glas abwechselnd vor das Auge *A* nehme und weglege, so verblasst bei jeder Vornahme des Glases, wobei das Bild im Auge *A* lebhaft blau wird, die Bläue im andern Auge,

um sich wieder zu beleben, wenn ich das Glas weglege und wieder die röthlichgelbe Farbe in *A* auftritt. Entsprechend, wenn ich an dem andern Auge so mit dem röthlichgelben Glase verfahre mit der in diesem Auge gesehenen Farbe.

Bei Anwendung des rothen und dunkelgrünen Glases erhielt ich mit dem dunkelgrünen noch den entsprechenden Effect, indess mir das rothe an manchen Tagen einen zweideutigen Erfolg gab, an manchen merkwürdigerweise eher einen umgekehrten Erfolg zu geben schien, sofern bei Wiedervornahme des rothen Glases vor das Auge, wo es sich erst befunden hatte, das Roth sich eher stärker zu beleben, und bei Weglegung des Glases zu verblassen schien.

Da ich diess anomale Resultat mehrmals wiederfand, kann ich nicht umhin, es zu notiren; doch ist es nicht allgemein. In der That fand Grabau den Erfolg mit dem blauen und röthlichgelben Glase sehr entschieden, wie ich, mit dem rothen und grünen überhaupt nur gering, aber mit beiden in demselben Sinne, als mit den andern Gläsern.

Wenn ich vor einem Auge ein rothes, vor dem andern ein grünes Glas oder vor einem ein blaues, vor dem andern ein röthlichgelbes Glas habe, und das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinanderschiebe, ohne die Gläser zu entfernen, wo ich dann Componenten von der Beschaffenheit beider Gläser im Auge habe; so erhellt sich bei Verdeckung des einen Glases oder Schluss des Auges dahinter die übrige Componente nur ein wenig, und verdunkelt sich wieder eben so bei Oeffnung, ohne dass aber die Intensität der Färbung sich zu ändern scheint. Wie Oeffnung des Auges hinter dem Glase wirkt auch Entfernen des Glases vom offenen Auge, und wie Schluss des Auges Wiedervornahme des Glases.

In dieser Beziehung wirken die Farbengläser offenbar nur wie die grauen Gläser bei den Versuchen des vorigen Abschnitts. Auch braucht man nicht complementärgefärbte Gläser dazu zu nehmen, sondern erhält entsprechende Erfolge von Erhellung und Verdunklung, wenn man vor beide Augen ein Glas von gleicher Farbe nimmt, und wie vorhin verfährt.

XIV.

Wirkungen monocularer Farbenreizung.

Bei den Versuchen des vorigen Abschnittes wurden stets beide Augen mit, in der Regel complementären, Farben gereizt, und die daraus hervorgehende subjective Nachwirkung beobachtet; das Folgende wird Versuche über die einseitige Reizung einer Netzhaut mit farbigem Lichte enthalten, indess die andere entweder α) im Dunkel oder β) mit weissem Lichte gereizt ist.

Vor den subjectiven Nachwirkungen der Reizung betrachten wir erst die Erscheinungen während der Reizung selbst.

Das vom Farbenreize freie Auge soll stets im Folgenden mit *A*, das einseitig farbengereizte mit *B* bezeichnet werden, und nach Umständen auch die monocularen Bilder, welche dem einen und andern Auge angehören, respectiv diese Bezeichnung erhalten.

Nehme ich, indess ich mit beiden Augen zum Fenster heraus in den Himmel blicke, so dass ich die Fensterstäbe nicht mit im Gesichtsfeld habe, welche die Gleichförmigkeit der Erscheinung stören, ein Farbeglas vor ein Auge *B*, so erscheint mir entweder von vorn herein keine deutliche Färbung am Himmel oder erlischt bald, oder es zeigt sich etwas Wettstreit zwischen Farblosigkeit und Farbe, immer aber tritt die Farbe deutlich hervor, wenn ich das freie Auge verdecke; was sich leicht erklärt, da sich die Farbe im einen Auge dann nicht mehr mit dem weissen Lichte im andern zu mischen hat. Sonst finde ich nichts zu bemerken.

Damit zusammenstimmende Erfolge erhalte ich bei folgender Versuchsform, die jedoch eine weitere Entwicklung gestattet.

Ich fixire ein weisses Feld auf schwarzem Grunde einfach mit beiden Augen und nehme eins meiner dunkleren Farbegläser, das violete, dunkelgrüne, oder rothe, vor das Auge *B*, ohne das Glas anzudrücken, um nicht durch Verschiebung eines Auges ein Doppelbild zu erzeugen. Ist diess sorgfältig vermieden, so sehe ich meist von vorn herein das weisse Feld nur weiss; ungeachtet doch das Auge *B* durch das Farbenglas darauf sieht; und wenn anfangs einiger Wettstreit da ist,*) so ver-

*) Bei Anwendung meiner hellern Farbengläser, dem röthlichgelben, hellgrünen

schwindet er doch bald, und das Feld erscheint mir rein weiss, so lange ich es fest fixirt halte. Nur, wenn durch zufällig abgeänderte Kreuzung der Sehaxen, wie solche leicht unabsichtlich eintritt, ein Doppelbild sich auseinanderzuschieben beginnt, zeigt sich sogleich entschieden Farbe. Schiebe ich nun aber das Doppelbild absichtlich vollständig auseinander, so zerlegt sich das erst weiss gesehene Bild sofort in ein dunkles intensiv farbiges, welches dem Auge *B* mit dem Farbenglase angehört, und ein lichtes, rein weisses, welches dem freien Auge angehört. Beim Zusammenschieben erhalte ich wieder entweder sofort, oder nachdem sich erst kurze Zeit etwas Färbung geltend gemacht, das zusammengesetzte weisse Bild, was sich inzwischen durch mindere Helligkeit von seiner weissen Componente unterscheidet, ein Umstand, der unter den S. 463 f. bemerkten Versuchsfall tritt, da ein Farbeglas durch Abhaltung eines Antheils Licht in Bezug auf Helligkeitsverhältnisse einem grauen äquivalent wirkt, wie sich auch sonst überall bei den in diesem Abschnitt zu beschreibenden Versuchen zeigt und schon in den Schlussversuchen des vorigen Abschnitts gezeigt hat.

Anstatt das lichtweisse und das intensiv farbige Bild gleichzeitig durch Auseinanderschieben des Doppelbildes zum Vorschein zu bringen, kann es auch durch abwechselndes Verdecken eines und des andern Auges geschehen.

Bei diesen, auch von mehrern meiner Mitbeobachter mit gleichem Erfolge wiederholten, Versuchen ist mir immer merkwürdig und fast unbegreiflich erschienen, wie die intensive Gleichfarbe des Glases im Bilde *B* so von dem Weiss des Bildes *A* beim Zusammenschieben damit absorbirt werden kann, dass sie im binocular einfachen Bilde merklich ganz verschwindet.

Man kann leicht geneigt sein, diess davon abzuleiten, dass die Farbe im einen Auge bei heterogener Deckung mit dem lichten Weiss im andern nicht zu entsprechender Geltung in der Resultante der Empfindung kommt, als beim Zusammentreffen auf einer identischen Stelle; und der Umstand, dass, (wenigstens bei hellen Farbegläsern) zu Anfange Wettstreitsphänomene eintreten können, beweist jedenfalls, dass zu Anfange andre Verhältnisse bestehen können, als auf einer identi-

---

und blauen pflegt ein Wettstreit zwischen Weiss und Farbe längere Zeit fortzubestehen, und ich erhalte das obige Resultat überhaupt nicht so rein.

schen Stelle. Doch glaube ich nicht, dass es nach beendigtem Wettstreit noch der Fall sei. Um nämlich zu entscheiden, ob die definitive scheinbare Absorption der Farbe durch Weiss nicht eben sowohl auf identischen Stellen statt hat, wenn Weiss und Farbe unter ähnlichen Umständen und in denselben Verhältnissen darauf zusammentreffen, stellte ich Abends mit zwei Lampen (Studirlampen, deren Schirm entfernt worden) folgenden vergleichenden Versuch an. Ich betrachtete ein kleines weisses Feld von etwa $^3/_4$ Zoll Seite auf schwarzem Grunde unter einfacher Fixation mit beiden Augen einmal so, dass ich dabei ein Farbeglas vor einem beider Augen hatte, indess das weisse Feld frei von beiden Lampen beleuchtet wurde; das andremal ohne Farbeglas frei mit beiden Augen, indess das weisse Feld von einem Lichte frei, vom andern durch das Farbeglas durch beleuchtet wurde; und konnte, wenn erstenfalls kein Wettstreit statt fand oder derselbe vorüber war, keine wesentliche Verschiedenheit im Aussehen des Feldes beidesfalls finden. Der zweite Theil des Versuchs wurde so ausgeführt, dass ein Farbeglas senkrecht auf dem schwarzen Grund aufgestellt wurde, wodurch ein doppelter Farbenschatten entstand, dessen Componenten sich in einem Kernschatten deckten. Das weisse Feld ward nun in einem der Seitenschatten betrachtet, zu dem das Licht von einer Lampe frei, von der andern durch das Farbeglas gelangte.

Da das Lampenlicht nicht ganz weiss ist, erhielt ich im Allgemeinen in dem einen wie andern Theile des Versuches etwas gelblichere Nüancen des einfach fixirten Bildes, als bei den Versuchen im Tageslichte. Allgemein aber gaben beide Theile des Versuches bei sämmtlichen Farbegläsern wesentlich dieselbe Erscheinung.

Inzwischen gestehe ich, meinen eignen Wahrnehmungen, auf denen ich hiebei allein fusse, und den vielleicht nicht ganz günstigen Verhältnissen der Versuche mit Lampenlicht nicht genug zu trauen, um nicht zu wünschen, dass dieser gewissermassen fundamentale Versuch noch von Andern wiederholt werde. Auch hängt dabei etwas an der Modalität des Versuches. Wenn ich statt ein kleines weisses Feld auf schwarzem Grunde in den seitlichen Farbeschatten bei dem zweiten Theile des Versuches zu bringen, den Farbeschatten auf eine ausgedehnte weisse Fläche fallen lasse, so werde ich der Farbe viel leichter gewahr; desgleichen zeigen Versuche mit der gedrehten Farbenscheibe, dass die Farbensectoren, die man auf einer weissen Scheibe anbringen kann,

nicht so gross sein dürfen, als man nach dem Ausfalle der obigen Versuche erwarten möchte, soll die Färbung unmerklich werden. Ausserdem weiss man, dass beim Durchsehen durch hellfarbige Gläser, selbst wenn es mit beiden Augen geschieht, die Färbung des Gesichtsfeldes nach kurzer Zeit unmerklich wird; um so leichter natürlich, wenn es mit einem geschieht.

Hienach sind noch neue Versuche nöthig, um zu ermitteln, wie viel Farbe unter gegebenen Umständen dem Weiss beigemischt werden kann, ehe sie merklich wird. Die früher (S. 376) mitgetheilten Versuche beweisen jedenfalls, dass es hiebei vielmehr auf Relationen als absolute Werthe ankommt.

Bei aller Unvollständigkeit der vorigen Versuche ist doch das Resultat derselben nicht ohne Belang für das Folgende und für die Lehre von den subjectiven Farben überhaupt, indem dadurch bewiesen wird: 1) dass subjective Färbungen (ihrem physiologischen Grunde nach) da sein können, aber nicht bemerkt werden, wenn sie ein gewisses Verhältniss zum Weiss nicht übersteigen, dem sie sich beimischen; 2) dass subjective Färbungen nicht schon erloschen sind, wenn sie erloschen scheinen.

Das Erste erklärt, warum man so oft subjective Färbungen, namentlich complementäre Nachbarfarben, nicht erscheinen sieht, wo man doch solche erwarten möchte, und warum Dämpfung des weissen Lichts, dem sich die Färbung beimischt, oft hinreicht, solche zum Vorschein zu bringen; nur dass man freilich mit Entziehung des weissen Lichts auch das Material entzieht, aus dem sich die subjective Farbe zu bilden hat, daher, wenn man farbige Complementärschatten dadurch erzeugt, dass man zwei Oeffnungen im Laden eines finstern Zimmers anbringt, deren eine frei, die andre mit einem Farbenglase verdeckt ist, und durch sie einen Doppelschatten im Zimmer erzeugt, ein gewisses Verhältniss der Grösse beider Oeffnungen den gesättigtsten Complementärschatten giebt, die Farbe desselben aber sowohl bei zu grosser als zu geringer oder verschlossener tageshellen Oeffnung schwindet, wie ich in meinen frühern Versuchen über diesen Gegenstand beobachtet habe. Hingegen fruchtet es nach den S. 376 mitgetheilten Versuchen nichts zum Deutlicherwerden der Farbe, wenn man Farbe und Weiss in gleichem Verhältniss abändert.

Was den zweiten Punct anlangt, so ist er bei Experimenten über

subjective Farbenstimmungen in sofern zu beachten, als, wenn man mehrere Versuche hinter einander anstellt, welche voraussetzen, dass die frühere Farbenstimmung jedesmal erloschen sei, ehe man zu einem neuen übergeht, man dessen noch nicht sicher ist, wenn sie sich nicht mehr am Weiss geltend macht. Vielmehr ist stets vorauszusetzen, dass sie länger besteht, als sie spürbar ist. Wenn sie aber für sich nicht mehr am Weiss spürbar ist, kann sie doch den Erfolg neuer Versuche abändern; je nachdem sie mit der neu erzeugten Stimmung in gleichem oder entgegengesetztem Sinne zusammentrifft.

Bei den vorigen Versuchen hat sich noch kein Einfluss der Thätigkeit einer Netzhaut auf die andere herausgestellt. Denn, während die Netzhaut *B* farbig gereizt und das Bild *B* demgemäss intensiv farbig erscheint, bleibt das Bild *A* auf der andern Netzhaut weiss. Diess kann nach den schon erhaltenen Resultaten befremden. Denn im 11. und 12. Abschnitt haben wir gesehen, dass, wenn eine Netzhaut mit weissem Lichte gereizt wird, die Empfindung des weissen Lichts auf der andern Netzhaut sich schwächt; und diess scheint für die Farbenreizung einer Netzhaut die Folgerung mitführen zu müssen, dass die Empfindung der gleichen Farbe auf der andern Netzhaut sich schwächt, mithin bei dargebotenem Weiss die Complementärfarbe daselbst zum Uebergewicht der Empfindung kommt. Auch unterstützen mehrere Versuche des vorigen Abschnitts eine solche Voraussetzung.

Inzwischen ist nichts gewisser, als dass mir beim Doppelbildsversuche keine Färbung am Bilde *A* erscheint, so lange das Farbeglas vor *B* gegenwärtig ist, wie lange ich es auch vorhalten mag, und es erscheint diess um so auffälliger, als ich nur das Farbeglas vom Auge *B* wegzunehmen brauche, um bei hinreichend empfindlicher Stimmung des Auges sogleich eine Färbung am Bilde *A* erscheinen zu sehen, womit eine Einwirkung der Thätigkeit einer Netzhaut auf die andre in den Nachwirkungen der Farbenreizung bewiesen wird, auf die ich unten noch besonders zu sprechen komme. Warum zeigt sich aber eine solche nicht während der Einwirkung des Reizes. Ich habe die Versuche hierüber sehr oft mit allen meinen Farbegläsern wiederholt, und immer dasselbe negative Resultat erhalten; eben so fand es sich bei Ruete, Volkmann, Zöllner.

Auch, wenn ich einen farbigen Papierbogen durch eine inwendig schwarze Röhre und zugleich ein weisses Feld auf schwarzem

Grunde durch eine andere ansehe, nimmt dieses keine complementäre Nüance an.

Wollte man sich etwa den mangelnden Erfolg dieser Versuche so erklären, dass eine durch den objectiven Farbenreiz in *B* auf *A* übergepflanzte Complementärwirkung durch die sich allmälig entwickelnde subjective gleichfarbige Stimmung, welche nach Entfernung des Farbenreizes nachweisbar in *A* zurückbleibt, compensirt würde, so hätte man zu erwarten, dass doch beim Beginn der Einwirkung des Farbenreizes im Auge *B* sich die von ihm abhängige Complementärwirkung im Auge *A* geltend machen müsste, und dass man also, wenn man das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde erst ohne Farbeglas auseinandergeschoben hat, und nun ein Farbeglas vor *B* nimmt, im ersten Momente, wo es geschieht, am Bilde im Auge *A* eine complementäre Nüance erhalten müsste, wovon ich aber bei absichtlich darauf gerichteter Beobachtung nie etwas habe bemerken können, ungeachtet ich an verschiedenen Tagen alle meine Farbengläser in Bezug darauf versucht habe. Auch haben Feddersen, Ruete und Volkmann diesen fehlenden Erfolg an allen meinen Gläsern constatirt.

Ich gestehe, dass diess mich lange in grosse Verlegenheit gesetzt und mir das Concept einer zusammenhängenden Auffassung dieser Phänomene fast verrückt hat. Doch bedarf es nur einer ganz einfachen Modification der Versuche, um den erwarteten und vermissten Erfolg sofort sicher und entschieden bei allen denen eintreten zu sehen, die überhaupt etwas bei dieser Art von Versuchen sehen. Diese Modification besteht darin, dass man vor dem Auge *A* ein graues Glas zuzieht, welches dunkler ist, als das Farbeglas, welches man vor *B* nimmt, was zu versuchen ich theils durch den entsprechend günstigen Erfolg veranlasst ward, den die Anwendung eines dunkeln Glases bei den Versuchen des 12. Abschnittes hat, theils durch die Vermuthung, dass eine schwache Complementärfärbung des Bildes *A* vielleicht durch Absorption in einem zu hellen Weiss unmerklich werden könne.

In der That, wenn ich eins meiner dunkelsten Gläser 90, 71, oder noch besser beide superponirt, vor dem Auge *A* habe, und eins meiner hellfarbigen Gläser, das röthlichgelbe, grüne oder blaue vor das Auge *B* hinzunehme (oder dasselbe in umgekehrter Folge thue), so tritt im Momente, wo es geschieht, eine entschieden complementäre Färbung am Bilde *A* ein. Statt eines dunkeln Glases leistet mir ein Nadelloch in

einem Kartenblatte dieselben Dienste. Bei Anwendung des dunkelgrünen oder dunkelrothen Glases vor *B* giebt mir eins der Gläser 90, 71 allein noch keinen deutlichen Erfolg, wohl aber die Superposition beider, und nur um so entschiedener, wenn ich noch ein Glas 562 zufüge, welche Combination nur noch zwischen 1 und 2 Tausendtel Licht durchlässt. Nur erscheint mir das Bild in *A* bei Anwendung des rothen Glases vor *B* nicht eigentlich complementär zum Roth, sondern stets bläulich (bei blauem wie grauem Himmel), indess alle meine andern Farbegläser mir stets die zu erwartende Complementärfarbe geben.

Diese Versuche sind von Feddersen, Grabau, Volkmann, Zöllner und gelegentlich mehreren Laien mit gleich entschiedenem Erfolge wiederholt worden. Bei dem rothen Glase fanden auch meine Mitbeobachter die Färbung des Bildes *A* vielmehr blau oder blaugrünlich als rein grün.

Die Complementärfärbung am Bilde *A* bei vorigen Versuchen besteht nicht blos im Momente der Vornahme des Farbeglases vor *B*, sondern dauert fort, so lange man das dunkle Glas und Farbeglas vor den Augen behält, und ich habe selbst keine allmälige Schwächung der Färbung sicher constatiren können; doch erwähnte Feddersen gelegentlich von selbst einer solchen, und wahrscheinlich findet sie doch überall statt, da die später zu besprechende Gleichfarbe nach Entfernung des Farbeglases sich um so stärker am Bilde *A* zeigt, je länger das Glas vorgehalten wird, wobei es übrigens einen grossen Unterschied macht, ob man, wenn man das Farbeglas von *B* entfernt, zugleich das graue Glas von *A* entfernt, oder vor *A* lässt. Letzternfalls tritt die Gleichfarbe in dem dunkel bleibenden Bilde *A* weit deutlicher auf, als zweitenfalls in dem sich lichtenden.

Bei sehr grosser Empfindlichkeit scheint es einer Zuziehung grauer Gläser doch nicht zu bedürfen. In der That fand Dove bei den gelegentlich mit ihm (bei blauem Himmel) angestellten Versuchen ohne Zuziehung grauer Gläser unter Anwendung eines hellgrünen Glases vor *B* das Bild im Auge *A* sehr schwach, aber unzweideutig, röthlich, bei Anwendung eines röthlichgelben noch entschiedener blau, bei Verwechselung des Auges, wovor das Glas gehalten ward, auch sofort die Färbung umsetzend, indess das dunkelgrüne und violete Glas keine deutliche Färbung in *A* gab. Ich selbst konnte zur selben Zeit bei keinem dieser Farbengläser ohne Zuziehung grauer Gläser ein Resultat erhalten.

Aber Dove's Augen sind überhaupt für subjective Farbenstimmungen ausserordentlich empfänglich, also konnte wohl bei ihm ein Resultat bemerklich werden, was bei mir und Andern wegen zu grosser Schwäche fehlte.

Wenn man das Doppelbild mit einem Farbenglase vor einem Auge *B* anstatt durch ein weisses Feld auf schwarzem Grunde umgekehrt durch ein schwarzes Feld auf weissem Grunde ohne Zuziehung eines Glases vor *A* herstellt, so bemerkt man folgendes Phänomen.

Allgemein zeigt sich um das Bild, was dem Auge *B* mit dem Farbenglase angehört, ein nebliger Hof von der Farbe des Glases;*) um das andre im Auge *A* ein lichter, manchmal schwach complementärer Hof,**) welche sich theils gegen einander zu verwaschen, theils in eine allgemeine schwache Färbung, womit der ganze Grund überlaufen ist, verlaufen. Diese allgemeine Färbung des Grundes fand ich bald complementär, so namentlich bei dem rothen Glase, bald gleichfarbig mit dem Glase. Verdeckt man abwechselnd ein und das andre Auge, so wird, auch im Fall des rothen Glases, je nachdem man *B* oder *A* verdeckt, der ganze Grund um das schwarze Feld abwechselnd weiss und von der Farbe des Glases.

An sich kann es nicht auffallen, dass das Auge mit dem Farbenglase den weissen Grund um das Bild des schwarzen Objects eben so mit der Gleichfarbe des Glases erblickt, als es bei der frühern Versuchsweise das Bild eines weissen Objects auf schwarzem Grunde mit der Gleichfarbe erblickt. Aber es findet doch keineswegs ein reines Entsprechen hiebei statt. Denn das Bild des weissen Objects auf schwarzem Grunde erscheint in seiner ganzen Ausdehnung gleichförmig farbig und von einer Färbung des schwarzen Grundes ringsum kann man nichts entdecken; hingegen erscheint der Grund um das schwarze Object nicht gleichförmig farbig, sondern wie bemerkt, umgiebt sich das schwarze

*) Wie S. 363 bemerkt, kann bei sehr schwach gefärbten Gläsern eine Ausnahme hievon statt finden, sofern die grauen Gläser mit einem Stich ins Violete mir bald einen Randschein oder nebligen Hof von der Gleichfarbe, bald von einer grünlichen Farbe im Umkreise des schwarzen Bildes *B* geben. Ich habe seitdem in mehrfacher Wiederholung gefunden, dass das Erste immer bei blauem, das Letzte bei trübem Himmel der Fall war. Doch sehe ich auch erstenfalls einen schmalen grünlichen Saum unmittelbar um das schwarze Feld, wie denn nach S. 363 auch Welcker beide Farben erkannte.

**) Zieht man beim Versuche eine dunkle Glascombination vor dem Auge *A* mit zu, die nur etwa $\frac{1}{100}$ Licht durchlässt, so wird dieser Hof sehr entschieden.

Object mit einem an Intensität der Färbung vom Rande abnehmenden, ja unter Umständen gar ins Complementäre sich verlaufenden Hofe, und das schwarze Bild innerhalb dieses Hofes zeigt ziemlich variable Farbenphänomene, die es mir noch nicht geglückt ist zu klären.

Ich habe nämlich Folgendes gefunden:

Von den beiden schwarzen Bildern bleibt das dem freien Auge *A* angehörige für mein Auge immer schwarz, indess das andre nach Umständen auch blos schwarz, wenn schon nebelartig, aber ohne Deutlichkeit der Farbe, vom Hofe mit überlaufen, oder deutlich gleichfarbig dem Glase oder complementär dazu erscheint. Dem Glase gleichfarbig fand ich es stets bei Blau, mehrmals auch bei Hellgrün so wie Dunkelgrün, obwohl bei Grün die Farbe nicht immer deutlich war; complementär zum Glase, also grün, stets bei Roth; mit röthlichgelbem Nebel überlaufen bei röthlichgelbem Glase.

Wesentlich übereinstimmende Resultate erhielt Grabau, d. h. mit blauem Glase ein blaues, mit grünem Glase ein grünes, mit rothem Glase ebenfalls ein grünes Bild in dem Auge mit dem Glase; dagegen erhielt er bei einpaarmal wiederholten Versuchen mit dem röthlichgelben Glase das Bild erst gleichfarbig, allmälig in complementäres Violet übergehend. Ich konnte blos die Gleichfarbe erhalten, ohne Uebergang in Violet. Eben so erhielt Funke (unabhängig von Grabau) mit dem blauen Glase stets Blau, mit dem rothen aber bei zweimaligen Versuchen erst Roth, bei längerm Betrachten in Grün übergehend, mit dem röthlichgelben erst Röthlichgelb, bei längerm Betrachten in Violet übergehend, wobei zu erinnern, dass auch Grabau bei einem ersten Versuche mit dem rothen Glase erst einen Moment Roth vor Eintritt des Grün sahe, indess ein späterer eben so, wie ich es bei sehr oft wiederholten Versuchen immer gefunden, gleich im Moment des Auseinanderschiebens Grün gab.

Zöllner erhielt mit dem rothen Glase einmal tief Schwarz, ein andermal schön Grün, mit dem blauen wiederholt bläulich Purpur oder Purpurviolet, mit dem dunkelgrünen wiederholt Roth, mit dem röthlichgelben wiederholt sehr schwach Gelb oder Grüngelblich, mit dem violeten wiederholt Dunkelgrün. Auch fand er das mit dem freien Auge gesehene Bild keineswegs so wie ich überall rein schwarz, sondern beim rothen roth, beim blauen schwarzgrün, beim dunkelgrünen einmal tief schwarz, das andremal dunkelgrün, beim röthlichgelben schwarz, beim violeten einmal röthlich, ein andermal schwach violet, also da, wo überhaupt eine Farbe spürbar war, im Allgemeinen gleichfarbig dem Glase.

Ziehen wir jetzt die Nachwirkung der einseitigen Farbenreizung in Betracht.

Bezüglich des mit der Farbe gereizt gewesenen Auges *B* ist natürlicherweise zu erwarten, und bestätigt sich auch beim Doppelbildsversuche, dass die zur Farbenreizung complementäre Farbenstimmung hinterbleibt, und an dargebotenem Weiss zur Geltung kommt. Aber es

fragt sich, was wird im andern, nicht farbig gereizt gewesenen, Auge *A* hinterbleiben?

Es sind von vorn herein wieder drei Annahmen möglich: 1) entweder die complementäre Stimmung, die nach den vorigen Versuchen (unter Zuziehung eines dunkeln Glases) während der Farbenreizung von *B* im Auge *A* Platz griff, erlischt mit Wegfall dieser Reizung, und es tritt nichts Neues dafür ein; 2) oder sie erhält sich nach Wegfall der Farbenreizung von *B*, so dass dann *A* und *B* beide complementär gestimmt zum Farbenglase hinterbleiben; 3) oder so wie mit Wegfall des Glases vor dem Auge *B* die objective Gleichfarbe des Glases im Bilde *B* sich mit der subjectiven Complementärfarbe vertauscht, vertauscht sich zugleich die Complementärstimmung und davon abhängige Farbe im Auge *A* mit der gleichfarbigen Stimmung, so dass nach Wegfall der Farbenreizung *B* complementär, *A* gleichfarbig mit dem Glase hinterbleibt.

Der Erfolg entscheidet für die dritte dieser Annahmen.

Zur Untersuchung wiederholen wir die Versuche des vorigen Abschnittes nach Methode *C* (Seite 470) mit der einzigen Abänderung, dass wir, statt zwei complementäre Gläser vor beide Augen zu nehmen, und damit in den Himmel zu blicken, blos ein Farbeglas vor ein Auge *B* nehmen, und dabei entweder *α*) das andere *A* schliessen, respectiv mit den Händen verdecken, ohne es zu drücken, oder *β*) mit *B* zugleich offen in den Himmel richten, dann, nach hinreichend kräftig erzeugter subjectiver Stimmung, mit beiden offenen Augen ohne Glas das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinanderschieben, oder abwechselnd das eine und andere Auge verdecken. So erhält man, vorausgesetzt, dass die Augen hinreichend empfänglich sind, und die vorgängige einseitige Farbenreizung stark und kräftig genug war, ebenfalls beide zu einander complementäre Farben, nicht nur die zum Glase complementäre, sondern auch die Gleichfarbe des Glases, jene im Auge *B*, diese im Auge *A*, an den gleichzeitig oder abwechselnd gesehenen monocularen Bildern.

Wenn schon der Versuch bei hinreichender Empfänglichkeit sowohl nach *α*) als *β*) gelingt, sind doch beide Methoden nicht ganz gleichgeltend. Nach den zum Schluss dieses Abschnitts folgenden vergleichenden Versuchen erhält man bei *β*), wo das Auge offen mit in den Himmel gerichtet wird, die Gleichfarbe nachher leichter und dauernder als bei *α*), wogegen sich in Betreff der Complementärfarbe beide Me-

thoden gleich verhalten. Ausserdem findet der Unterschied statt, dass nach der Methode β) das dem Glase gleichfarbige Bild *A* etwas dunkler, nach der Methode α) etwas heller als das complementärfarbige *B* ist, was sich leicht nach den Versuchen des 10. Abschnitts erklärt, sofern nach β) das Auge *A*, nach α) das Auge *B* stärker beim Blick in den Himmel ermüdet wird. Es fragt sich dann, ob der Vortheil, welchen die Methode β) vor α) hinsichtlich der Dauer der Gleichfarbe gewährt, darauf beruht, dass sich solche in einem für alle Farbestralen zugleich ermüdeten Auge verhältnissmässig stärker entwickelt, als in einem nicht ermüdeten, oder, dass sie nur in dem dunkeln Bilde leichter wahrgenommen wird, weil sie weniger durch Weiss verdünnt ist. Hiezwischen ist noch nicht entschieden, jedoch nach einem S. 487 angeführten Versuche das Letzte wahrscheinlicher.

Feddersen, Funke, Grabau, Ruete, Volkmann u. A., dieselben, bei welchen der Versuch des vorigen Abschnitts nach *C* mit beiden Gläsern einen deutlichen Erfolg gab, haben auch diese Versuche unter Anwendung verschiedener Farbengläser mit übereinstimmendem Erfolge wiederholt. Von denen, bei denen jener Versuch keinen oder einen zweideutigen Erfolg gab, habe ich die jetzigen Versuche nicht wiederholen lassen, da um so weniger Erfolg dabei zu erwarten war. Ich selbst habe den angegebenen Erfolg, d. h. beide zu einander complementäre Farben mit einem Glase, mit allen meinen Farbengläsern constatirt, am schwersten jedoch und oft gar nicht bei Methode α) die Gleichfarbe des Glases bei dem rothen Glase erhalten, als welches oft blos die Complementärfarbe am Bilde *B* aber keine merkliche Farbe bei *A* gab; doch verhält sich diess bei Grabau anders als bei mir.

Ueberhaupt erhalte ich, wenn die Wirkung nicht kräftig genug war, blos die Complementärfarbe des Glases an dem Bilde *B*, indess das Bild *A* dann weiss erscheint, in der Regel jedoch mit den meisten Gläsern beide Farben, selbst wenn ich weniger als 12 bis 15 Sec. in den Himmel geblickt habe. Bei noch empfänglicheren Augen, wie denen Grabau's, reichen 6 Secunden hin, eine Nachdauer hervorzubringen, die bei manchen Gläsern nicht nur für die Complementärfarbe, sondern selbst Gleichfarbe bis über 50 Sec. geht, wie die Beobachtungstabellen zum Schluss dieses Abschnitts beweisen.

Uebrigens hat man nach der grossen Absorptionsfähigkeit, welche das Weiss für Farben unter den Umständen unseres Versuches zeigt,

(S. 482), auch da, wo die Gleichfarbe des Glases im Bilde *A* überhaupt nicht erkannt wird, doch nicht anzunehmen, dass sie, oder vielmehr ihr physiologischer Grund, im Auge fehlt, sondern nur, dass sie dem Weiss nicht in hinreichender Stärke beigemischt ist, um erkannt zu werden.

Eben so wie bei den Versuchen des vorigen Abschnitts mit complementären Farbengläsern vor beiden Augen habe ich auch bei den jetzigen Versuchen gefunden, dass das Erscheinen und die Dauer der Farbe im einen Auge sehr durch das gleichzeitige oder unmittelbar vorgängige Erscheinen der dazu complementären Farbe im andern Auge begünstigt wird, und ganz entsprechende Wiederbelebungsphänomene beobachtet.

Die Versuche wurden nach *α*) angestellt. Wenn ich nach dem Sehen in den Himmel mit dem Farbenglase vor *B* durch eine gegebene Zeit (15, 20, 30 Sec. in verschiedenen Versuchen) mich zu dem weissen Felde auf schwarzem Grunde wende, *B* offen halte, *A* geschlossen lasse, und das Glas weglege, so dass mir vom Anfange herein blos das Bild *B* erscheint, ohne dass ich vorher oder gleichzeitig das Bild *A* sehe, so geht die im ersten Momente nach Beseitigung des Glases sehr deutliche zum Glase complementäre Färbung des Bildes schon binnen einer oder ein paar Secunden in Weiss über. Oeffne ich dann sofort *A* und schiebe sofort ein Doppelbild auseinander,*) so belebt sich, indem das Bild *A* mit der Gleichfarbe des Glases erscheint, oder selbst, wenn diese zu schwach ist, um bemerklich zu werden, auch die Farbe des Bildes im Auge *B* wieder, und durch abwechselndes Oeffnen und Schliessen kommen dann wieder beide Farben wechselnd zum Vorschein, und können Wiederbelebungsversuche wie früher angestellt werden, so lange überhaupt noch Farben erscheinen.

Eben so mit dem andern Bilde. D. h., schliesse ich, nachdem ich mich mit dem Farbenglase noch vor dem Auge *B* vom Blick in den Himmel zum weissen Feld auf schwarzem Grunde gewandt habe, das Auge *B* und öffne *A*, so dass mir das Bild *A* erscheint, ohne dass ich vorher oder gleichzeitig das Bild im Auge *B* sehe, so erscheint mir ein gewöhnlich nur sehr flüchtiger schwacher Schein von der Gleichfarbe des Glases, den ich inzwischen in hinreichend wiederholten Versuchen (am blauen, röthlichgelben, grünen Glase, an verschiedenen Tagen) entschieden genug beobachtet habe, um sagen zu können, dass er bei hinrei-

*) Lasse ich hingegen, nachdem das Bild binnen 1 Sec. weiss geworden, 10 Sec. verfliessen, ehe ich *A* öffne, indem ich das Feld fortgehends blos mit *B* ansehe und weiss finde, so sehe ich bei nachherigem Hinzuöffnen von *A* ohne Auseinanderschieben eines Doppelbilds das Feld stets entweder weiss oder schwach in der Gleichfarbe des Glases, die sich noch etwas vertieft, wenn ich dann *B* schliesse. Und schiebe ich erst jetzt das Doppelbild auseinander, so zeigt sich die Gleichfarbe des Glases lebhafter oder allein und steht länger als die Complementärfarbe.

chender Empfindlichkeit des Auges nicht fehlt; dann geht das Bild sofort in Weiss über. Aber schiebe ich dann sofort*) nach Oeffnung von *B* (und weggelegtem Glase) ein Doppelbild auseinander, so erscheint mit dem complementärfarbigen Bilde *B* die Gleichfarbe des Bildes *A* nicht nur wieder belebt, sondern auch entschieden stärker und dauernder als der erste flüchtige Schein; und ich kann mit beiden Bildern wie vorhin verfahren. Nach minder kräftiger Einwirkung des Farbenreizes erhalte ich auch oft jenen flüchtigen Schein der Gleichfarbe gar nicht merklich im erst gesehenen monocularen Bilde *A*, indess doch nachher bei auseinandergeschobenem Doppelbilde sie deutlich genug in der Componente *A* erscheint. Bei noch schwächerer Wirkung aber fehlt sie auch hier.

Durch die vorigen Versuche wird direct bewiesen, was sich aus den Versuchen des vorigen Abschnittes indirect schliessen liess, dass ein antagonistisches Verhältniss hinsichtlich der von der Farbenreizung nachbleibenden subjectiven Farbenstimmungen zwischen beiden Netzhäuten besteht, der Art, dass die complementäre Farbenstimmung, welche nach einseitiger Farbenreizung eines Auges in diesem nachbleibt, anstatt sich auf das andere Auge überzupflanzen oder dieses gleichgültig zu lassen, vielmehr eine, wenn schon schwächere, zu ihr complementäre, mithin dem ursprünglichen Reize gleichfarbige, Stimmung im andern Auge mitführt, und dass die durch Darbietung von objectivem Weiss zur Geltung kommenden Farben, welche durch diese Stimmungen bedingt werden, stärker und haltbarer sind, wenn sie gleichzeitig oder im Wechsel, als wenn sie in dauernder Absonderung zur Geltung gebracht werden.

Zum Beweise, dass dieses antagonistische Verhältniss nicht blos zwischen correspondirenden, sondern auch disparaten Stellen besteht, können folgende Abänderungen des Versuches dienen.

Wenn man ohne vorherigen Blick in den Himmel mit *A* frei, mit *B* armirt durch ein Farbeglas, das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinanderschiebt, findet man, wie schon früher angeführt, das Bild in *A* schlechthin weiss, und es bleibt so, so lange man immer das Farbeglas vorhalten mag. Hiegegen reicht es hin, nachdem man das Glas längere Zeit vorgehalten, dasselbe vom Auge *B* weg-

*) Lasse ich hingegen, nachdem das Bild scheinbar weiss geworden ist, 10 Sec. verfliessen, ehe ich *B* öffne, indem ich das Feld fortgehends blos mit *A* ansehe, so sehe ich bei nachherigem Hinzuöffnen von *A* ohne Auseinanderschieben des Doppelbildes die Complementärfarbe, die sich noch etwas vertieft, wenn ich *A* schliesse und im nachher auseinandergeschobenen Doppelbilde überwiegt dann die Complementärfarbe um so entschiedener und steht länger als die des andern Bildes.

zuziehen, so macht sich, falls anders die Wirkung kräftig genug war, sofort die Gleichfarbe des Glases am Bilde *A* unter gleichzeitiger Verdunklung dieses Bildes geltend und schwindet wieder unter Erhellung des Bildes, wenn das Glas wieder vor *B* vorgenommen wird, ein Wechsel, den man immer erneuern kann.

Sind meine Augen empfindlich genug gestimmt, so erhalte ich die Gleichfarbe bei dieser Versuchsweise mit allen meinen Gläsern, sonst nur mit den hellern, dem hellgrünen und röthlichgelben, wo mir der Versuch nie fehl schlägt, indess ich mit andern Gläsern bei weniger reizbarer Stimmung des Auges auch nach längerer Betrachtung nicht selten nur ein Unreinwerden des Weiss bei seiner immer sehr entschiedenen Verdunklung bemerken konnte, so wie es immer eintritt, wenn eine schwache subjective Färbung sich dem Weiss beimischt.

Funke, Grabau und Ruete haben den Erfolg bei dem hellgrünen und röthlichgelben Glase constatirt und sehr deutlich befunden; Zöllner bestätigte ihn an fast allen meinen Gläsern, Feddersen aber konnte (bei Probiren des röthlichgelben und blauen, welche gerade zur Hand waren) keinen Erfolg wahrnehmen.

Anstatt bei vorigem Versuche das Doppelbild von vorn herein auseinanderzuschieben, kann man auch, mit dem Farbenglase vor *B*, das weisse Feld erst längere Zeit einfach mit beiden Augen fixiren und erst nachmals das Doppelbild auseinanderschieben. Der Erfolg bei nachherigem abwechselnden Weglegen und Vornehmen des Glases vor *B* bleibt der angegebene.

Diese Versuche treffen wesentlich mit denen zusammen, welche schon S. 479 f. bei den Versuchen mit zwei Gläsern beschrieben wurden.

Auch bei diesen Versuchen mit directer Wendung an das weisse Feld beobachtete ich vom anfänglichen Schluss des einen oder andern Auges analoge Erfolge als S. 492 angeführt worden, die ebenfalls den Wechseleinfluss der Bilder beweisen.

In der That, wenn ich mit einem Farbenglase (hellgrünen, röthlichgelben) vor dem Auge *B*, indess *A* offen war, ohne vorherigen Blick in den Himmel ein weisses Feld auf schwarzem Grunde längere Zeit sei es einfach fixirte, ohne ein Doppelbild auseinanderzuschieben oder auch als Doppelbild auseinandergeschoben, dann das Auge *B* hinter dem Farbeglase schloss oder verdeckte, so zeigte das übrigbleibende monoculare Bild *A* im offen gehaltenen oder jetzt geöffneten Auge *A* oft gar keine, niemals eine sehr deutliche, wenn schon in mehrfachen Fällen hinreichend erkennbare Gleichfärbung, selbst wenn der Versuch

bis zu 30 Sec. Betrachtung mit dem hellgrünen Glase fortgesetzt wurde. So wie aber das zum Glase complementäre Bild im Auge *B* dazu erschien (durch Oeffnung des Auges *B*, Weglegen des Glases und Auseinanderschieben des Doppelbildes, falls es nicht schon da war), trat die Gleichfarbe des Glases sofort sichtbar am Bilde im Auge *A* hervor, versiegte schnell wieder, wenn ich *B* wieder verdeckte, um wieder bemerklich zu werden, wenn ich *A* wieder öffnete.

Durch die vorigen Versuche ist also erwiesen, dass sich die dem Reize gleichfarbige Stimmung, welche in *B* hinterbleibt, über den Bereich der zur farbengereizten Stelle correspondirenden hinaus erstreckt.

Hiebei erinnere ich an ein früher von mir erhaltenes Resultat,*) dass bei jedem complementären Nachbilde, welches nach gewöhnlicher Versuchsweise von einem einfach mit zwei Augen gesehenen farbigen Objecte hinterblieben ist, die Ergänzungsfarbe des Nachbilds, also die dem ursprünglichen Eindruck homogene in der Nachbarschaft des Nachbilds erscheint. Sahe man z. B. ein grünes Object sei es auf weissem oder schwarzem Grunde in der Weise gewöhnlichen Sehens eine Zeit lang an und betrachtet dann das Nachbild auf weissem Grunde, so erscheint der ganze Grund um das rothe Nachbild mit einem grünen Scheine überlaufen; und betrachtet man eine Zeit lang ein weisses Object auf grünem Grunde, so zeigt sich nachher auf weissem Grunde ein schwärzlichgrünes Nachbild, indess der ganze Grund lebhaft roth ist.**) ein Versuch, der sehr frappant ist, und, wie ich mich jetzt noch insbesondere überzeugt habe, auch gelingt, wenn man statt beider Augen blos ein Auge unter Schluss des andern zum Versuch anwendet, vorausgesetzt, dass man das Nachbild mit demselben Auge auf dem weissen Grunde auffasst, mit dem man vorher das Urbild betrachtet hatte.***)

Combinirt man dieses Resultat mit dem vorigen, so schiene hervor-

*) Pogg. XLIV. 530. 535.

**) Das Nachbild ist heller oder dunkler als der Grund, je nachdem das Urbild auf weissem oder schwarzem Grunde betrachtet wird.

***) Wenn ich hingegen sei es ein farbiges Feld auf weissem Grunde, sei es ein weisses Feld auf farbigem Grunde mit blos einem Auge *A* durch eine inwendig schwarze Röhre längere Zeit betrachte, indess das andre Auge *B* sei es offen, oder geschlossen ist, oder durch eine andre schwarze Röhre nach einem weissen Grunde sieht, und wenn ich nachher das Auge *A* schliesse, um blos mit *B* auf einen weissen Grund zu sehen, kann ich nie das Geringste von einem Nachbild wahrnehmen, das ich hingegen sehr lebhaft wahrnehme, wenn ich nach jener Betrachtungsweise des Objects das Nachbild blos mit *A* unter Schluss von *B*, oder mit beiden offenen Augen auf einem weissen Grunde auffange.

zugehen, dass die Reizung einer Netzhautstelle mit einer Farbe eine complementärfarbige Stimmung auf dieser Netzhautstelle, eine gleichfarbige nicht nur rings auf derselben Netzhaut, sondern auch auf der andern Netzhaut, also auf der Gesammtheit beider Netzhäute, mit Ausnahme der direct gereizten Stelle, hervorruft, nur dass die Wirkung auf der andern Netzhaut zu schwach ist, um anders als unter günstigen Verhältnissen bemerklich zu werden, daher man auch nur erwarten kann, sie unter solchen zu beobachten.

In Widerspruch hiemit erscheint für den ersten Anblick folgender Umstand. Wenn man mit einem Glase von der Farbe *b* vor einem Auge *B*, dem andern *A* frei, oder unter Schluss des Auges *A*, längere Zeit ein weisses Feld auf schwarzem Grunde einfach unter fester Fixation betrachtet, so sollte sich nach Vorigem in der Nachbarschaft um die mit der Farbe *b* gereizte Stelle des Auges *B*, zunehmend mit der Dauer der Betrachtung, die gleichfarbige Stimmung *b* entwicklen, und nachher an einem weissen Felde zur Geltung gebracht werden können, was in diese Nachbarschaft fällt. Dessenungeachtet, wenn man nach längerer Zeit der Betrachtung das Glas von *B* entfernt, *A* öffnet, falls es geschlossen war, und ein Doppelbild des weissen Feldes auseinanderschiebt, erscheint die Componente im Auge *B* nicht mit der Gleichfarbe des Glases *b*, sondern mit der Complementärfarbe *a*, ungeachtet sie beim Auseinanderschieben auf Nachbarstellen der ursprünglich gereizten Stelle fällt, wo nach Vorigem die gleichfarbige Stimmung zu erwarten. Hienach schiene sich im Auge *B* um die mit der Farbe *b* gereizte Stelle vielmehr die complementäre, als gleichfarbige Stimmung zu entwickeln, welches dem Vorigen widerspricht. Inzwischen ist zu bemerken, dass diese complementäre Stimmung erst als ein secundäres Phänomen eintritt, wenn im Auge *A* die gleichfarbige Stimmung *a* durch Darbieten von Weiss zur Geltung und durch Absonderung von der andern Componente zur Erscheinung gebracht ist, und offenbar in Abhängigkeit hievon steht. Denn wenn der Versuch übrigens in angegebener Weise, aber so angestellt wird, dass man vor Entfernen des Glases vom Auge *B* das Auge *A* schliesst oder geschlossen lässt, so zeigt sich überhaupt keine merkliche oder nur eine ganz flüchtige Complementärfarbe *a* am Bilde im Auge *B*; diese tritt aber sofort lebhaft, und dann gleichgültig, ob noch an der ursprünglichen Stelle der Netzhaut, hervor, wenn man *A* öffnet, und damit die gleichfarbige Stimmung *b* im Auge *A* zur Geltung bringt.

Wenn man also eine Netzhaut *B* an einer Stelle mit einer Farbe *b* reizt, so ruft sie nach den S. 495 angeführten Versuchen factisch allerdings in der ganzen Umgebung der gereizten Stelle auf *B*, so wie nach den anderweiten Versuchen unsers Abschnittes auf der Netzhaut *A*, eine gleichfarbige Stimmung hervor, indess an der direct gereizten Stelle die complementäre Stimmung hervorgerufen wird; aber wenn die gleichfarbige Stimmung auf *A* in wirkliche Farbe durch Darbietung von Weiss übergeht, so ruft sie die gegentheilige complementäre mehr oder weniger auf der ganzen Netzhaut *B* hervor. Ich wüsste wenigstens sonst nicht, diese Phänomene in Einklang zu bringen.

Hierauf beruht denn auch unstreitig der Erfolg, den man nach der Methode *a*) und *b*) S. 472 mit zwei complementären Gläsern erhält.

Inzwischen gebe ich zu, dass in diesen Verhältnissen noch nicht Alles so klar gestellt ist, als zu verlangen sein wird.

Sehr zu wünschen wäre, dass die Versuche mit einseitiger Farbenreizung an blendenden Farbenlichtern wiederholt würden, um zu sehen, ob das dem Urbilde gleichfarbige, von der Nachdauer des Eindrucks abhängige, positive Bild, was die ersten Phasen des Blendungsbildes ausfüllt, einseitig auf einer Netzhaut erzeugt, eben so die complementäre Stimmung auf der andern Netzhaut mitführt, als nach vorigen Versuchen die, eigentlich einer zweiten Phase angehörige, complementäre Farbe des Nachbildes auf der gereizt gewesenen Netzhaut die dem Reize gleichfarbige Stimmung auf der andern Netzhaut mitführt, und ob man etwa in den Componenten eines Blendungsdoppelbildes ein zu einander complementäres Farbenabklingen erhalten kann.

Versuche darüber denke ich mir so, dass durch ein Farbeglas vor blos einem Auge bei Schluss oder Offenhaltung des andern eine Zeit lang ein helles Lampenlicht oder, will man mehr wagen, die Sonne fixirt und dann ohne Glas das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinandergeschoben würde. Doch muss ich derartige Versuche Andern überlassen.

Vergleichsweise Versuche über die Länge der Nachdauer der Gleichfarbe und Complementärfarbe bei einseitiger Farbenreizung nach Methode *α*) und *β*).

Wie wir gesehen, wenn ein Auge *B* dadurch farbig gereizt wird, dass es durch ein Farbeglas in den Himmel sieht, indess das andere

Auge *A* entweder *α*) geschlossen bleibt, oder *β*) ohne Farbeglas frei in den Himmel sieht, und wenn nach Beseitigung des Glases das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinandergeschoben wird, zeigt sich am Bilde des Auges *A* die Gleichfarbe, an dem des Auges *B* die Complementärfarbe des Glases als Nachfarbe. Die folgenden Versuche haben den Zweck, durch Bestimmung der Zeitdauer, während welcher diese Färbungen an den Componenten des Doppelbildes merklich bleiben, eine Art Mass für die relative Stärke der Wirkungen, denen sie den Ursprung verdanken, mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der Methoden *α*) und *β*), sowie mit Rücksicht auf eine ungleiche Helligkeit beider Augen, wie solche bei manchen Individuen besteht, zu geben. Die Gleichfarbe, als im Auge *A*, und Complementärfarbe als im Auge *B* hinterbleibend, wird folgends selbst auch respectiv mit *A* und *B* bezeichnet werden.

Versuche mit beiderseits gleich hellen Augen sind von mir und von Grabau, solche mit ungleich hellen Augen von den (noch während des Drucks dieser Abhandlung als Beobachter hinzugetretenen) Herren Nies und v. Zahn, Studiosis der Naturwissenschaften, mit sämmtlichen, S. 365 aufgeführten, Farbegläsern*) unter folgenden allgemeinen Massregeln angestellt.

Ich selbst wandte stets 12 Sec. langen Blick in den Himmel an, was aber für Grabau viel zu lange war. Er blieb bei 6 Sec. stehen, wobei er immer noch eine ohne Vergleich grössere Nachdauer erhielt, als ich. Bei Nies und v. Zahn wurde eine Dauer von 8 Sec. gewählt. Einige Versuche von mir und von Grabau sind bei blauem Himmel angestellt, die meisten Versuche aber bei bedecktem oder ganz grauem Himmel, und diese desshalb vorzuziehen, weil die Bläue des Himmels eine Complication in die Versuche bringt, indem sie sich beim Blick in den Himmel mit der Farbe des Glases vor *B* zusammensetzt, bei Methode *β*) in das offene Auge *A* fällt, und beim Auseinanderschieben des Doppelbildes eine additive oder subtractive Wirkung auf dessen Farben

*) Hinsichtlich der Reihenfolge der Dunkelheit der Farbegläser habe ich als Berichtigung anzuführen, dass nach einer neuen Probe, welche sichrer als das Lesen durch die Farbegläser ist, das rothe Glas nicht, wie S. 365 angegeben, etwas dunkler, sondern etwas heller als das dunkelgrüne erscheint.

äussert, je nachdem sie mit der Himmelsbeleuchtung mehr gleichartig oder ungleichartig sind.*)

Die Versuche wurden, wo sie ganz methodisch angestellt sind, stets abwechselnd mit dem Farbenglase vor dem linken und rechten Auge, abwechselnd nach Methode α) und β) angestellt, so dass zu jeder Versuchsabtheilung mit einem und demselben Glase 4 hinter einander angestellte Versuche R . α, R . β, L . α, L . β gehörten, die theils in dieser Folge, theils in verwechselten Folgen angestellt sind. Nur die erste Reihe ist blos nach α), die siebente blos nach β) angestellt.

Zu einem neuen Versuche jeder Abtheilung wurde erst übergegangen, nachdem nicht nur die Farben vom vorherigen völlig erloschen waren, sondern auch eine gewisse Zwischenzeit gelassen war, welche bei den Versuchsreihen besonders angegeben ist.

Bei der Anführung der Ergebnisse unterscheide ich die Bezeichnung R und r, je nachdem das Farbenglas vor dem rechten Auge war, oder die Nachfarbe im rechten Auge war, und entsprechend L und l bezüglich des linken Auges. Da nämlich die Gleichfarbe *A* im linken Auge entsteht, wenn das Glas vor dem rechten Auge ist, so entspricht bezüglich der Gleichfarbe dem R das l und dem L das r, wogegen für die Complementärfarbe sich R und r, L und l entsprechen.

Die Zahlen der folgenden Tabellen sagen, wie viel Secunden es dauerte, bis die Farben *A* und *B* (Gleichfarbe und Complementärfarbe) erloschen, wenn das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde sofort auseinandergeschoben und so erhalten wurde, nachdem zuvor mit dem Farbenglase vor dem Auge *B* die vorhin bezeichnete Zeit hindurch in den Himmel geblickt und dann das Glas weggelegt worden. Wo die Resultate für linkes und rechtes Auge zusammengefasst sind, geben auch die Zahlen die Summe der Dauer für beide.

Genaue Zahlen bei Einzelversuchen darf man freilich nicht erwarten, da der Zeitpunct des Verschwindens der letzten Spur Färbung nicht wohl genau bestimmbar ist; manchmal aber ist man darüber viel unsichrer als andremale. Daher muss man auch weniger auf die Zahlen für

*) Bei hinreichend reizbarer Stimmung erhält man selbst ohne blaues Glas einen ähnlichen Farbenunterschied der Componenten des Doppelbildes, als sonst mittelst des blauen Glases, wenn man eine Zeit lang mit einem Auge bei Schluss des andern in einen rein blauen Himmel gesehen hat, bevor man das Doppelbild auseinanderschiebt. Manchmal erhalte ich hiebei blos das Röthlichgelb, manchmal aber auch das Blau.

die einzelnen Farben als die dafür geltenden Summenzahlen achten. Durch eine grössere Vervielfältigung der Versuche, als hier statt gefunden hat, würde man freilich auch grössere Sicherheit für die einzelnen Farben erlangen können, inzwischen schienen diese Versuche, wenn schon nicht ohne Interesse, doch nicht wichtig genug, um Zeit und Aufmerksamkeit meiner Mitbeobachter für eine oftmalige Wiederholung derselben in Anspruch nehmen zu dürfen, die sich bei mir von selbst verboten hat.

Ungeachtet die Summenzahlen für die verschiedenen Farben vorzugsweise massgebend sein müssen, trug ich doch Bedenken, von der Specification der Zahlen für die einzelnen Farben abzusehen, da sich einige Farben eigenthümlich zu verhalten scheinen, und es ein Interesse hat, zu sehen, theils, wie sich verschiedene Beobachter zu denselben Farben stellen, theils wiefern eine Abhängigkeit der Erfolge von der Dunkelheit und Brechbarkeit der Farben statt findet, was freilich zur genauen Ermittelung selbst genaue Mittelzahlen erfodert haben würde, aber doch bis zu gewissen Gränzen schon nach den vorliegenden Datis beurtheilbar ist; wonach ein Einfluss der Individualität auf die Erfolge bei verschiedenen Farben deutlich sichtbar ist, indess ein gesetzlicher Einfluss der Dunkelheit oder Brechbarkeit nicht hervorgeht.

Eine Zusammenfassung der Resultate der Versuche folgt nach der tabellarischen Mittheilung derselben.

Tabelle I. (Fechner)

Methode α). Versuche verschiedener Tage. Die Farbe des complementären Bildes stand mehrfach zu lange, um ihr vollständiges Verschwinden während auseinandergeschobenen Doppelbildes abzuwarten, und wurde dann nur so lange beobachtet, um die Ueberzeugung zu gewinnen, dass sie die Gleichfarbe sehr erheblich überdauerte. Die Beschaffenheit des Himmels ward bei diesen Versuchen von früherem Datum nicht notirt.

Die Zwischenzeit zwischen den Versuchen jeder Abtheilung bestand meist blos in der Zeit zur Notirung der Resultate und 15 Sec. langem Blick auf einen schwarzen Grund.

Glas	Auge *B*	Nachfarbe *A*	Nachfarbe *B*
Roth	R	7	über 24
	L	3	11
Röthlich-gelb	R	2	über 25
	L	3	desgl.
Hellgrün	R	3	19
	L	3	20
Dunkel-grün	R	7	über 50
	L	9	desgl.
	R	13	desgl.
	L	8	desgl.
desgl. (andern Tages)	R	4	26
	L	13	26
Blau	R	2	über 20
	L	7	über 25
Violet	R	10	22
	L	11	24
	R	10	21
	L	10	20

Reducirt man die Beobachtungen für jede Farbe auf eine R und eine L, und übersetzt (nach S. 499) für die Gleichfarbe R und L in l und r, so hat man

In Summa für $A \,.\, \alpha$

r 36,5

l 32

Also stand die Gleichfarbe merklich gleich lange im rechten und linken Auge.

Tabelle II. (Fechner)

Methode α) und β). Leichtbedeckter Himmel. Alle Versuche an demselben Tage hinter einander angestellt. Zwischenzeit der Versuche wie in Tabelle I. Folge der Versuche: Dunkelgrün, Roth, Röthlichgelb, Blau, Violet, Hellgrün.

Glas	Auge B	Methode	Nachfarbe A	Nachfarbe B	Glas	Auge B	Methode	Nachfarbe A	Nachfarbe B
Roth	R	α	0	22	Dunkel-	R	β	7	16
	R	β	3	19	grün	R	α	5	13
	L	β	1	11		L	α	6	16
	L	α	0	10		L	β	7	16
Röth-	R	β	3	19	Blau	R	α	0	23
lichgelb	R	α	4	19		R	β	3	23
	L	α	4	11		L	β	8	3
	L	β	4	11		L	α	8	14
Hell-	R	α	3	18	Violet	R	β	4	28
grün	R	β	1	12		R	α	0	39
	L	β	15	8		L	α	1	12
	L	α	13	7		L	β	2	12

In Summa:

	α		β		
	A	B	A	B	
r	32	134	37	117	320
l	12	70	21	61	164
	44	204	58	178	

Tabelle III. (Fechner)

Methode α) und β). Versuche eines und desselben Tages. Der Himmel sehr schön und rein blau. Zwischenzeit zwischen den einzelnen Versuchen jeder Abtheilung: 2 Min., und 15 Sec. Blick auf schwarzen Grund; ½ St. zwischen den einzelnen Abtheilungen. Folge: Hellgrün, Violet, Blau.

Glas	Auge	Methode	Dauer A	Dauer B
Hell-	L	α	0	11
grün	L	β	3	11
	R	β	3	16
	R	α	4	18
Blau	L	α	6	8
	L	β	18	3
	R	β	42	32
	R	α	9	37
Violet	L	β	13	24
	L	α	0	11
	R	α	0	17
	R	β	24	24

In Summa, ohne das anomale Blau:

	α		β		
	A	*B*	*A*	*B*	
r	0	35	16	40	91
l	4	22	27	35	124
	4	57	43	75	

Es war mein Wunsch, die Versuche mit der längern Zwischenzeit der Tabelle III bis zur Gewinnung sichrer Mittelzahlen zu vervielfältigen; allein meine Augen waren schon durch die hintereinander angestellten Versuche der Tabelle II und die Tags darauf folgenden der Tabelle III so angegriffen, dass ich von einer weiteren Fortsetzung derselben gänzlich abstrahiren musste, und längere Zeit dauernden Nachtheil spürte.

Tabelle IV. (Grabau)

Methode α) und β). Versuche verschiedener Tage, die bei Wiederholung derselben Versuche ziemlich ähnliche Werthe gaben. Nur Versuche bei grauem Himmel sind hier zusammengestellt. Zwischenzeit zwischen den Versuchen einer Abtheilung 2 bis 4 Min., in der Hauptsache mit Blick auf einen schwarzen Grund. Die Versuche jeder Abtheilung theils nach dem Schema der Folge Rα, Rβ, Lβ, Lα, theils in verwechselter Folge angestellt, hier aber sortirt, unter Zusammenziehung für das rechte und linke Auge, so dass jede Zahl die Summe der Dauer von zwei Versuchen repräsentirt. Die Specification für r und l in den Summenzahlen folgt unten nachträglich. Für Roth und Dunkelgrün sind die Zahlen aus der doppelten, für Röthlichgelb aus der dreifachen Zahl Versuche verschiedener Tage abgeleitet.

Glas	Methode α		Methode β	
	A	*B*	*A*	*B*
Roth	112,5	215	135	230
R.-Gelb	55	91,7	51,7	75
H.-Grün	100	100	115	100
D.-Grün	67,5	65	105	57,5
Blau	69	73	100	80
Violet	80	100	75	90
	484,0	644,7	581,7	632,5

In Summa:

	α		β		
	A	B	A	B	
r	233,7	362,3	311,7	320,8	1228,5
l	250,3	282,4	270,0	311,7	1114,4
	484,0	644,7	581,7	632,5	

Tabelle V. (Grabau)

Methode α) und β). Versuche desselben Tages (1. Nov.). Rein blauer Himmel. 4 Min. Zwischenzeit. Die Zahlen für rechtes und linkes Auge wie in Tab. IV.

Glas	Methode α		Methode β	
	A	B	A	B
Roth	140	240	190	330
D.-Grün	60	80	130	60

In Summa:

	α		β		
	A	B	A	B	
r	110	130	200	190	650
l	90	170	120	200	580
	200	220	320	390	

Tabelle VI. (Grabau)

Mittelwerthe aus den Zahlen der Versuche mehrerer Tage blos mit blauem Glase, theils bei blauem Himmel, theils grauem oder leichtbedecktem Himmel. Ohne regelmässige Abwechslung zwischen α, β, L und R, daher nur die Menge der Versuche verschiedener Tage eine gewisse Vergleichbarkeit herstellt. Die Zahlen sind auch hier für rechtes und linkes Auge zusammengefasst, und geben die Dauer von 2 Versuchen im Mittel der Zahl, welche unter Versuchszahl angegeben ist. 4 Min. Zwischenzeit zwischen den einzelnen Versuchen jedes Tages.

Himmel	α			β		
	Versuchszahl	A	B	Versuchszahl	A	B
Blau	12	119	73	,,	,,	,,
Grau	14	62	122	29	58	21

Tabelle VII. (Nies)

Nies sieht minder hell auf dem rechten als linken Auge, welche Ungleichheit nach einem Nervenfieber zurückgeblieben ist. Ein Glas 744 oder 752 vor dem linken Auge reichte beim Doppelbildsversuche an einem Tage gerade hin, an einem andern Tage fast, doch nicht ganz, hin, den Unterschied zu compensiren, indess die Combination 824 . 795 = 655 schon beträchtlich übercompensirte. Das linke, heller sehende, Auge ermüdet weniger leicht als das rechte, denn nach 30 Sec. langem Blick mit beiden Augen in einen grauen Himmel gelang jene Compensation durch das Glas 752, die vorher an demselben Tage statt gefunden hatte, nicht mehr, sondern, wenn 752 unmittelbar nach jener Ermüdung vor das linke Auge genommen ward, erschien das Bild im linken Auge noch heller als im rechten, ein Erfolg, der zweimal (nach zuvorigem Ausruhen des Auges) constatirt wurde, wogegen nach 30 Sec. langem Schluss beider Augen die Compensation durch 752 in derselben Weise gelang, als wenn ohne Vorbereitung zum Doppelbildsversuche übergegangen wird. Nies bedient sich bei den Versuchen des ungleichseitigen Doppeltsehens. Ueber den Ausfall des paradoxen Versuches bei Nies vgl. S. 421.

Methode β). Hinter einander angestellte Versuche desselben Tages (31. October). Ganz grauer Himmel. 8 Sec. Blick in denselben. Zwischenzeit zwischen den einzelnen Versuchen 2 Min. und nachher noch etwa 8 Sec. Blick auf schwarzen Grund. Die Versuchszahlen gelten für je 1 Versuch, sind aber für Gelb und Hellgrün aus der doppelten Zahl Versuche abgeleitet. Reihenfolge: Blau, Gelb, Hellgrün, Roth, Dunkelgrün, Violet, Gelb, Hellgrün.

Glas	Gleichfarbe *A*		Complementärfarbe *B*	
	r	l	r	l
Roth	20	4	21	15
Röthlichgelb	14	8	20	15
Hellgrün	9	7	23	15
Dunkelgrün	16	16	16	5
Blau	21	15	12	8
Violet	20	4	17	4
	100	54	109	62

Tabelle VIII. (Nies)

Methode α) und β). Hinter einander angestellte Versuche desselben Tages (17. Nov.). Grauer Himmel. Reihenfolge: Dunkelgrün, Hellgrün, Blau, Violet, Röthlichgelb, Roth. Uebrigens wie bei Tabelle VII.

Glas	α				β			
	A		B		A		B	
	r	l	r	l	r	l	r	l
Roth	41	21	52	16	19	13	46	10
R.-Gelb	45	15	47	30	38	15	27	33
H.-Grün	46	4	46	22	43	17	45	40
D.-Grün	20	12	40	8	18	16	40	12
Blau	34	13	56	23	30	23	40	10
Violet	54	23	8	23	25	13	25	18
	240	88	276	122	173	107	223	123

Es ist merkwürdig, dass (eben so wie bei mir nach Tab. II) die Farbe in Summa im rechten Auge gerade noch einmal so lange als im linken steht, nämlich in Summa für VII und VIII r 1121, l 556, und dass am 17. Nov. (VIII) die Farbe (nach β) noch einmal so lange steht als am 31. Oct. (VII), ungeachtet die äusseren Versuchsumstände vergleichbar waren.

Tabelle IX. (v. Zahn)

v. Zahn sieht ebenfalls heller auf dem linken Auge; dieses Auge ist zugleich kurzsichtiger als das andre, auch pflegt er mit dem linken weisse Objecte mehr röthlich, mit dem rechten mehr grünlich zu sehen. An einem Versuchstage (13. Nov.) ward die grössere Helligkeit des linken Auges durch das Glas 795 beim Doppelbildsversuche noch nicht compensirt, durch 744 schon übercompensirt; an zwei andern Versuchstagen (17. und 21. Nov.) durch 744 oder 752 fast ganz, doch nicht ganz compensirt, durch 655 übercompensirt, wonach die Ungleichheit seiner Augen ungefähr von gleicher Grösse als bei Nies ist. Durch einen ähnlichen Versuch als bei Nies ward auch bei v. Zahn constatirt, dass bei 30 Sec. langem Blick beider Augen in den Himmel das linke hellere Auge weniger als das rechte dunklere ermüdet wird. v. Zahn bedient sich auch bei den Doppelbildsversuchen ungleichseitigen Doppeltsehens.

Methode α) und β). Die Versuche mit Blau, Dunkelgrün, Hellgrün, Violet in dieser Folge am 17. Nov., mit Roth und nochmals Blau, was ziemlich ähnliche Zahlen als am 17. gab (woraus das Mittel folgt) am 21. Nov. Grauer Himmel. 8 Sec. langer Blick in denselben. Zwischenzeit zwischen den einzelnen Versuchen 1½ Minute grösstentheils mit Augenschluss. So viel möglich suchte der Beobachter die Dauer der Nachfarben bis zur Wiederkehr der habituellen Ungleichheit der Färbung der Bilder zu bestimmen, was freilich keine grosse Schärfe zulässt. Folgendes sind jedenfalls die verzeichneten Zahlen. Bei Dunkelgrün ist den Zahlen vom Beobachter beigefügt, dass die Complementärfarbe sehr intensiv, bei Hellgrün und Violet, dass sie ziemlich intensiv war.

Glas	α				β			
	A		B		A		B	
	r	l	r	l	r	l	r	l
Roth	43	10	267	69	47	110	397	54
R.-Gelb	123	12	162	19	237	10	205	16
H.-Grün	30	1	15	30	181	8	32	31
D.-Grün	20	1	6?	8	208	15	18	30
Blau	14	0	17	8	61	14	41	9
Violet	10	4	234	71	28	30	201	5
	240	28	901	205	762	187	894	145

Beim Vergleich dieser Tabelle und der Nies'schen Tabelle sieht man bei sehr andern absoluten Werthen doch den Gang der Summenzahlen wesentlich einstimmig in beiden.

Resultate der Beobachtungen mit gleich hell sehenden Augen (Fechner und Grabau).

1) Die Dauer der Nachfarben ist je nach der Individualität äusserst verschieden; denn, ungeachtet Grabau blos 6 Secunden, ich 12 Secunden lang das Auge einseitig reizte, ist doch sowohl die Dauer der Gleichfarbe als Complementärfarbe, nach Methode α wie β, ausnehmend viel grösser bei Grabau als bei mir. In der That, stellt man die Resultate der Tabellen II (Fechner) und IV (Grabau) zusammen, von denen II für Beobachtungen bei leichtbedecktem, IV bei ganz trübem Himmel gilt, was noch einen gewissen Vortheil der Wirksamkeit für II begründen könnte, so findet man als Summe der Dauer für je 24 Versuche mit 6 Farbengläsern bei:

	A		B	
	α	β	α	β
Fechner	44	58	204	178
Grabau	484,5	581,7	644,7	632,5.

Man sieht nicht ohne Interesse (sofern sich dadurch beweist, dass solche Zählungen geeignet sind, Resultate ziehen zu lassen), dass das Verhältniss der Dauer, was die Farben für beide Beobachter nach α) haben, sich bei β) sehr approximativ wiederfindet, indem die Gleichfarbe *A* nach α 11 mal, nach β 10 mal so lange bei Grabau als bei mir stand, die Complementärfarbe *B* nach α) 3,1 mal nach β) 3,5 mal so lange bei Grabau als bei mir; zugleich aber sieht man, dass die Dauer der Gleich-

farbe in viel beträchtlicherem Verhältnisse, als die der Complementärfarbe grösser bei Grabau als bei mir ist; woraus folgt, dass die Dauer beider Nachfarben bei Verschiedenheit der Individualität nicht in einfacher Proportion mit einander zu- und abnimmt.

2) Nicht minder zeigen sich die Verhältnisse der Dauer für die verschiedenen Farben je nach der Individualität verschieden. So ist nach Vergleich der vorigen Tabellen die Reihenfolge der Dauer für die Gleichfarbe bei mir absteigend: Hellgrün, Dunkelgrün, Blau, Gelb, Violet, Roth; bei Grabau Roth, Hellgrün, Dunkelgrün, Blau, Violet, Gelb. Diese Reihenfolgen sind wegen zu geringer Zahl der Versuche nicht sicher; aber dass das Roth bei mir zuerst, bei Grabau zuletzt steht, überschreitet die Gränzen dieser Unsicherheit; indem ich dazu noch bemerke, dass das schwierige Erscheinen der Gleichfarbe von Roth nach Methode α) bei mir auch durch andre Versuche als die hier angeführten constatirt ist.

3) Die Dauer der Farben zeigt sich bei Grabau im rechten und linken Auge nahe gleich, nämlich addirt für α und β, Tab. IV und V.

	A	*B*
r	855,4	1023,1
l	730,3	964,0

Bei mir beträgt nach der Tabelle II, welche Versuche eines und desselben Tages enthält, die Dauer im linken Auge merklich genau die Hälfte der Dauer im rechten Auge; aber nach Tabelle I, worin Versuche verschiedener Tage zusammengefasst sind, findet vielmehr mehr Gleichheit zwischen r und l statt, und nach III, die jedoch nur wenig Beobachtungen zählt, überwiegt l über r. Diess ist unstreitig ein Beweis, dass meine Augen nach der Zeit verschiedener Stimmungen fähig sind.

4) Im Durchschnitt aller Farben zeigt sich bei Grabau wie bei mir die Complementärfarbe länger stehend als die Gleichfarbe, der Unterschied ist aber bei mir viel grösser als bei Grabau; und nach Beiden grösser bei Methode α als β. Eine eigenthümliche Ausnahme macht das blaue Glas, was bei Methode β selbst schon bei grauem Himmel geneigt ist, eine länger stehende Gleichfarbe als Complementärfarbe zu geben, vollens bei blauem Himmel, wo selbst bei Methode α sich ein Uebergewicht der Dauer für die Gleichfarbe herausstellen kann. Ausser Blau zeigt auch Grün eine, doch minder auffällige, Neigung eine überwiegende Dauer der Complementärfarbe mitzuführen.

Bei mir beträgt in Summa nach Tabelle II die Dauer der Gleich-

farbe 102, die der Complementärfarbe 382, bei Grabau nach Tabelle IV 1065,7 für die Gleichfarbe, 1277,2 für die Complementärfarbe.

Grabau hat in mehrfachen Fällen, wo die Complementärfarbe nicht länger stand, als die Gleichfarbe, bemerkt, dass sie doch anfangs intensiver war, aber verhältnissmässig schneller abnahm. Nicht immer aber konnte er eine grössere anfängliche Intensität der Complementärfarbe als Gleichfarbe constatiren.

5) Nach Grabau, wie nach mir bringt die Methode β durchschnittlich eine grössere Dauer der Gleichfarbe mit als Methode α, wogegen sich die Dauer der Complementärfarbe nach beiden Methoden durchschnittlich gleich bleibt. Der Unterschied betreffs der Gleichfarbe ist aber bei mir verhältnissmässig viel grösser als bei Grabau.

In der That, nehme ich für mich die Summenzahlen der zwei Tabellen II und III zusammen (in I fehlen Beobachtungen für β) und für Grabau die Summenzahlen von IV, so findet sich

	A		*B*	
	α	β	α	β
Fechner	48	101	261	253
Grabau	484,0	581,7	644,7	632,5.

6) Die Bläue des Himmels hat einen Einfluss auf die Nachfarben, welcher zwar für die meisten Farbengläser erst durch genauere vergleichende Versuche sicher zu ermitteln sein wird, bei blauem Glase aber entschieden dahin geht, die Dauer der Gleichfarbe in Verhältniss zu der der Complementärfarbe zu vermehren. Diess zeigt sich bei Vergleich der Zahlen für das blaue Glas in Tabelle II und III, deren erste für leicht bedeckten, die andere für schön blauen Himmel gilt, so wie der Zahlen in Tabelle VI, welche das Resultat einer grössern Zahl Versuche verschiedener Tage mit dem blauen Glase bei blauem und grauem Himmel zusammengestellt enthält. Sehr auffällig war im Laufe dieser Versuche folgende Erfahrung: An einem Tage fand Grabau bei stark bewölktem Himmel mit blauem Glase vor dem rechten Auge mit 6 Sec. langem Blick in den Himmel nach α in 9 aufeinanderfolgenden Versuchen (mit je 4 Min. Zwischenzeit) im Mittel 28,4 Sec. Dauer für die Gleichfarbe, 80,0 Sec. für die Complementärfarbe; der letzte von diesen 9 Versuchen gab 40 Sec. für die Gleichfarbe, 70 für die Complementärfarbe; um diese Zeit aber hellte sich der Himmel auf, und die

drei folgenden Versuche, welche als bei blauem Himmel angestellt verzeichnet sind, gaben

Gleichf. *A*	Compl. *B*
50″—70″	50″—70″
62″	15″
70″—80″	12″.

Auch ward die Gleichfarbe sichtlich sehr intensiv.

Grabau stellte auch einige vergleichende Versuche (bei trübem Himmel) über die Nachdauer der Farben an, je nachdem sie durch complementäre Gläser vor beiden Augen nach Methode *C* des vorigen Abschnitts, oder durch einseitige Farbenreizung, wie im jetzigen Abschnitte, nach α und β erzeugt waren, indem er dazu einmal das rothe und dunkelgrüne, ein andresmal das röthlichgelbe und blaue wählte. Die Nachfarben bei der zweiseitig-complementären Reizung waren anfangs ganz entschieden intensiver, nahmen aber verhältnissmässig so viel schneller ab, dass Grabau doch keine durchschnittlich längere Dauer derselben constatiren konnte.

Resultate der Beobachtungen mit ungleich hellen Augen (Nies und v. Zahn).

1) Sowohl für die Gleichfarbe als Complementärfarbe gilt übereinstimmend bei Nies und v. Zahn, dass sie länger in dem dunklern rechten als hellern linken Auge steht, fraglich ob wegen der leichtern Ermüdungsfähigkeit des rechten Auges, welche mit der grössern Dunkelheit in Verbindung stand, oder wegen der grössern Dunkelheit. Man hatte nämlich

	A		*B*	
	r	l	r	l
Nies (VIII)	413	195	499	245
v. Zahn (IX)	1002	215	1795	350.

2) Die Gleichfarbe *A* im rechten und die Complementärfarbe *B* im linken Auge stehen bei Nies zusammen merklich eben so lange als die Gleichfarbe im linken und Complementärfarbe im rechten Auge; nämlich man hat

Erste Summe nach α 362; nach β 458
Zweite „ „ „ 364 „ „ 493.

Bei v. Zahn findet sich diess für Methode β bestätigt, nicht so für α,

wo erste Summe nur merklich halb so gross als letztre ist. Nämlich man hat:

Erste Summe nach α 445; nach β 907
Zweite „ „ „ 929 „ „ 1081.

Inzwischen können die v. Zahn'schen Resultate wegen des störenden Färbungsunterschiedes der Augen überhaupt nicht für so sicher gelten.

3) Die Verschiedenheit in der absoluten Dauer der Nachfarbe und den Verhältnissen derselben je nach den Individualitäten bestätigt sich.

4) Es bestätigt sich ferner sowohl für α als β bei beiden Beobachtern, dass die Gleichfarbe durchschnittlich kürzere Zeit als die Complementärfarbe steht.

5) Es bestätigt sich auch bei v. Zahn, dass α eine kürzere Dauer als β für die Gleichfarbe, hingegen für die Complementärfarbe keinen erheblichen Unterschied giebt, indess bei Nies sich α und β weder in Betreff der Dauer der Gleichfarbe noch Complementärfarbe sehr unterscheiden.

Von vorstehenden Resultaten haben 1) und 2) in sofern eine gewisse Wichtigkeit, als sie beweisen, dass die Gleichfarbe und Complementärfarbe in beiden Augen nicht in entgegengesetztem Sinne sondern in demselben Sinne von gewissen Verhältnissen abhängen; dass also der Antagonismus ihrer Entstehungsweise sich nicht auf diese Abhängigkeitsverhältnisse überträgt.

Nies stellte auch einige vergleichende Versuche mit complementärgefärbten Gläsern, Röthlichgelb und Blau, vor beiden Augen nach Methode *C* des 13. Abschnitts an, und fand, dass jedesmal die Nachfarbe im rechten, d. i. dunklern, Auge länger als im linken stand, mochte sich das röthlichgelbe oder blaue Glas davor befunden haben.

XV.

Der seitliche Fensterversuch.

Der Versuch, welchen ich der Kürze halber mit obigem Namen bezeichne, bietet, so einfach er ist, doch ein mehrseitiges Interesse dar, ergänzt sich mit denen der vorhergehenden Abschnitte aus einem unten anzugebenden Gesichtspuncte, und ist bis jetzt noch nicht nach allen Beziehungen vollständig erklärt.

Man lege auf den am Fenster stehenden Beobachtungstisch ein weisses Feld auf schwarzen Grund — wie gewöhnlich wende ich dazu ein Quadrat von etwa $^1/_2$ bis $^3/_4$ Zoll Seite auf einem halben oder ganzen Bogen schwarzem Russpapiere an — stelle sich, anstatt wie sonst immer dem Fenster gegenüber, an die eine Seite des Tisches, beispielsweise mit der rechten Seite gegen das Fenster, fixire erst einfach mit beiden Augen das weisse Feld und schiebe dann ein Doppelbild desselben auseinander. Gleichen Erfolg hat es, wenn man bei der angegebenen Stellung gegen das Fenster eine schwarze Tafel, mit einem weissen Felde inmitten, vertical vor die Augen hält und das Doppelbild auseinanderschiebt; doch habe ich im Allgemeinen die erste Versuchsanordnung befolgt.

Das Auge, was bei der seitlichen Stellung gegen das Fenster dem Fenster näher ist, wird folgends stets mit *N*, das davon entferntere mit *E* bezeichnet. Es gilt nun Folgendes:

Das Bild in dem vom Fenster entfernteren Auge, dem Auge *E*, also bei ungleichseitigem Doppeltsehen das dem Fenster nähere, bei gleichseitigem das vom Fenster entferntere Bild, erscheint entschieden als das lichtere.

Um sich zu überzeugen, dass nicht eine zufällige Ungleichheit der Augen Schuld an dem Erfolge ist, braucht man blos von der einen auf die andre Seite des Beobachtungstisches hinüberzugehen; wobei die Augen ihre Lage zum Fenster verkehren; immer wieder wird es bei ungleichseitigem Doppeltsehen das dem Fenster nähere, bei gleichseitigem das vom Fenster entferntere Bild sein, was heller erscheint.

Der Erfolg dieses Versuches ist bemerkenswerth durch die Entschiedenheit und Sicherheit, mit welcher er eintritt. Nicht nur ist der Helligkeitsunterschied der beiden Componenten des Doppelbildes stets sehr auffällig, sondern ich habe ihn auch an den verschiedensten Tagen, auch in anders gelegenen Zimmern, immer in derselben Richtung wiedergefunden, und Alle, welche ich den Versuch wiederholen liess, Funke, Grabau, Koch, Ruete, Volkmann, Welcker u. A. haben ausnahmslos denselben Erfolg erhalten, nur dass Funke und Ruete bei ihrem gleichseitigen Doppeltsehen stets das vom Fenster abgekehrte Bild als das lichtere fanden, indess Volkmann constatirte, dass sich der Erfolg umkehre, wenn das ungleichseitige Doppeltsehen in gleichseitiges ver-

wandelt wird. Auch kann ich selbst diese Umkehr jederzeit bewirken, wenn ich (mit einiger Schwierigkeit) mittelst Blicks auf den vorgehaltenen Finger ein gleichseitiges statt ungleichseitiges Doppelbild erzeuge.

An einigen Tagen habe ich das Helligkeitsverhältniss beider Bilder nach dem S. 376 angegebenen Verfahren photometrisch zu bestimmen gesucht; wonach der Unterschied der Helligkeit grösser ist bei hellem als bei trübem Himmel; und bei hellem Himmel die Helligkeit des dunklern Bildes für meine Augen nur ungefähr 0,6 von der des hellern, oder noch etwas weniger, beträgt.

In der That an einem ziemlich hellen Tage bei nur etwas milchigem blauen Himmel, Morgens um 11 Uhr, ward die helle Componente merklich gleich der dunkeln, wenn ich das graue Glas 610 vor das Auge *E* hielt; 744 war zu hell; 744 . 752 = 558 zu dunkel. An einem andern Tage, Morgens bei noch mehr heiterm Himmel fand ich dasselbe. An einem Tage mit sehr schön blauem Himmel war 610 entschieden zu hell, und 558 schien entsprechend. Nachmittags jedoch, als ich eben aus dem Freien nach Hause kam, bei gleich blauem Himmel, war 610 schon zu dunkel und 744 ziemlich gut entsprechend; nach ¼ Stunde schien 610 entsprechend, und nach ¾ Stunde war auch 610 zu hell, und 558 schien wieder zu entsprechen. An ein paar Tagen mit ganz grauem Himmel war 744 ungefähr entsprechend.

Einen entsprechenden, doch nicht immer ganz so auffälligen, Erfolg als durch Auseinanderschieben des Doppelbildes beim Seitlichstehen gegen ein Fenster erhalte ich dadurch, dass ich, während ich das weisse Feld einfach mit beiden Augen fixire, abwechselnd das eine und andre Auge verdecke. Bei Verdecken des dem Fenster näheren Auges erscheint mir stets das Feld heller, als bei Verdecken des abgewendeten.

Es scheint mir sogar, obwohl nicht immer gleich deutlich, als ob sowohl die hellere Componente des Doppelbilds, als das hellere Bild, was bei Verdeckung eines Auges erhalten wird, ein wenig heller sei, als das mit beiden Augen gesehene binoculare Bild.

Zu Anfange meiner Versuche bin ich durch den Erfolg des seitlichen Fensterversuchs verführt worden, mein linkes Auge für dunkler als das rechte zu halten, was nach den krankhaften Verhältnissen meiner Augen leicht möglich war. Mein Arbeitspult steht nämlich an einer Seitenwand des Zimmers in einigen Ellen Entfernung vom Fenster, so dass beim Arbeiten meine linke Seite dem Fenster zugewandt und mithin das linke Auge heller beleuchtet als das rechte ist. Ich begann damit, die Beobachtungen, die in dieser Abhandlung mitgetheilt sind, an diesem Pulte anzustellen. Es zeigte sich constant, und findet sich noch jetzt am Pulte so wieder, dass die linke, also in das rechte Auge fallende, Com-

ponente des Doppelbildes heller war als die rechte, welchem ich die angegebene Deutung unterlegte. Als ich aber später die Versuche an dem, vor dem Fenster stehenden, Beobachtungstische, mit der Vorderseite gegen das Fenster, wiederholte, fielen die Resultate theils zweideutig, theils inconstant aus. Selbst wenn ich nach längerm Schluss der Augen zu den Versuchen übergehe, zeigt sich zwar manchmal noch hiebei ein kleiner Unterschied beider Componenten, der aber nicht immer dieselbe Richtung hat. Wonach ich keinen Anlass habe, die erst vermuthete Ungleichheit der Helligkeit meiner Augen zu statuiren.

Es fragt sich, worin liegt der Grund des Erfolges bei unserm Versuche? Zunächst scheint es, es sei kein Grund da, dass das Bild im einen Auge anders in Helligkeit erscheine als im andern. Denn es sind nicht zwei ungleich beleuchtete Objecte dazu da, sondern es ist nur ein in einer Weise beleuchtetes Object mit einer, in einer Weise beleuchteten, schwarzen Umgebung da, welche, wenn man das Object gerade vor sich hat, ihr Licht in gleicher Weise in beide Augen senden. Kurz jedes Auge hat vor sich ein gleich beleuchtetes weisses Feld mit einer gleich beleuchteten schwarzen Umgebung, deren Bild beiderseits um die Mitte der Netzhaut fällt. Auch erhält man keinesweges eine entsprechende Ungleichheit, als sie sich zwischen den Componenten des Doppelbildes zeigt, an zwei weissen Feldern, die man neben einander auf den schwarzen Grund legt, das eine näher nach dem Fenster zu als das andre, und die man ohne Auseinanderschieben eines Doppelbildes mit beiden Augen oder mit einem Auge bei Schluss des andern betrachtet; sie erscheinen gleich hell, während Auseinanderschieben ihres Doppelbildes sofort bei beiden den augenfälligsten Unterschied ihrer Componenten giebt.

Unstreitig kann hienach der Erfolg des seitlichen Fensterversuches nur darauf beruhen, dass beide Augen selbst seitlich verschieden erleuchtet sind, einerseits vom Fenster her, andrerseits vom Grunde des Zimmers her. Nur ist es auffälligerweise das Bild in dem mehr beschatteten Auge, welches als das hellere erscheint.

Folgende Versuche können noch mehr dienen, den Einfluss der seitlichen Beleuchtungsweise theils zu constatiren theils zu erläutern.

Man kann bei dem seitlichen Fensterversuche den Helligkeitsunterschied der Componenten des Doppelbildes aufheben oder sehr mindern, wenn man seitlich vom Auge nach dem Fenster zu einen Schirm oder auch blos die Hand hält, um das vom Fenster direct in das Auge fallende Licht abzuhalten. Im Momente aber, wo man den Schirm, die

Hand hebt, so dass das Seitenlicht vom Fenster in das Auge fällt, verdunkelt sich das eine und erhellt sich das andre der beiden Bilder in augenfälligster Weise. Eben so kann man bei Vorderstellung gegen das Fenster einen Helligkeitsunterschied beider Componenten bei Auseinanderschieben eines Doppelbildes sicher dadurch erzeugen, dass man das eine Auge mittelst Vorhaltens der Hand oder eines Schirms mehr beschattet als das andere. Das Bild in dem beschatteten Auge erscheint hiebei als das hellere.

Hiemit steht in scheinbarem Widerspruch, dass, wenn man ein graues Glas vor ein Auge nimmt, indess man das andre frei lässt, und bei Vorderstande gegen das Fenster das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinanderschiebt, stets die Componente in dem mit dem Glase bedeckten also minder beleuchteten Auge als die dunklere erscheint. Aber man darf nicht ausser Acht lassen, dass, wenn man mit einem grauen Glase vor einem Auge ein Doppelbild auseinanderschiebt, das weisse Object in diesem Auge durch das graue Glas mit verdunkelt wird, wogegen beim seitlichen Fensterversuch ohne graues Glas das Object mit unverminderter Helligkeit in das mehr beschattete Auge scheint; wonach die Umstände beidesfalls nicht dieselben sind.

Fast immer findet man an den Componenten des auseinandergeschobenen Doppelbildes bei dem seitlichen Fensterversuche Färbungsunterschiede, die ebenfalls mit dem Beleuchtungsunterschiede zusammenhängen. Bei hellem Himmel scheint das Phänomen des Färbungsunterschiedes constant zu sein, indem nicht nur ich selbst, sondern alle meine Mitbeobachter, auch in andern Zimmern als dem meinigen, hiebei das dunklere Bild, also je nach ungleichseitigem oder gleichseitigem Doppeltsehen das vom Fenster entferntere oder demselben nähere blau, oft sehr schön blau, sahen, indess das hellere entweder weiss oder, und zwar gewöhnlich, etwas röthlich oder gelbröthlich erscheint, doch immer schwächer farbig als das blaue. Wechselt man mit gleichseitigem und ungleichseitigem Doppeltsehen, so wechselt auch die Lage der Färbungen. Wenn hingegen der Himmel ganz trübe ist, erhalte ich nur eine wenig intensive und vielmehr blaugrünliche oder blos grünliche als blaue Färbung des dunkleren Bildes.

Es macht einen grossen Unterschied in der Deutlichkeit der Färbung des dunkleren Bildes, ob man dieses oder das helle fixirt. Wenn ich unmittelbar beim Auseinanderschieben des Doppelbildes das dunk-

lere, vom Fenster abliegende, fixire, so erscheint es mir nie lebhaft gefärbt, sondern entweder rein grau, oder ein wenig röthlichgrau, oder bei schön blauem Himmel etwas bläulichgrau; ohne dass ich aber von einer entschiedenen Färbung sprechen kann. Auch ändert sich diess nicht, wenn ich die Fixation länger unterhalte. So wie ich aber den Fixationspunct auf das helle Bild oder gar noch darüber hinaus mehr nach dem Fenster zu verlege, wobei mir die Dunkelheit des andern Bildes etwas zuzunehmen scheint, so stellt sich bei blauem Himmel sofort die entschieden blaue Farbe, bei grauem Himmel die schwach grünliche Farbe ein. Unterhalte ich nun die Fixation des hellen Bildes oder eines Puncts noch jenseits einige Zeit, z. B. 20 Sec., so erscheint nachher auch, wenn ich mich mit der Fixation zum hellen Bilde zurückwende, dieses je nach der äussern Beleuchtung sehr schön und haltbar blau oder blaugrün oder grün, und nicht minder wird durch mehrmaliges Hin- und Herwenden des Blicks die Farbe bald haltbar.

Diesen Einfluss der Fixationsweise auf das Deutlicherwerden der blauen Färbung fanden auch Dove, Grabau und Zöllner bestätigt, und nicht minder auffällig, als ich selbst.

Dove, Grabau und ich haben ungleichseitiges Doppeltsehen; Funke und Hankel, welche gleichseitiges haben, sahen das hier dem Fenster nähere blaue Bild in von einander unabhängigen Versuchen auffallend lichter werden (das Blau aufleuchten, wie sich Funke ausdrückte), wenn die Fixation vom blauen auf das andre Bild gewandt wurde, welches Funke weiss, Hankel röthlich sahe. Funke erklärte sich zugleich für eine damit eintretende lebhaftere Färbung des Blau; Hankel und Ruete (die ich wegen der Helligkeitsverhältnisse nicht befragt habe) konnten eine zunehmende Färbung hiebei nicht entschieden erkennen. Zöllner aber fand, wenn er mit gleichseitigem und ungleichseitigem Doppeltsehen wechselte, den Vortheil des indirecten Sehens für das Deutlicherwerden der Färbung beidesfalls gleich gross.

Da in diesen Angaben noch etwas Schwankendes ist, so verdienen die Versuche darüber eine Wiederholung.

Es schien mir von Interesse, die Versuche von Jemand wiederholen zu lassen, bei welchem ein starker natürlicher Helligkeitsunterschied beider Augen statt findet. Nies, der nach den S. 505 gegebenen Bestimmungen auf dem linken Auge erheblich heller sieht, und zwar leichter ungleichseitiges als gleichseitiges Doppeltsehen erzeugt, aber doch auch mit gleichseitigem zu operiren ver-

mag, erklärte Folgendes zu finden: (U bedeutet ungleichseitiges, G gleichseitiges Doppeltsehen, R Stehen mit der rechten, L mit der linken Seite gegen das Fenster, r. B. und l. B. rechtes Bild und linkes Bild nach der Lage wie die Bilder äusserlich erscheinen. Die Versuche wurden bei leichtbedecktem Himmel angestellt. Das eine Bild erschien bläulich, das andre röthlich)

	Erscheinung, wenn folgendes Bild fixirt wird		
	Keins vorzugsweise.	Das bläuliche.	Das röthliche.
G. R.	Das r. B. bläulich, dunkler, das l röthlich, heller.	Beide Farben werden deutlicher und heller.	Beide Farben gehen verloren, das bläuliche wird dunkler, das röthliche heller.
G. L.	Das r. B. röthlich, heller, das l bläulich, dunkler.	Die Farben verschwinden fast ganz, das bläuliche B. wird heller, das röthliche dunkler.	Beide Farben werden sehr deutlich, besonders das bläuliche, beide heller.
U. R.	Das l. B. bläulich, dunkler.	Die Farben verschwinden fast ganz, das röthliche B. wird viel heller.	Die bläuliche Farbe wird intensiver, das röthliche B. bleibt aber heller.
U. L.	Das l. B. röthlich, dunkler.	Die Farben werden deutlicher, das bläuliche heller als das röthliche.	Fast kein Farbenunterschied, fast kein Helligkeitsunterschied, das bläuliche eher heller.

Hat sich der Farbenunterschied bei Stellung mit einer Seite gegen das Fenster intensiv entwickelt, und man stellt sich rasch um, mit der andern Seite gegen das Fenster, so findet man die Farbe manchmal noch ein paar Augenblicke an dem Bilde in demselben Auge haften, aber immer schnell verschwindend und bei Fixation des andern Bildes in den entgegengesetzten, der neuen Lage gegen das Fenster gemässen, übergehend.

Wende ich zu dem seitlichen Fensterversuche statt eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde ein schwarzes auf weissem Grunde an, so erhalte ich keine constanten Erfolge mehr hinsichtlich des Helligkeitsunterschiedes; sondern nach Umständen kann das dem Fenster nähere oder das entferntere tiefer schwarz erscheinen, indess das andre mit einem weisslichen Scheine übergossen scheint. Namentlich ist dasjenige Bild geneigter, mit tieferem Schwarz zu erscheinen,

welches ich fixire, so dass sich bei abwechselnder Fixation das Verhältniss der Tiefe leicht umkehrt, indess ich bei einem weissen Object auf schwarzem Grunde keine Umkehr des Helligkeitsunterschiedes der Componenten auf diese Weise bewirken kann. Nicht selten zeigt bei schwarzem Object auf weissem Grunde das Bild, welches dem, dem Fenster näheren Auge angehört, also bei mir das vom Fenster entferntere, einen complementären röthlichen Stich zur Farbe der äusseren Himmelsbeleuchtung, indess das andre rein schwarz ist.

Nachdem die Umstände des Versuches und die Abhängigkeit des Erfolges von der ungleichen Beleuchtung der Augen im Allgemeinen constatirt sind, fragt sich: 1) wie kann die hellere Beleuchtung eines Auges das Bild darin verdunkeln, 2) wovon hängt der Farbenunterschied der Bilder ab.

Was das Erste anlangt, so bot sich mir zunächst der Gedanke dar, dass das stärker erleuchtete Auge stärker ermüdet ist, und die ihm angehörige Componente daher minder hell sieht. In der That haben die, durch diesen Gedanken zuerst angeregten, Versuche des 10. Abschnitts gelehrt, dass durch ungleiche Ermüdung der Augen, wo sie statt hat, Helligkeitsunterschiede wie die beobachteten sehr wohl hervorgehen können. Auch lässt sich durch absichtliche vorherige Ermüdung des vom Fenster abgekehrten Auges vor dem seitlichen Fensterversuch der Erfolg desselben leicht umkehren, indem man nämlich mit diesem Auge frei, unter Schluss des andern, erst eine Zeit lang in den Himmel blickt, ehe man das Doppelbild auseinanderschiebt. Dann erscheint eine Zeit lang nicht das Bild in dem, vom Fenster abgewandten, sondern demselben zugewandten, Auge als das hellere; und erst allmälig kehrt sich der Erfolg in den normalen um, wie nicht nur ich selbst, sondern auch Funke, Grabau und Volkmann constatirt haben.

Dennoch kann der Erfolg des seitlichen Fensterversuches nicht von Ermüdung abhängen. Denn sollte es der Fall sein, so müsste die Ungleichheit der Componenten des Doppelbildes erst allmälig bei seitlichem Stande am Fenster spürbar werden; diess ist aber nicht der Fall; sondern, so wie man sich seitlich an das Fenster stellt, ist der Erfolg der Ungleichheit sofort und entschieden in der von der Stellung abhängigen Richtung da.*) Auch kann man zum Versuche so übergehen, dass man mit geschlossenen Augen an das Fenster tritt, erst nach längerm Schluss

*) Ob er mit verlängerter Dauer der Betrachtung etwas wächst oder nicht, wage ich nicht zu entscheiden.

dieselben öffnet, indess sie auf den schwarzen Grund mit dem weissen Felde gerichtet sind, und sofort das Doppelbild auseinanderschiebt. Der Erfolg wird auch sofort in der angegebenen Richtung eintreten, ungeachtet hiebei eine directe Ermüdung der Netzhautstelle, auf welche die dunkle Componente fällt, durch das vom Fenster einfallende Licht nicht statt finden kann, da von vorn herein nicht das Bild des lichten Fensters und der dadurch sichtbaren lichten Gegend, sondern das Bild des Objects auf dem schwarzen Grunde die Stelle trifft, deren Ermüdung in Anspruch zu nehmen wäre.

Man könnte daran denken, der Erfolg hinge daran, dass sich die Pupille des stärker beleuchteten Auges mehr zusammenziehe, und demgemäss dieses Auge ein minder helles Bild gebe. Allein schon durch frühere Versuche Andrer ist ermittelt, dass die Pupillen beider Augen trotz ungleicher Beleuchtung sich immer zur Gleichheit accommodiren. Auch vermochten Volkmann und Heidenhain beim seitlichen Fensterstande in meinen Augen keinen Unterschied der Pupillenweite wahrzunehmen.

Nach Allem kann man hier unstreitig nur ein Contrastphänomen sehen. Das dem Fenster nähere Auge sieht das weisse Object auf dem schwarzen Grunde in Contrast mit dem hellen Himmel und der lichten Gegend draussen; das andre mit dem verhältnissmässig dunkeln Grunde des Zimmers. In der That braucht man nur beim seitlichen Fensterstande wechselnd das eine und andre Auge zu schliessen, um zu gewahren, dass das eine Auge ein verhältnissmässig helles Gesichtsfeld nach dem Fenster zu, das andre ein verhältnissmässig dunkles nach dem Zimmer zu für sich hat, wozu noch ersterseits die beleuchtete letzterseits die dunkle Nasenseite eine Ergänzung von der Gegenseite fügen. Schiebt man nun das weisse Doppelbild auf dem vor dem Auge liegenden schwarzen Grunde auseinander, so tritt die Componente in dem Auge *E* in Contrast mit einem übrigens dunklern, die Componente in dem Auge *N* in Contrast mit einem hellern Gesichtsfelde.

Diese Erklärung setzt voraus, dass das Bild in jedem Auge mit dem Grunde dieses Auges insbesondere in Contrast treten, und danach in seiner Helligkeit modificirt erscheinen könne, was nicht statthaft wäre, wenn Eindrücke, die sich binocular decken, äquivalent solchen wirken, die auf einer identischen Stelle zusammentreffen, da der lichte Seitengrund des einen Auges sich mit dem dunklen des andern Auges binocu-

lar deckt, und mithin nur ein gemeinsames aber nicht verschiedenes Contrastverhältniss dazu bestehen könnte. Es wurde aber schon durch die im 7. Abschnitt angeführten Versuche bewiesen, dass wirklich der Contrast sich für jede Netzhaut insbesondre geltend machen könne; der jetzige Versuch giebt also hiezu nur eine Bestätigung in andrer Form.

Die Erklärung setzt zweitens voraus, dass wirklich Weiss durch Contrast bei seitlich dunklerem Grunde heller erscheint, als bei seitlich hellerm Grunde. Nun besteht schon die allgemeine Annahme dafür, dass an einander gränzendes Weiss und Schwarz sich durch den Contrast heben, mithin Weiss neben Schwarz heller als neben Weiss erscheint. Jedoch haben wir in Rücksicht zu ziehen, dass die weissen Componenten des Doppelbildes bei unserem Versuche beide unmittelbar von demselben schwarzen Grunde umgeben werden, also nicht an ungleiche Helligkeit gränzen, sondern solche erst in einer gewissen Entfernung neben sich haben, und es liess sich in Frage stellen, ob eine Wirkung des Contrastes auch unter diesen Umständen, so zu sagen aus der Ferne, sich geltend machen kann, wofür ich bisher noch keinen Nachweis finde. Ist es der Fall, so muss man auch ohne Doppelbild den Fall herstellen können. In der That kann diess geschehen. Man lege z. B. ein kleines weisses Feld auf schwarzen Grund, und schiebe dann von beiden Seiten zwei weisse Papierbogen herbei. So wie es geschieht, sieht man das weisse Feld sich verdunkeln, wenn schon die weissen Bogen nicht bis zur Berührung mit dem weissen Felde kommen, und bei Zurückziehen der weissen Bogen sich wieder erhellen. In einer künftigen Abhandlung über Contrastphänomene weise ich dasselbe noch durch abgeänderte Versuchsweisen nach. Noch ausserdem kann man verlangen, dass sich der Erfolg des seitlichen Fensterversuchs auch bei Vorderstellung gegen das Fenster reproduciren lasse, wenn man hiebei die Contrastverhältnisse jenes Versuchs reproducirt. Auch diess kann wie folgt geschehen.

Man nimmt vor ein Auge eine inwendig weisse, vor das andre eine inwendig schwarze Röhre (einen weissen und einen schwarzen zusammengerollten Papierbogen), sieht damit bei Vorderstellung gegen das Fenster nach einem weissen Felde auf schwarzem Grunde, indem man die Röhren so richtet, dass die dadurch erscheinenden hellen Flecke sich superponiren, und das weisse Feld mittenhinein fällt. Schiebt man nun ein Doppelbild des weissen Feldes auseinander, so findet man den Hel-

ligkeitsunterschied der Bilder, der sich beim seitlichen Fensterversuch zeigt, wieder. Das durch die schwarze Röhre gesehene Bild erscheint erheblich heller als das durch die weisse gesehene. Auch hier zeigt sich das dunklere Feld etwas farbig; doch finde ich es bei trübem wie hellem Himmel meist vielmehr etwas röthlichblau als blau oder grün, indess das andre lichtweiss ist, oder einen Stich ins Grünlichgelbe hat. Einen deutlichen Unterschied je nach der Richtung der Fixation kann ich hier nicht finden.

Man kann bei diesem Versuche auch die weisse Röhre weglassen und den Versuch anstellen, während man blos die schwarze vor einem Auge hat; man erhält noch dasselbe Resultat.

Auch beim seitlichen Fensterversuche kann man den Unterschied zwischen dem hellen und dunkeln Bilde beträchtlich dadurch verstärken, dass man eine inwendig schwarze Röhre vor das vom Fenster entfernte Auge nimmt; indem das durch die Röhre gesehene Bild hiebei noch auffällig lichter wird, wogegen der Unterschied zweideutig wird, wenn man die Röhre vor das dem Fenster nähere Auge nimmt.

Während der Helligkeitsunterschied der Bilder beim seitlichen Fensterversuch nach Vorigem wohl seine Erklärung findet, gestehe ich, eine zulängliche Erklärung für den Farbenunterschied bisher nicht haben finden zu können.

Für den ersten Anblick scheint der Versuch in dieser Hinsicht auf dasselbe Princip zurückführbar, als die Versuche des vorigen Abschnittes, wo man ein Doppelbild auseinanderschiebt, während man ein Farbeglas vor nur einem Auge *B* hat. Das Bild im Auge *B* erscheint hier von der Farbe des Glases. Die Färbung bei dem seitlichen Fensterversuche tritt nämlich bemerktermassen am intensivsten und sichersten ein, wenn der Himmel hell also blau ist und ist dann selbst blau. Es scheint also, dass das Farbeglas hiebei durch die vorzugsweise blaue Beleuchtung des Auges *N* ersetzt wird, Wenn ich aber auch bei ganz grauem Himmel eine schwach grünliche Färbung des Bildes im Auge *N* erhielt, liess sich diess bei meinen, zur Sommerzeit angestellten, Versuchen darauf schieben, dass durch das Fenster meines Zimmers ausser dem Lichte des Himmels noch eine ziemliche Menge grünes Licht von einem Garten mit grünen Bäumen fällt. *)

*) Vom Zimmer her kann sich keine entschiedene Farbe geltend machen, da die

Inzwischen treten dieser Erklärung wichtige Schwierigkeiten entgegen.

Bei dem Versuche mit einem blauen Farbenglase vor einem Auge muss natürlich das eine Bild blauer als das andre, oder vielmehr allein blau erscheinen, weil das Licht des weissen Feldes blos in diesem Auge vermöge Durchganges durch das Farbeglas gebläut wird. Aber bei dem seitlichen Fensterversuch fällt dasselbe, vom Himmel blau beleuchtete, weisse Feld gleichmässig in beide Augen; und es ist also nicht derselbe Grund als bei jenem Versuche vorhanden, dass es in einem Auge blauer als im andern erscheine. Wenn aber der seitliche Theil des Gesichtsfeldes in dem Auge *N* doch blauer erleuchtet ist, als der andre, so schiene um so mehr eine complementäre Wirkung hievon auf das Bild in diesem Auge zu erwarten, als sich betreffs der Helligkeit eine Contrastwirkung darauf geltend macht; wogegen doch thatsächlich das Gegentheil statt findet.

Es stimmt ferner nicht zur angegebenen Erklärung, dass Zöllner eines Tages das Bild in dem Auge *N* sehr intensiv blau (das andre zugleich röthlich), selbst bei vollkommen grauem Himmel fand; und dass ich selbst die grünliche Färbung dieses Bildes bei grauem Himmel noch ganz eben so gut erhalte, wenn ich mich in ein anders gelegenes Zimmer begebe, wo gar kein grünes Licht durch das Fenster einfällt;*) so dass der Unterschied zwischen Blau- und Grünfärbung des Bildes im Auge *N* je nach dem Zustande des Himmels bei mir vielmehr auf einem Unterschiede der Helligkeit als Farbe der Beleuchtung zu beruhen scheint.

Ferner erklärt sich nicht, was ich doch entschieden finde, dass, wenn ich die Fixation des hellen Bildes längere Zeit unterhalten habe, die Färbung auch noch bleibt, wenn ich das Auge dann nach dem dunklen Bilde zurückwende.

Hienach bleibt mir der Grund der Färbungserscheinungen noch unklar. Auch mehrere Nebenversuche, die ich anstellte, um vielleicht demselben auf die Spur zu kommen, haben zu keiner Aufklärung geführt.

Sehe ich mit einem grauen Glase vor einem Auge, dem andern

nur hellbläulich getünchten Wände des Zimmers grossentheils noch mit Repositorien mit Büchern von allen Farben verdeckt sind.

*) Dasselbe finde ich so eben noch in meinem gewöhnlichen Beobachtungszimmer, da ich jetzt zur Winterszeit, wo alles Grün verschwunden ist, die Beobachtungen wiederhole.

frei, ein weisses Feld auf schwarzem Grunde an, und schiebe bei Vorderstellung gegen das Fenster ein Doppelbild auseinander, so zeigt sich auch bei längerer Fixation des hellen Bildes nicht das Geringste von der Himmelsfärbung an dem dunkeln Bilde. Sehe ich bei Vorderstellung gegen das Fenster mit einem Auge bei Schluss des andern durch den Spalt zwischen zwei nahe zusammengehaltenen gleichartigen Farbengläsern, mit dem andern frei auf ein weisses Feld auf schwarzem Grunde und schiebe ein Doppelbild auseinander, so erhalte ich eben so wenig eine Gleichfärbung des Glases an dem Bilde in dem Auge mit dem Farbenglase, so lange dasselbe nicht durch das Glas selbst gesehen wird.

Auch dadurch habe ich den Färbungsunterschied des seitlichen Fensterversuchs nicht reproduciren können, dass ich den Versuch S. 520 statt mit einer inwendig schwarzen und einer inwendig weissen Röhre, mit einer inwendig schwarzen und einer inwendig farbigen Röhre anstellte. Manchmal, obwohl nicht immer, erhalte ich zwar hiebei Complementärfarben am Doppelbilde, aber das Bild, was durch die Farbenröhre gesehen wird, erscheint complementär dazu, nicht gleichfarbig damit.

Endlich haben auch Versuche Abends mit Lampenlicht, zum Ersatz der seitlichen Fensterbeleuchtung angewandt, keinen Aufschluss und überhaupt ein vom seitlichen Fensterversuch sehr abweichendes Resultat gegeben. Stelle ich die Lichtquelle (eine Stearinkerze oder Studirschiebelampe mit Milchglasschirm) seitlich von dem schwarzen Grunde mit dem weissen Felde, was ich betrachte, und schiebe ein Doppelbild auseinander, indess ich die Lichtquelle zur Seite, das weisse Feld vor mir habe, so zeigt sich das, der Lichtquelle nähere, Bild stets rothgelblich, das andre eben so entschieden blaugrünlich, und jedes bleibt so, wenn ich ein Auge verdecke oder erscheint gleich so, wenn ich diess bei einfach mit beiden Augen fixirtem Bilde vornehme. Einen entschiedenen Helligkeitsunterschied habe ich dabei nicht gefunden. Der Erfolg bleibt wesentlich derselbe, mag ich mich so seitlich gegen das Licht stellen, dass blos ein Auge oder dass beide Augen es sehen. Hier erscheint also das Bild in dem von der Lichtquelle entfernteren Auge von der Farbe der Lichtquelle; die Complementärfarbe tritt am andern Bilde entschieden auf, und der bei dem Versuche mit der Tagesbeleuchtung so entschiedene Helligkeitsunterschied der Bilder fehlt. Unstreitig kann der Grund dieser abweichenden Erfolge nur darin liegen, dass ein

begränztes Bild der Lichtquelle blos in das eine oder ungleich in beide Augen fällt, indess bei dem seitlichen Fensterversuche eine allgemeinere Beleuchtung seitlich einwirkt.

In den beiden folgenden Abschnitten kommen noch einige Thatsachen vor, welche mit den Färbungserscheinungen beim seitlichen Fensterversuch in Bezug stehen mögen, ohne dass diese Beziehung schon hinreichend klar ist.

Ungeachtet ich nach Vorstehendem den seitlichen Fensterversuch überhaupt noch nicht für vollständig aufgeklärt ansehen kann, lässt sich doch im Allgemeinen sagen, dass er sich mit den Versuchen der vorigen Abschnitte aus folgendem Gesichtspuncte ergänzt. Bei diesen ward der Erfolg beobachtet, den es hat, wenn beide Augen überhaupt, auf correspondirenden oder disparaten Stellen, ungleich ermüdet, ungleich erleuchtet, von ungleichen Farben afficirt sind. Setzen wir jetzt den Fall, es sei in beiden Augen ein gewisser correspondirender Theil beider Netzhäute gleich erleuchtet, der übrige aber ungleich erleuchtet, und fragen nach der verschiedenen Erscheinung, welche die Bilder eines Objectes auf dem gleich beleuchteten Theile jeder Netzhaut dadurch annehmen, dass derselbe mit einem ungleich beleuchteten in Verbindung steht, so haben wir wesentlich den Fall des seitlichen Fensterversuchs.

XVI.

Erscheinungen, die aus dem Zusammenwirken des Contrastes und der heterogenen Deckung hervorgehen.

Nach den Versuchen des vorigen Abschnitts erscheint auf jeder Netzhaut insbesondre ein weisses Feld heller oder dunkler, je nachdem es in Contrast mit einer dunklen oder hellen Umgebung tritt. Nach den Versuchen des 7. Abschnitts erscheint es heller oder dunkler, je nachdem es mit einem hellen oder dunklen Grunde im andern Auge zur Deckung gebracht wird. Combinirt man beide Ursachen der Helligkeitsabänderung für ein Feld auf der einen Netzhaut im Sinne der Steigerung der Helligkeit, auf der andern gleichzeitig für ein gleiches und gleich beleuchtetes Feld im Sinne der Steigerung der Dunkelheit, so können sehr auffällige und selbst scheinbar ganz anomale Helligkeitsunterschiede zwischen beiden Feldern dadurch entstehen, die nicht ungeeig-

net sind, einerseits zur Constatirung, andrerseits zur Erläuterung der Thatsache jener Ursachen subjectiver Helligkeitsabänderungen beizutragen.

Einige hieher gehörige Versuche sollen im Folgenden mitgetheilt werden.

a) Die Scheidewandsversuche.

Man stellt sich wie zu dem seitlichen Fensterversuch an das Fenster und legt vor sich einen schwarzen, grauen oder weissen Grund ohne ein begränztes Feld darauf.*) Derselbe wird in gewöhnlicher Weise mit beiden Augen betrachtet gleichmässig schwarz, grau, oder weiss, und nur bei grösserer Ausdehnung ein wenig lichter nach dem Fenster zu erscheinen. Jetzt nehme man eine auf einer Seite weisse auf der andern schwarze Papptafel, oder auch einfach einen Bogen glanzloses Russpapier, und halte diesen Schirm mit der weissen Seite nach dem Fenster, was die Normalstellung des Schirms heisse, so als Scheidewand zwischen beide Augen, dass das eine nur den vom Fenster entfernten Theil *E*, das andre den dem Fenster näheren *N* des Grundes erblickt,**) ohne aber die Scheidewand ganz bis auf den Grund aufzusetzen, um den Zutritt des Lichts zur abgewandten Seite des Grundes nicht zu sehr aufzuheben. Jetzt sollte man erwarten, dass der Theil des Grundes *N* heller als *E* erscheint. Denn *N* liegt als dem Fenster näher günstiger für die directe Beleuchtung, und von der weissen Seite des Schirms wird noch etwas Licht dahin reflectirt, hingegen von *E* durch den Schirm etwas Licht abgehalten. Aber umgekehrt erscheint *E* unvergleichlich heller als *N*. Dieser Unterschied verschwindet sofort, wenn man die Scheidewand zwischen den Augen entfernt, und nimmt ab, wenn man die Scheidewand umwendet, so dass die schwarze Seite nach dem Fenster gekehrt ist.

*) Auch kann man alle drei Arten des Grundes auf einmal hinter einander legen, um die Verhältnisse auf allen dreien zugleich zu beobachten.

**) Auch die an Stirn und Nase gelegte Hand als Scheidewand zwischen beiden Augen giebt wesentlich denselben Erfolg, indem die vom Fenster her beleuchtete Seite derselben die weisse Seite, die beschattete die schwarze Seite des Schirms vertritt; nur kann man den Erfolg der Umkehrung des schwarzen und weissen Schirms nicht damit zeigen, und ein Schirm von grösserer Ausdehnung mit stärkerm Gegensatz der Flächen giebt die Erfolge auffälliger.

Man kann den schon ohnehin sehr auffälligen Erfolg noch dadurch verstärken, dass man bei der Normalstellung des Schirms eine inwendig schwarze Röhre vor das Auge nimmt, was nach *E* sieht, indess sich der Erfolg umkehrt oder sehr schwächt, wenn man sie vor das nach *N* blickende Auge nimmt.

Bei dem Scheidewandsversuche ohne Röhre sieht man zwischen dem Theile *E* und *N* des Grundes, welche blos mit einem Auge erblickt werden, im Allgemeinen noch einen Streifen *Z*, welcher mit beiden Augen erblickt wird. Dieser ist bei der Normalstellung der Scheidewand von einer mittlern Helligkeit zwischen der, die auf *E* und *N* erscheint. Kehrt man aber die Scheidewand um, so dass die schwarze Seite nach dem Fenster gewandt ist, so wird bei einem weissen Grunde *Z* heller, bei einem schwarzen dunkler als *E* und *N* erscheinen.

Legt man bei Normalstellung der Scheidewand unter Anwendung eines schwarzen Grundes auf jede Seite desselben ein gleiches weisses Feld, so wird man zwischen dem auf *E* und *N* liegenden Felde eine ganz ähnliche Ungleichheit der Helligkeit wahrnehmen, als zwischen den Componenten des Doppelbildes bei dem einfachen seitlichen Fensterversuch ohne Scheidewand, nur dass für den, der ungleichseitig doppelt sieht, Dunkel und Hell ihre Lage zum Fenster in der Erscheinung verkehrt geben, indem bei unserm jetzigen Scheidewandsversuche stets das dem Fenster nähere weisse Feld als das dunklere erscheint, indess bei dem seitlichen Fensterversuch die entferntere Componente. Bei blauem Himmel erscheint auch das dunklere Bild auf *N* blau, wenn man das Auge dieser Seite nach dem hellen Bilde der andern Seite *E* richtet, ungeachtet dieses nicht von diesem Auge erblickt werden kann, wogegen bei Fixation des Bildes auf *N* mit dem Auge dieser Seite keine Farbe erscheint.

Unter Anwendung eines grauen Grundes kann man die seitliche Fensterbeleuchtung bei den Scheidewandsversuchen durch einen weissen Nachbargrund, die dunklere vom Zimmer her durch einen schwarzen Nachbargrund, unter Vorderstellung gegen das Fenster wie folgt ersetzen.

Man legt bei Vorderstellung gegen das Fenster vor sich einen grauen Bogen, überdeckt ihn auf einer Seite mit einem weissen, auf der andern mit einem schwarzen, so dass ein freies Mittelfeld bleibt, und stellt nun eine auf der einen Seite weisse, auf der andern Seite schwarze

Tafel vertical auf die Mitte des grauen Mittelfeldes so auf, dass es in eine rechte und linke Hälfte dadurch zerfällt, indem man normalerweise die schwarze Seite der Tafel nach dem schwarzen Bogen wendet. Sieht man jetzt mit einem Auge links, mit dem andern rechts von der Scheidewand, so sieht man die durch die Scheidewand getheilten Hälften des grauen Mittelfeldes in der auffälligsten Weise in Helligkeit verschieden; die Hälfte zwischen dem horizontalen und verticalen Schwarz, welche hier als *E* auftritt, ganz licht, die zwischen dem horizontalen und verticalen Weiss, welche als *N* auftritt, ganz dunkelgrau. Wendet man die Scheidewand um, so wird der Unterschied zweideutig.

Man erhält Unterschiede von derselben Richtung, nur schwächer, wenn man die von einer Seite weisse von der andern schwarze Tafel als Scheidewand auf dem Grau anwendet, ohne dasselbe seitlich mit Schwarz oder Weiss zu überlegen, oder wenn man, während diese Ueberlegung statt findet, eine auf beiden Seiten schwarze, oder auf beiden Seiten weisse Tafel als Scheidewand anwendet.

Der Erfolg dieser Versuche ist so zu deuten. Legen wir den Fall der Vorderstellung gegen das Fenster mit grauem, seitlich mit Schwarz und Weiss belegtem Grunde und Normalstellung der Scheidewand hiebei unter, so wirken der Contrast und die heterogene Deckung zusammen, *E* heller als *N* erscheinen zu lassen; erstens der Contrast des Grau einerseits mit der schwarzen, andrerseits mit der weissen horizontalen und verticalen Umgebung in jedem Auge für sich; zweitens die binoculare Deckung des Grau *E* mit der weissen, des Grau *N* mit der schwarzen Fläche der Scheidewand. Denn, wie leicht zu erachten, und durch abwechselnden Schluss des einen und andern Auges zu constatiren, projicirt sich, während *E* direct vom Auge seiner Seite gesehen wird, im andern Auge das Weiss der Scheidewand eben dahin; und so umgekehrt mit *N* und dem Schwarz der Scheidewand. Unter Weglassung der schwarzen und weissen seitlichen Ueberlage des Grau bei Normalstellung der Scheidewand schliesst man die erste Ursache zur Hälfte aus, und bringt letzte vorzugsweise ins Spiel; durch Anwendung einer auf beiden Seiten weissen oder schwarzen Scheidewand unter Zuziehung der seitlichen weissen und schwarzen Ueberlage schliesst man die letzte Ursache aus und bringt die erste allein ins Spiel.

Der Einfluss der letzten Ursache ist an sich evident. Dass aber die Contrastwirkung Antheil hat, beweist sich nicht nur dadurch, dass auch

bei einem auf beiden Seiten weissen, wie auf beiden Seiten schwarzen Schirm die Differenz der Helligkeit von E und N, nur in vermindertem Grade, statt hat, sondern auch dadurch, dass der graue Bogen mit der schwarzen und weissen seitlichen Ueberlage bei Vorderstellung gegen das Fenster ohne alle Scheidewand in der Nähe der schwarzen Ueberlage erheblich heller als in der Nähe der weissen erscheint, gleichviel, ob man ein Auge bei Schluss des andern, oder beide Augen nach der Weise gewöhnlichen Sehens zur Betrachtung verwendet.

Hieran knüpfen sich noch folgende Versuchsformen:

Man legt bei Vorderstellung gegen das Fenster vor sich neben einander einen schwarzen und einen farbigen Bogen und auf die Mitte eines jeden derselben ein gleiches weisses Object, hält dann die, auf der einen Seite schwarze, auf der andern weisse Scheidewand so zwischen beide Augen, dass jedes Auge blos ein Object sieht, indem man dabei die weisse Wand nach dem farbigen Bogen kehrt; das auf dem farbigen Bogen liegende weisse Object erscheint dann als das dunklere zugleich mit der Complementärfarbe des Bogens, um so deutlicher, wenn man es indirect sieht, indem man den Blick nach dem andern Object wendet, oder auch gleich anfangs den Blick so gerichtet hält, so dass nicht etwa eine complementäre Nachfarbe des Grundes bei der andern Wendung ins Spiel kommt.

Wendet man zwei zu einander complementäre Bogen als Grund an, und giebt zugleich der Scheidewand auf jeder Seite die entsprechende Farbe des Bogens, wohin sie gewendet ist,*) so erscheinen die weissen Objecte lebhaft in der Complementärfarbe ihres Grundes, wenn die beiden Farben des Grundes selbst lebhaft sind.

b) Die Röhrenversuche.

Schon früher ist bekannt, dass, wenn man mit einem Auge durch eine inwendig geschwärzte Röhre, mit dem andern frei auf einen schwarzen oder weissen Grund sieht, der mit beiden Augen gesehene Theil des Grundes sich als ein auffällig heller runder Fleck inmitten des übrigen viel dunkler erscheinenden Grundes darstellt. Auch hier wirkt heterogene Deckung und Contrast zusammen, den Unterschied zu geben.

*) Zwei complementärfarbige Bogen mit der Rückseite an einander applicirt können die Scheidewand vertreten.

Indess nämlich im hellen Fleck homogene Deckung des beleuchteten Grundes statt findet, findet in der Umgebung heterogene Deckung dieses beleuchteten Grundes mit der inwendig unerleuchteten Röhrenwand statt; ausserdem haben wir im Auge, was durch die Röhre sieht, den Contrast des hellen Flecks mit der unerleuchteten Röhrenwand, welcher macht, dass der von diesem Auge gesehene Fleck des Grundes um so heller erscheint.

Wie zu erwarten, scheint bei diesem Versuche der Unterschied zwischen dem hellen Fleck und dem umgebenden Grunde entschieden auffälliger bei einem weissen Grunde als bei einem schwarzen; obwohl er auch bei einem solchen deutlich ist.

Dieser Versuch lässt folgende nicht uninteressante Abänderungen zu:

Richte ich die Röhre vor meinem Auge auf die Gränze eines weissen und schwarzen Grundes, indess ich mit dem andern Auge frei dahin blicke, so sehe ich natürlich den Fleck halb weiss, halb schwarz, und zwar die schwarze Hälfte tiefer und reiner schwarz als den übrigen schwarzen Grund, die weisse Hälfte heller und reiner weiss, als den übrigen weissen Grund. Wende ich die Röhre von der Gränzlinie ganz auf den schwarzen Grund, so kehrt sich das Verhältniss um, die Umgebung des Flecks erscheint jetzt tiefer und reiner schwarz; wende ich sie ganz auf den weissen Grund, so erfolgt keine solche Umkehrung, sondern der helle Fleck bleibt heller und reiner weiss, als der umgebende Grund. Diese Ergebnisse sind ganz entschieden und Funke hat sie controlirt.

Zur Erklärung kommt Folgendes in Rücksicht. Richte ich die Röhre ganz auf den schwarzen Grund, so muss der helle Fleck lichter als die Umgebung erscheinen nach dem, was vorhin erörtert wurde. Richte ich sie auf die Gränze von Schwarz und Weiss, so besteht noch derselbe Einfluss für die schwarze Hälfte, aber er wird überwogen durch den Einfluss des Contrastes gegen die weisse Hälfte; daher kehrt sich die Erscheinung um. Richte ich die Röhre ganz auf den weissen Grund, so muss der helle Fleck ebenfalls nach Vorigem lichter als die Umgebung erscheinen: richte ich sie von da auf die Gränze zwischen Weiss und Schwarz, so wird diese Lichtung durch den Contrast mit der schwarzen Hälfte noch gehoben, und kehrt sich also nicht um.

Wendet man eine inwendig weisse statt schwarze Röhre zu denselben Versuchen an, so tritt keine Umkehr ein, wenn man die Röhre

von der Gränze auf den vollen schwarzen Grund wendet, sondern die schwarze Hälfte des Flecks wie der volle schwarze Fleck bleibt reiner und tiefer schwarz als der übrige schwarze Grund. Eben so wenig tritt auf dem Weiss hiebei eine Umkehr ein.

Nehme ich vor ein Auge eine inwendig schwarze, vor das andere eine inwendig weisse Röhre und richte dieselben auf einen schwarzen Grund, so dass mir zwei getrennte kreisförmige Flecke darauf erscheinen, so erscheint der durch die weisse Röhre gesehene viel tiefer und reiner schwarz als der durch die schwarze Röhre gesehene. Richte ich die Röhren so, dass sich beide Kreise auf dem schwarzen Grunde schneiden, so erscheint das gemeinsame Stück in der mittlern Helligkeit der Kreise, in derselben, in welcher der einfach gesehene Kreis erscheint, wenn ich die Röhren so richte, dass sich beide Kreise ganz superponiren.

Stelle ich dieselben Versuche mit der schwarzen und weissen Röhre unter Anwendung eines weissen statt schwarzen Grundes an, so erscheint eben so der durch die weisse Röhre gesehene Fleck dunkler und sehr entschieden bläulich, wenn der Himmel schön blau ist; der andere rein weiss und heller. Lasse ich aber beide partiell zusammenfallen, so erhalte ich nicht die mittlere, sondern so viel sich beurtheilen lässt, die Summe der Helligkeiten beider Flecke, in dem gemeinsamen Stücke. Diess kann auffallend erscheinen, erklärt sich aber daraus, dass die weisse Röhre zwar inwendig heller als die schwarze, aber doch eben so wie die schwarze dunkler als der frei beleuchtete weisse Grund ist, indess bei einem schwarzen Grunde die eine Röhre inwendig dunkler, die andere heller als der Grund ist. Diese Versuche geben ebenfalls ein ganz zweifelloses Resultat.

Daher, dass sowohl die weisse als schwarze Röhre inwendig minder hell ist, als der gleiche Grund auf den man blickt, rührt es denn auch, dass sowohl, wenn man mit zwei (gleich langen) schwarzen Röhren auf einen schwarzen, als mit zwei weissen Röhren auf einen weissen Grund blickt, das sich schneidende Stück beider darauf erscheinenden Kreise gegen den übrigen Theil derselben erhellt ist, indess der Erfolg in dieser Hinsicht mehr oder weniger zweideutig oder nach Umständen variabel ist, wenn man mit zwei weissen Röhren auf einen schwarzen Grund blickt, um so entschiedener dagegen die Erhellung des sich schneidenden Stückes, wenn man mit zwei schwarzen Röhren auf einen weissen blickt.

Anstatt eine schwarze und weisse Röhre von gleicher Länge zu den Versuchen anzuwenden, wovon man die eine vor das eine, die andere vor das andere Auge nimmt, kann man auch zwei weisse oder zwei schwarze Röhren von gleicher Weite und ungleicher Länge, z. B. die eine von doppelter Länge als die andere, anwenden. Die längere verhält sich dann aus leicht begreiflichem Grunde wie die schwarze, die kürzere als die weisse, und man erhält entsprechende Resultate.

Rollt man zwei complementärfarbige Bogen mit der Farbenseite nach Innen als Röhren zusammen, und sieht durch jede Röhre mit einem Auge nach einem Grunde von einer der beiden Farben, so erscheint durch die gleichfarbige Röhre die Farbe des Grundes auffallend unscheinbar, durch die andere auffallend in Lebhaftigkeit erhöht.

Legt man einen weissen und schwarzen Grund neben einander und auf jeden ein graues Feld, so erscheint schon ohne Weiteres das graue Feld auf dem schwarzen Grunde heller als das auf dem weissen. Aber dieser Unterschied nimmt sehr zu, wenn man nach dem grauen Felde auf dem weissen Grunde mit einer inwendig weissen, nach dem grauen Felde auf dem schwarzen Grunde mit einer inwendig schwarzen Röhre sieht.

Wendet man hiebei statt eines weissen und schwarzen Grundes einen solchen mit einer Farbe *a* und einen anderen mit der Complementärfarbe *b* an, legt auf jeden ein weisses Feld, und sieht nach *a* mit einer Röhre inwendig von der Farbe *a*, nach *b* mit einer Röhre inwendig von der Farbe *b*, so erscheinen die beiden weissen Felder lebhaft mit der Complementärfarbe zum Grunde, auf dem sie liegen, welche sogleich schwindet oder doch unscheinbarer wird, wenn man die Röhren von dem Auge entfernt.

c) Der binoculare Streifenversuch.

Der folgende Versuch bietet das Interesse dar, dass zwei gleich beschaffene und gleich beleuchtete graue Felder durch Zerlegen in Doppelbilder 4 Bilder von verschiedener Helligkeit zugleich geben, welche sich dadurch unterscheiden, dass im einen der Contrast und die heterogene Deckung sich in Steigerung der Helligkeit unterstützen, im andern zur Steigerung der Dunkelheit, indess in den beiden andern sich beide Umstände entgegenwirken, im einen aber mit Uebergewicht der Steige-

rung der Helligkeit, im andern der Dunkelheit, wonach man alle hiebei möglichen Verhältnisse auf einmal vor sich hat.

Ein weisser und schwarzer Grund seien bei Vorderstellung des Beobachters gegen das Fenster so juxtaponirt, dass die Gränzlinie beider vom Beobachter nach dem Fenster geht. Auf jede beider Flächen werde zur Seite der Gränzlinie unmittelbar an dieselbe oder in kleiner Entfernung davon rechts und links ein kleines graues quadratisches Feld (vom Grau Nr. 2 oder 3. S. 365), hinter einander vom Beobachter nach dem Fenster zu gelegt, (was ich als Tiefenrichtung fasse) und dann die Sehaxen gekreuzt, so dass sich nach der Versuchsweise S. 384 ein binocularer Streifen bildet, in dem sich Weiss und Schwarz decken. Dabei entsteht zugleich von jedem der grauen Felder ein Doppelbild. Die grauen Felder müssen der Gränzlinie nahe genug liegen, dass eine Componente jedes Doppelbildes ganz in den binocularen Streifen fällt, indess die andre respectiv auf den homogen gedeckten weissen oder schwarzen Grund fällt. So erhält man 4 Bilder der grauen Quadrate, zwei, welche dem Quadrate auf dem weissen Grunde angehören, wovon eines w in den binocularen Streifen, das andere w' seitlich in den homogen gedeckten weissen Grund fällt, zwei, welche eben so dem Quadrate auf dem schwarzen Grunde angehören, und entsprechend als s und s' unterschieden werden mögen.

Richtet man nun zuvörderst seine Aufmerksamkeit auf die beiden Bilder w und s in dem binocularen Streifen, so wird man sie in auffälligster Weise an Helligkeit verschieden finden, w ganz dunkelgrau, s ganz lichtgrau.

Legt man die beiden grauen Quadrate unmittelbar hinter einander und unmittelbar an die Gränze von Weiss und Schwarz, immer zu beiden Seiten der Gränzlinie, so dass sie in der Gränzlinie nur mit einer Ecke zusammentreffen, so kann man das Auseinanderschieben leicht so bewirken, dass alle 4 Bilder zusammenhängen, indem w und s in der Tiefenrichtung, w und w' einerseits, s und s' andrerseits in der Seitenrichtung durch eine gemeinsame Seite zusammenhängen, wo sich dann die relativen Helligkeiten aller 4 Bilder sehr gut beurtheilen lassen. Man sieht dann leicht, dass alle 4 eine verschiedene Helligkeit haben, in abnehmender Folge s, w', s', w d. h. die im binocularen Streifen stehen am weitesten auseinander, zwischen ihnen steht als heller das Bild auf dem blossen Weiss, als dunkler das auf dem blossen Schwarz.

Jene ersten zeigen dasselbe Helligkeitsverhältniss, was die grauen Quadrate ohne Auseinanderschieben ihrer Bilder auf dem Weiss und Schwarz zeigen, verstärkt, diese zeigen ein verkehrtes Verhältniss dazu, und es ist nicht ohne Interesse, durch abwechselndes Zusammenschieben und Auseinanderschieben sowohl diese Verstärkung als diese Umkehrung zu beobachten.

Die Erklärung dieser Verhältnisse ergibt sich leicht, wenn man berücksichtigt, dass bei w und s der Contrast mit der Umgebung und die heterogene Deckung zusammenwirken, den Helligkeitsunterschied zu steigern, wogegen bei w' und s' beide sich in dieser Hinsicht entgegentreten; denn nach den Verhältnissen des Contrastes sollte w' als von Weiss umgeben dunkler erscheinen als das von Schwarz umgebene s'; so dass das wirkliche Uebergewicht der Helligkeit von w' über s' nur durch das Uebergewicht des Einflusses der heterogenen Deckung zu Stande kommen kann, sofern bei w' Grau sich mit Weiss, bei s' aber mit Schwarz deckt. Denn es ist zu berücksichtigen, dass, obwohl der Grund um w' und s' homogen gedeckt ist, doch w' und s' selbst in diese homogene Deckung eine Lücke bringen.

Nimmt man anstatt eines weissen und schwarzen Grundes zwei complementärfarbige Bogen als nachbarliche Unterlagen und wendet zwei weisse Felder wie vorhin zwei graue an, indem man sie in eine kleine Entfernung von der Gränzlinie oder unmittelbar daran zu beiden Seiten derselben hintereinander respectiv auf einen und den andern Farbebogen legt, so sieht man unmittelbar nach dem Auseinanderschieben des Doppelbildes oft eben so wenig eine deutliche complementäre Färbung daran, als wenn man die Felder ohne Doppelbild auf dem Farbebogen fixirt, wofern man nicht vor dem Versuche die Augen auf dem Farbebogen hin- und hergewendet hat; wonach es am besten ist, um dieses negative Resultat zu constatiren, die Augen erst einige Zeit geschlossen in der erforderlichen Lage auf die weissen Objecte zu richten, und nach Oeffnung gleich das Doppelbild auseinanderzuschieben. Aber man braucht dann nur die Augen ein paar mal auf dem Farbebogen hin- und herzuwenden, so sieht man die beiden Bilder in dem binocularen Streifen sich sofort lebhaft mit der Complementärfarbe ihres Grundes tingiren und diese Farbe dann verharren; auch die beiden andern Bilder zur Seite nehmen, obschon schwächer, diese Färbung an, so lange man die Fixation auf den binocularen Streifen oder eine der

hineinfallenden Componenten richtet, wogegen jedes der ausserhalb dieses Streifens fallenden Bilder sofort die Farbe seines Grundes annimmt, wenn man die Fixation auf dasselbe Bild richtet, ohne doch das Doppelbild dabei zusammenzuschieben; und auch das in den binocularen Streifen fallende Bild desselben Grundes nimmt hiebei an Lebhaftigkeit der Complementärfarbe ab, oder kann sich selbst in die Gleichfarbe des Grundes umkehren. Legt man die beiden weissen Objecte so, dass die Bilder im binocularen Streifen sich theilweis decken, so geben sie in dem sich deckenden Theile reines Weiss, indess die Complementärfarben, als Randscheine um die Ecken besonders lebhaft, in dem nicht sich deckenden Theile fortbestehen, was eine andere Weise ist, die Composition von Complementärfarben auf correspondirenden Stellen zu Weiss zu zeigen, als die im 13. Abschnitt angegebene.

Welcherlei Grund und welcherlei Objecte man auch bei diesen Versuchen anwenden mag, so sind die Componenten, welche in den sich binocular deckenden Streifen fallen, stets mit einem Hofe von der Helligkeit und Farbe ihres Grundes umgeben.

XVII.

Ueber einige Erscheinungen des indirecten Sehens.

Sehr eigenthümlich ist folgende Erscheinung: ich schiebe das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde oder schwarzen Feldes auf weissem Grunde auseinander, fixire die eine beider Componenten und nehme dann vor das Auge, welchem die nicht fixirte Componente angehört, eine stark verdunkelnde Glascombination, wie z. B. $71 . 145 = 10$, oder auch eins meiner dunkeln Farbegläser, das rothe oder dunkelgrüne. So wie es geschieht, verschwindet die Componente in dem verdunkelten Auge völlig, und tritt erst nach ein paar Secunden mit einer gewissen Plötzlichkeit wieder hervor. Verdunkle ich statt dessen das Auge, was die eine Componente fixirt, mit derselben Glascombination, so verdunkelt sich natürlich das Bild auch stark, aber es verschwindet nicht und eine kleine Wiedererhellung folgt der Verdunklung sofort nach. Zöllner fand diese Erscheinung ganz so wie ich.

Das Constante bei diesem Experiment ist das gänzliche momentane Verschwinden des indirect fixirten Bildes, wenn eine hinreichende Verdunklung des betreffenden Auges statt findet, und ein leichteres und länger dauerndes Verschwinden desselben als des direct gesehenen Bildes, bei darauf angewandter Verdunklung, wenn überhaupt ein Unterschied in dieser Hinsicht wahrgenommen wird, was jedoch nicht sicher zu verbürgen ist. Nimmt man ein zu helles verdunkelndes Glas, so bleibt das indirect gesehene Bild eben so gut, als das direct gesehene fortbestehen, wenn man die Verdunklung darauf anwendet; und nimmt man das Glas zu dunkel, wenn ich z. B. die Combination 90 . 71 = 6 anwende, so verschwindet manchmal auch das fixirte Bild völlig, und tritt erst nach einiger Zeit wieder hervor, wenn die Verdunklung darauf angewandt wird: daher es gilt, den rechten Verdunkelungsgrad zu treffen, wenn der Unterschied zwischen der Anwendung der Verdunklung auf das direct und indirect gesehene Bild entschieden und sicher hervortreten soll. Daher fand ihn auch Grabau unter Anwendung der Combination 71 . 145 nicht so constant und entschieden, als er sich bei mir und Zöllner zeigte, obwohl doch im Ganzen in derselben Richtung.

Nicht selten tritt bei mir das Verschwinden der indirect gesehenen Componente und erst spätere Wiedererscheinen auch dann ein, wenn ich beide Augen zugleich plötzlich stark verdunkle; aber, während mir manchmal der Versuch in dieser Weise oft hinter einander wohl gelungen ist, ist er andremale gar nicht gelungen, indem beide Componenten sichtbar blieben. Eben so, wenn ich von zwei Feldern, die seitlich von einander, in einiger Entfernung von einander, liegen, das eine fixire, ohne Erzeugung eines Doppelbildes und beide Augen zugleich rasch verdunkle; das nicht fixirte verschwindet manchmal, manchmal nicht, ohne dass ich den Grund des verschiedenen Erfolgs angeben kann. Zöllner konnte bei diesen Versuchsweisen ein Verschwinden des nicht fixirten Bildes überhaupt nicht beobachten, und der Erfolg ist also hier jedenfalls unsicher.

Ein andrer Umstand, der mir Erwähnung zu verdienen scheint, ist folgender: ich finde sehr entschieden, wenn ich ein weisses Feld auf farbigem Grunde vor mir habe, dass es, je nachdem ich es indirect oder direct betrachte, deutlicher oder undeutlicher complementär zum Grunde erscheint, oder dass die bei indirecter Betrachtung deutliche, Com-

plementärfärbung bei directer verschwindet. Funke und Zöllner fanden diess unter Anwendung verschiedener Farben bestätigt; auch Grabau bei grünem und blauem Grunde, indess er bei mehrern andern Farben weder mit directem noch indirectem Sehen etwas von Complementärfarbe bemerkte.

Man muss, soll der Versuch rein sein, den Farbengrund nicht so gross nehmen, dass bei indirecter Betrachtung des weissen Feldes der Fixationspunct auf dem Farbengrunde noch haften bleibt, um nicht bei nachherigem Zurückwenden zum weissen Felde die complementäre Nachfarbe zum Grunde im Auge zu haben.

Vielleicht hängt mit dieser leichtern Entwickelung der Complementärfarbe in den seitlichen Theilen des Gesichtsfeldes zusammen, dass die Farbe kleiner farbiger Flächen in den seitlichen Theilen des Gesichtsfeldes leicht verschwindet, worüber Auberts Versuche in Gräfe's Arch. III. p. 38 ff. nachzulesen sind.

XVIII.

Ueber einige Verhältnisse des zweiseitigen Hörens.

Es ist nicht ohne Interesse, die Verhältnisse, welche sich zwischen den correspondirenden Netzhäuten beider Augen darbieten, mit denen zu vergleichen, welche die beiden Gehörwerkzeuge darbieten. Bis zu gewissen Gränzen scheinen die Verhältnisse sehr analog; aber die Analogie reicht nicht gar zu weit, und der Gesichtspunct derselben ist noch nicht ins Klare gebracht. Auch die folgenden Bemerkungen und Versuche, welche sich nur beiläufig an die Untersuchung über das zweiseitige Sehen angeschlossen haben, vermögen nichts Abschliessendes in dieser Hinsicht zu gewähren, sondern nur dem bisher Bekannten hier und da einen kleinen Zusatz oder eine nähere Bestimmung beizufügen.

Ein Hauptpunct der Analogie liegt darin, dass wir einen Schall, der in beide Ohren fällt, eben so nur einfach hören, wie wir Licht, was auf correspondirende Netzhautfasern trifft, nur einfach sehen. Ein anderer Hauptpunct liegt darin, dass, so wie zwei auf correspondirende Stellen beider Netzhäute fallende Lichteindrücke nicht allgemein durch ein Zusammenfallen dieser Eindrücke auf einer identischen Netzhautstelle in einem Auge ersetzt werden können, sondern unter Umständen einen davon sehr abweichenden Effect in der Empfindung äussern, dasselbe von

Schalleindrücken gilt, die respectiv auf beide Ohren gesondert treffen oder in demselben Ohre zusammentreffen.

E. H. Weber hat zuerst die interessante Bemerkung gemacht,*) dass, wenn man von zwei Taschenuhren die eine vor das eine Ohr die andre vor das andre hält, man einen ganz andern Eindruck von ihrem gemeinschaftlichen Schlage hat, als wenn man beide vor dasselbe Ohr hält, man hört einesfalls den Schlag als etwas Ineinandergreifendes, und hat den Eindruck des aus dem abwechselnden Zusammentreffen und Nichtzusammentreffen ihrer Schläge hervorgehenden Rhythmus, was nicht der Fall ist, wenn man beide vor verschiedene Ohren hält, wo man den Schlag jeder Uhr verhältnissmässig mehr für sich hört.

Es schien mir von Interesse, die Wirkung der Aufmerksamkeit bei dem Versuche mit den Uhren etwas genauer zu untersuchen, und mit der Wirkung derselben bei den Gesichtsphänomenen zu vergleichen. Ich finde in dieser Hinsicht Folgendes:

Habe ich die zwei Taschenuhren vor einem und demselben Ohre, so bin ich mit aller Anstrengung der Aufmerksamkeit nicht im Stande, den Schlag und Tact der einen unterschieden von dem der andern oder auch nur vorwaltend vor der andern aufzufassen, ich höre immer blos ihr Ineinanderschlagen. Die Aufmerksamkeit hat zwar auch hier noch Macht, aber nur in sofern, als ich den gemeinsamen Schlag beider zugleich ins Bewusstsein heben oder dadurch, dass ich die Aufmerksamkeit entschieden auf ein andres Sinnesgebiet richte, aus dem Bewusstsein heben kann; aber ich kann den Schlag der einen nicht durch irgendwelche Richtung der Aufmerksamkeit von der andern isoliren oder zur Präponderanz bringen.

Unstreitig gilt diess blos, wenn der Schlag beider Uhren nicht über eine gewisse Gränze im Tact oder Timbre abweicht. Doch zeigen jeden-

*) »Wenn ich zwei Taschenuhren, deren Schlag nicht genau dieselbe Geschwindigkeit hat, nahe vor ein Ohr halte, so dass ihr Schlag nur mittelst dieses Ohrs und nicht durch das andre gehört wird, so unterscheide ich die Perioden, wo die Schläge beider Uhren zusammenfallen, und kann sie als einen sich wiederholenden Rhythmus auffassen. Halte ich dagegen vor jedes Ohr eine Uhr, so nehme ich zwar wahr, dass die eine geschwinder schlägt, als die andre, bin aber nicht im Stande, jenen sich wiederholenden Rhythmus aufzufassen, und der Schlag beider Uhren macht daher einen ganz andern Eindruck, als im ersten Falle«. (Weber, der Tastsinn und das Gemeingefühl, Wagners Wörterb. S. 489.)

falls die meisten, zufällig gewählten, Taschenuhren das hier angegebene Resultat an einem Ohre eben so entschieden, als das folgende an beiden.

Halte ich nun dieselben Uhren, die mir das vorige Resultat vor einem Ohre gaben, vor die zwei verschiedenen Ohren, so finde ich es nicht nur schwer, sondern es gelingt mir auch nicht auf die Dauer und wie schon aus dem Obigen hervorgeht, nicht in derselben Vollkommenheit, eine gemeinsame Affection durch den Schlag beider Uhren zum Bewusstsein zu bringen. Ich glaube immer bald mehr die eine, bald mehr die andre zu hören. Durch absichtlich einseitige Spannung der Aufmerksamkeit aber kann ich die Auffassung des Schlags und Tacts der einen von der der andern merklich ganz isoliren, in ähnlicher Weise, als man beim Hören im gewöhnlichen Leben aus einem Gemisch verschiedener heterogener Geräusche das eine oder andre durch demgemäss gerichtete Aufmerksamkeit besonders heraushören kann, indess zugleich das Bewusstsein der übrigen zurücktritt. Jedoch auch dieses gelingt nicht auf die Dauer, indem nach Massgabe, als die Aufmerksamkeit in einer Richtung ermüdet, der Schlag und Tact der andern Uhr wieder ins Bewusstsein tritt; kurz es findet hier ein theils durch Aufmerksamkeit willkührlich zu erzeugender, theils unwillkührlicher Wettstreit statt.

Dabei aber bestimmt sich, anders als es im 8. Abschnitt für das Auge angegeben ist, die Richtung des Erfolges wirklich nach der Richtung der Aufmerksamkeitsspannung und tritt nicht etwa so wie dort blos mit jeder neuen Aufmerksamkeitsspannung ein Wechsel überhaupt ein.

Einen ähnlichen Erfolg als mit zwei ähnlich schlagenden Uhren erhält man, wenn man zwei Rockzipfel aufhebt, und einmal vor beiden Ohren, das andremal vor demselben Ohre mit den Fingern reibt, oder durch einen Andern diess vornehmen lässt. Man kann einesfalls beide Geräusche durch demgemässe Richtung der Aufmerksamkeit isoliren, andernfalls nicht. Noch einfacher ist es, sich vor den Ohren zu kratzen oder die Haare davor zu reiben.

Es hat mir geschienen, dass, wenn man eine Uhr in den Mund nimmt und gegen die hintern Zähne einer Seite drückt, wo der Schlag in dem Ohre dieser Seite vernommen wird, und zugleich eine Uhr äusserlich vor das Ohr dieser Seite hält, der Tact beider Uhren sich ebenfalls durch geeignete Spannung der Aufmerksamkeit isoliren lässt, dass

es aber nur mit stärkerer Anspannung und minder vollständig gelingt, so dass der Fall zwischen dem inne zu stehen scheint, wo der Schlag beiden Ohren oder blos einem Ohre zugeführt wird, was vielleicht darauf beruht, dass der Schall durch die Kopfknochen sich dem Schnekkennerven, durch das Trommelfell dem Labyrinthnerven stärker mittheilen mag, wie E. H. Weber früher aus anderm Gesichtspuncte geltend gemacht hat.

Wie beim Auge finde ich beim Ohr mit einem Gefühle stärkerer psychischer Aufmerksamkeits-Spannung zugleich ein Gefühl stärkerer physischer Spannung in Beziehung, welches ich, wie ich es willkührlich auf dieses oder jenes Auge verlegen kann, eben so auf dieses oder jenes Ohr verlegen kann, und unwillkührlich dahin verlege, wenn ich nach einer Seite horche. Mit der einseitigen Richtung der Aufmerksamkeit und dem hiemit einseitig verstärkten Gefühl der Spannung treten leicht unwillkührlich noch manche Mitbewegungen ein. Fast unwillkührlich nehmen die Augen die Richtung nach der Seite, nach der man mit dem Ohre lauscht, und bei sehr angespanntem Hören zieht sich wohl selbst der Mund etwas nach dieser Seite.

Man kann nun fragen, wenn der Wettstreit beim Gehör durch willkührliche Richtung der Aufmerksamkeit seiner Richtung nach mitbestimmt wird, warum sollte es nicht beim Gesicht eben so der Fall sein, da die Verhältnisse sonst so analog sind. Man kann vielleicht selbst von hieraus einen Zweifel gegen die negativen Erfahrungen des 8. Abschnitts bezüglich des Gesichts erheben. In der That hat diese Analogie mir selbst erschwert, mich diesen negativen Erfahrungen zu fügen. Inzwischen ist die Analogie nach dem Folgenden zwischen Ohr und Auge auch sonst nicht so schlagend, dass ein Schluss darauf zu gründen wäre. Denn 1) beim Auge habe ich, wenn sich beispielsweise Roth und Grün streitet, nicht die unterscheidende Empfindung, vor welchem Auge Roth, und vor welchem Grün ist. Ich kann, wenn ich z. B. ein weisses Feld mit einem rothen Glase vor einem und einem grünen Glase vor dem andern Auge betrachte, nur aus der mir bekannten Lage der Gläser wissen, welchem Auge das Roth und welchem das Grün erscheint. Hingegen sagt mir die Empfindung unmittelbar, vor welchem Ohre der Schlag der einen und vor welchem der Schlag der andern Uhr erfolgt, und die abwechselnde Aufmerksamkeitsspannung jedes Ohres tritt in directe Beziehung mit diesem Localgefühl einer verschiedenen Oertlich-

keit des Schlages. Gegen Ende dieses Abschnittes komme ich auf diesen Unterschied zurück. 2) Wenn im Auge noch so ungleiche Farbeneindrücke auf einer identischen Stelle zusammentreffen, so können sie durch Aufmerksamkeit eben so wenig gesondert werden, als nahehin gleiche. Dagegen können sehr ungleiche Geräusche, auch wenn sie durch ein- und dasselbe Ohr eintreten, allerdings durch Aufmerksamkeit gesondert von einander und wechselnd ins Bewusstsein gehoben werden.

So können wir von den Tagesgeräuschen, die uns täglich umgeben, leicht ausschliesslich auf das eine oder andre achten, und vernachlässigen bei der Achtung auf ein Geräusch oft ganz und gar andre mitgehende Geräusche. Hiebei treten in j e d e s beider Ohren alle Geräusche ein. Inzwischen verdoppelt sich damit nur der Fall, dass sie gemischt in blos ein Ohr eintreten, ähnlich, als der Fall, dass auf einer identischen Stelle Eindrücke zusammentreffen, sich nur verdoppelt, wenn dasselbe auch auf der correspondirenden geschieht. Uebrigens habe ich mich direct von der wesentlichen Aequivalenz des gemischten Eintritts in zwei Ohren und ein Ohr wie folgt überzeugt.

Wenn ich meine beiden ähnlich schlagenden Uhren neben einander auf die Mitte des Scheitels aufsetze, so dass sich von j e d e r der Schlag durch die Kopfknochen zu b e i d e n Ohren fortpflanzt, so kann ich während des Tagesgeräusches überhaupt nichts von dem Schlage beider Uhren wahrnehmen. Verstopfe ich jedoch beide Ohren möglichst gut, und drücke ich die Uhren kräftigst auf die Kopfknochen auf, so wird der Schlag vollkommen deutlich, und erscheint genau so ununterscheidbar, und von ganz demselben Character, als wenn ich beide Uhren nur vor einem und demselben Ohre halte. Er scheint mir nur jetzt nicht mehr von dem Ohre, sondern eben vom Scheitel herzukommen.

Das Zusammentreffen der Tactschläge zweier Uhren oder zweier verschiedener Geräusche vor einem und zwei Ohren bietet an sich keine so gute Analogie mit dem Zusammentreffen zweier Farben in einem und zwei Augen dar, als das Zusammentreffen zweier ausgehaltener Töne.

Wiederholt man die Versuche, die oben mit Anwendung zweier Uhren beschrieben wurden, mit zwei nahe gleichen Stimmgabeln, *) die

*) Findet man die Verschiedenheit der Tonhöhe zwischen zwei sonst gleich construirten Stimmgabeln noch etwas zu gross, so kann man sie durch ein von A. Seebeck

man an einander anschlägt, so dass sie nicht nur einen nahe gleich hohen sondern auch nahehin gleich starken Ton geben,*) so findet man zwischen dem Fall, dass man sie beide vor ein Ohr und dass man sie vor beide Ohren hält, nur die Verschiedenheit, dass die von ihrer noch etwas abweichenden Stimmung abhängigen Schwebungen oder Stösse in dem Falle, wo man sie vor ein Ohr hält, viel deutlicher erscheinen, als wenn man sie vor beide Ohren hält.

Nun fehlen allerdings die Stösse auch nicht, wenn man die Gabeln vor beide Ohren hält, und namentlich findet man sie dann sehr entschieden, wenn man die Gabeln, statt sie blos vor die Ohren zu halten, mit den Stielen in die Ohren steckt, indem dann die Töne selbst sehr stark werden; doch findet man auch in diesem Fall die Anschwellungen des Tones verhältnissmässig geringer, als beim Halten der Stimmgabeln vor dasselbe Ohr. Dieses Verhältniss der Stösse ist bekanntlich schon durch Dove's**) und A. Seebeck's***) Versuche ermittelt; und die Versuche des letztern mit einer Doppelsirene führen ihn zu dem Schlusse, dass man die Stösse in dem Falle, wo beide Gabeln vor verschiedene Ohren gehalten werden, blos noch desshalb hört, weil sich die Schwingungen jeder Gabel von einem Ohre zum andern durch die Kopfknochen fortpflanzen; eigentlich also in jedem Ohre für sich Stösse gehört werden, schwächer aber, als wenn beide Gabeln vor demselben Ohre klingen, weil die von einem Ohre zum andern fortgepflanzten Schwingungen schwächer sind, als die direct von ihm aufgenommenen. Wie denn auch durch ungleichen Abstand zweier Stimmgabeln von demselben Ohre eine Schwächung der Stösse erzeugt werden kann. Hiemit stimmt auch gut folgende Thatsache überein. Wenn ich beide Stimmgabeln vor beide Ohren halte, finde ich die Totalstärke des gehörten Tons zwar grösser, als wenn ich die eine vor ein Ohr halte, die andre mit dem Stiel auf den

---

angegebenes einfaches Mittel leicht auf ein beliebiges Minimum herabbringen, indem man an die Zinken der höher tönenden etwas Wachs klebt.

*) Merkwürdigerweise ist man bisher noch nicht darauf aufmerksam geworden, dass die Mehrzahl der Menschen schwerer auf dem rechten als linken Ohre hört, worüber ich künftig ausgedehnte Beobachtungen mittheilen werde, die keinen Zweifel in dieser Hinsicht lassen. So ist es auch bei mir der Fall; und man muss natürlich in solchem Falle, um bei gleich starker Schallquelle einen gleich starken Schall vor beiden Ohren zu haben, die Entfernung der Schallquelle demgemäss reguliren.

**) Repertor. der Physik III. 404.

***) Pogg. LXVIII. 449.

Scheitel setze, die verhältnissmässige Stärke, hiemit die Deutlichkeit der Stösse aber, welche von dem Verhältniss zwischen dem stärksten und schwächsten Eindruck abhängt, grösser letztenfalls als erstenfalls. Noch mehr schwächt sich der Eindruck der ganzen Tonstärke, indess die Deutlichkeit der Stösse noch mehr wächst, wenn ich dann zu der einen auf den Scheitel gesetzten Gabel die andre auch hinzusetze, und die Deutlichkeit der Stösse ist dann, so viel ich zu beurtheilen vermag, dieselbe, als welche ich dadurch zu erzeugen vermag, dass ich beide Stimmgabeln vor dasselbe Ohr halte. Durch wiederholte Abwechselungen zwischen den verschiedenen relativen Lagen der Stimmgabeln überzeugt man sich von diesem Verhältnisse.

Auch folgendes, von Dove*) neuerdings mit Tartinischen Tönen erhaltene negative Resultat beweist für die Unfähigkeit der beiden Ohren, Schwingungen in entsprechender Weise zu combiniren, als es bei beiden Augen der Fall ist.

»Von zwei, eine reine Quinte gebenden, Stimmgabeln wurde die eine vor das rechte Ohr gehalten, die andre vor das linke. Der als tiefere Octave aus der Combination beider Schwingungssysteme entstehende Tartinische Ton wurde nicht gehört, aber sehr deutlich, wenn beide Stimmgabeln vor demselben Ohre standen.«

Man muss sich jedoch hüten, aus dem Versuche mit den Uhren und den Stimmgabeln einen zu weit gehenden Schluss zu ziehen, als wenn Töne, die in beide Ohren besonders dringen, sich überhaupt nicht zu einem gemeinsamen Eindruck combiniren könnten. In der That könnte man, wenn man den so sehr verschiedenen Eindruck vergleicht, den man empfängt, je nachdem zwei Uhren vor zwei Ohren oder vor einem Ohre schlagen; wenn man, wie ich mich oben ausdrückte, erstenfalls jede verhältnissmässig mehr für sich hört, geneigt sein, anzunehmen, dass man überhaupt nur abwechselnd mit beiden Ohren hört, und das scheinbar gleichzeitige Hören der Uhren vor beiden Ohren blos auf einem schnellen Wechsel beruhe. Diess würde jedoch nicht statthaft sein: denn nicht nur fühlt man den Eindruck im Ganzen geschwächt, wenn man eine beider Uhren von dem Ohre entfernt, sondern kann sich auch noch bestimmter bei anhaltenden Tönen von der Verstärkung überzeugen, welche sie sich in beiden Ohren leisten, indem man z. B. zwei

*) Pogg. CVII. S. 653.

aneinander angeschlagene gleiche oder nahe gleiche Stimmgabeln vor beide Ohren hält; durch Entfernung oder Anhalten der einen wird der Gesammteindruck des Tones auffallend geschwächt. Oder indem man eine stark angeschlagene Stimmgabel vor sich, in symmetrischer Lage der Zinken gegen die Nase und mithin Ohren, hält, und abwechselnd ein Ohr verschliesst und wieder öffnet; die empfundene Tonstärke ändert sich dadurch entschieden. Auch findet man den mit zwei nahe gleichen Stimmgabeln vor zwei Ohren erzeugten Ton gleichförmiger als den mit zwei Stimmgabeln vor einem Ohre erzeugten, weil eben die Stösse erstenfalls minder deutlich sind; unstreitig aber könnte dieser Eindruck der grössern Gleichförmigkeit nicht zu Stande kommen, wenn man nur mit beiden Ohren abwechselnd hörte.

Die deutlichen Stösse, welche zwei Stimmgabeln vor demselben Ohre geben, lassen sich sehr gut künstlich mit zwei in Einklang oder nahe in Einklang befindlichen, Stimmgabeln vor beiden Ohren dadurch nachahmen, dass man, während die eine Stimmgabel fest vor einem Ohre bleibt, die andere rasch abwechselnd dem andern Ohre nähert und davon entfernt; sei es, dass diess mit einer Bewegung nach vorn oder nach der Seite geschieht, indem sich bei jeder Näherung der Ton verstärkt, bei jeder Entfernung schwächt. Geschieht diess mit einer gleichförmigen raschen Schwingung der Hand, so hat man in der That ganz den Eindruck der deutlichen Stösse mit zwei fast gleichen Gabeln vor demselben Ohr.*) Auch braucht man nur die eine Gabel rasch um 90° abwechselnd hin- und zurückzudrehen, um denselben Erfolg zu erhalten; indem sich bekanntlich je nach der Lage der Zinken gegen das Ohr der Ton verstärkt und schwächt.

Der Erfolg dieses Versuches könnte nun aber einen scheinbaren Einwand gegen die Erklärung begründen, dass die Stösse, welche man mit zwei Stimmgabeln vor beiden Ohren erhält, nur nach Massgabe der Fortpflanzung der Schwingungen durch die Kopfknochen Platz greifen. Denn wenn sich der Ton einer dem einen Ohre abwechselnd genäherten und davon entfernten Stimmgabel mit dem Tone einer fest vor das andre Ohr gehaltnen Gabel abwechselnd zu einem stärkern oder schwächern Eindruck zu combiniren vermag, ohne dass man Grund hat, eine Fort-

*) Auch kann man den Versuch mit gleichzeitiger Näherung und Entfernung beider Stimmgabeln vor beiden Ohren, oder einer einzigen vor einem Ohre anstellen.

pflanzung durch die Kopfknochen von einem Ohr zum andern als wesentlich hiebei anzunehmen, so könnte man meinen, müsste dasselbe auch von den Schwingungen gelten, durch welche die Stösse zu Stande kommen. Aber die Entstehung der Stösse beruht nicht darauf, dass Schwingungen abwechselnd von grösserer und geringerer Amplitude, wie beim Versuche mit der vor dem Ohre geschwungenen Gabel, sondern dass Schwingungsphasen abwechselnd im einen und entgegengesetzten Sinne der Schwingung zusammentreffen, und die scheinbar gleiche Erscheinung beruht also auf wesentlich verschiedenen Gründen. Entgegengesetzte Schwingungen in beiden Ohren können sich also nach Aussage der Versuche dem Empfindungseffecte nach nicht zerstören, gleichgerichtete nicht verstärken, wohl aber können Schwingungen von gegebenen Amplituden in beiden Ohren einen resultirenden Empfindungseffect geben, wie ihn eine Schwingung von grösserer Amplitude vor einem Ohre zu geben vermag; und es ist wichtig, beide Fälle auseinander zu halten.

Versuche würden an sich erwünscht sein, um zu ermitteln, in wiefern gänzlicher Verschluss eines Ohres einen gleichen oder geringern Effect äussert, als Halbirung der objectiven Schallstärke, analog denen, welche S. 427 bezüglich des Lichtes erwähnt wurden. Freilich kann durch den Verschluss der Ohren die Perception mittelst der Kopfknochen nicht gehindert werden, und selbst wenn man die Ohren noch so gut mit Baumwolle verstopft und die Ohren zudrückt, lässt sich die Perception des Schalles nicht ganz ausschliessen; indess wird er doch dadurch auf eine verhältnissmässig sehr geringe Stärke herabgebracht. Inzwischen scheiterten Versuche, welche ich mittelst eines Apparats begann, der zur Halbirung der objectiven Schallstärke wohl geeignet ist, an dem Umstande, dass bei Verstopfung eines Ohres der Schall nicht nur schwächer, sondern zugleich dumpfer wird, so dass sowohl mir selbst, als einer andern Person, die auf beiden Ohren gleich gut hört, ein sichrer Vergleich der Stärke mit dem Schall, wenn beide Ohren geschlossen sind, nicht gelang.

In Rücksicht, dass mein eigenes musikalisches Gehör sehr unsicher ist, habe ich einen Virtuosen (Herrn v. Wasilewski) gebeten, zu versuchen, ob die Töne zweier wenig von einander verschiedener Stimmgabeln sich leichter unterscheiden liessen, wenn die Gabeln vor zwei Ohren, als vor einem Ohr gehalten würden. Er hat mir erklärt,

dass er ganz entschieden finde, die Unterscheidung falle erheblich leichter vor zwei Ohren als vor einem Ohre, und namentlich werde vor einem Ohre die Unterscheidung durch die Stösse mehr behindert. Die Gabeln unterschieden sich nach seiner Angabe etwa um $\frac{1}{16}$ Ton.

Schon oben wurde des Unterschiedes zwischen Ohr und Auge gedacht, dass das unterscheidende Localgefühl der Erregung des einen oder andern Ohres nicht entsprechend beim Auge statt hat. Dieser Unterschied ist schon von A. Seebeck*) hervorgehoben worden, und soll noch mit Einigem besprochen werden.

Nicht blos im Falle der Wettstreitsphänomene, sondern überall, wenn man mit beiden Augen Verschiedenes sieht, weiss man durchaus nicht, mit welchem Auge man das Eine und mit welchem man das Andre sieht. »Wenn, sagt Seebeck, ein Licht so steht, dass es blos in ein Auge scheinen kann, so empfinden wir nicht, ob wir es mit dem rechten oder mit dem linken Auge oder mit beiden sehen; und überzeugen uns dann erst, wenn wir jedes einzeln schliessen.« Kein Gefühl im Auge oder sonst wie gibt uns Rechenschaft, welches Bild von zwei verschiedenfarbigen oder verschieden hellen Componenten eines Doppelbildes dem einen und welches dem andern Auge angehört, man kann es nur dadurch erkennen, dass man ein Auge verdeckt oder dass man überlegt, nach welcher Weise der Kreuzung der Sehaxen die Bilder entstanden seien. Diess hat sich übereinstimmend bei Allen, die ich zu den obigen Versuchen zuzog, so gefunden. Auch bei subjectiven Phänomenen im Auge weiss man nie, ob sie beiden Augen oder einem, und welchem sie angehören, wenn man es nicht aus der Ursach zu erschliessen vermag. Diess nun verhält sich sehr anders bei den Ohren.

»Wenn z. B., sagt Seebeck, eine $\bar{a}$-Gabel vor das eine und eine $\bar{\bar{c}}$-Gabel vor das andre Ohr gehalten wird, so wird man nie zweifelhaft sein, welches Ohr a und welches $\bar{c}$ hört. Eben so unterscheidet man auch bei gleicher Tonhöhe leicht, welches von beiden Ohren einen stärkern Ton empfängt, und es dient uns diess bekanntlich als Hülfsmittel zur Unterscheidung der Richtung des Schalles.«

In der That, wenn eine Schallquelle ihren Schall in beide Ohren zugleich sendet, so werden wir zwar in jedem Falle den Schall einfach hören, und, im Fall er gleich stark in beide Ohren bei gleicher Em-

*) Pogg. LXVIII. p. 453.

pfindlichkeit derselben dringt, keine Veranlassung haben, ihn mehr auf das eine oder andere Ohr zu beziehen, wovon man sich auch leicht überzeugen kann, wenn man eine angeschlagene Stimmgabel gerade vor sich auf den Tisch oder auf den Scheitel aufsetzt. Dringt aber der Schall mit etwas grösserer Stärke in ein Ohr als in das andre Ohr, indem z. B. die Schallquelle dem einen Ohre erheblich näher als die andre ist, so findet die Eigenthümlichkeit statt, dass wir ihn nach einem besondern Localgefühle mit dem Ohre allein zu hören glauben, in welches er stärker dringt,*) obwohl diess nur eine Täuschung ist, da sich der Ton sofort schwächt, wenn wir den Zutritt des schwächern Schalles zum andern Ohre ganz beseitigen.

Versuche darüber lassen sich leicht mit einer angeschlagenen Stimmgabel oder pickenden Uhr anstellen,**) die man dem einen Ohr von Jemand näher als dem andern bringt, unter Sorge, dass er den Ort derselben nicht errathen kann. Immer weiss er doch nach jenem Localgefühl des Tones mit völliger Sicherheit anzugeben, ob der Schall vielmehr vor diesem oder jenem Ohre entsteht. Sollte man Verdacht hegen, dass dennoch das Localgefühl hiebei ein durch äussere Nebenumstände, unter welchen der Schall eintritt, erzeugtes sei, so würde derselbe bei folgender Versuchsweise nicht mehr Platz finden können.

E. H. Weber***) und Wheatstone†) haben wohl unabhängig von einander die Bemerkung gemacht, dass ein durch die Kopfknochen fortgepflanzter Schall stärker gehört wird, wenn man zugleich die Ohren verschliesst; und in dem Fall, wo man ein Ohr allein verschliesst, in diesem stärker gehört wird, oder vielmehr allein gehört zu werden scheint. Setzt man nun den Stiel einer tönenden Stimmgabel hinter ein Ohr auf, während man das andre Ohr zuhält, so glaubt man den Schall ganz entschieden doch nur in dem entfernteren Ohre zu hören. Ganz besonders frappant aber ist der Erfolg, wenn man das entfernte Ohr erst schliesst, nachdem der Stiel schon aufgesetzt war. Im Moment des

*) In der Otiatrik von Erhard (1859. p. 38) finde ich folgende hiehergehörige nicht uninteressante Bemerkung: »Jäger mit einem todten Ohre versichern, dass sie stets das Wild, wenn es lockt, in der entgegengesetzten Richtung vermuthen.«

**) Auch liegen schon solche vor, z. B. von Lincke in s. Handb. der Ohrenheilkunde. S. 549.

***) Programm. coll. 42.

†) Quarterly Journ. of Sc. vol. II. N. Sér. 1827.

Verschlusses springt der Ton unter beträchtlicher Verstärkung von dem nächsten Ohre auf das entfernte über.

Scott Alison hat jüngst in einer eignen Abhandlung*) »On the differential stetophone, and some new Phenomena observed by it« unter dem Namen Differenzial-Stethophon ein Instrument beschrieben, was sehr geeignet ist, das einseitige Localgefühl bei ungleicher Stärke des Schalles in beiden Ohren zu constatiren, und eine Menge damit angestellter Versuche angeführt. Dasselbe besteht im Wesentlichen aus zwei Hörröhren, die mit dem in einen Metallknopf auslaufenden Ohr-Ende (ear-knob) in die beiden Ohren eingebracht werden, indess die trompetenförmigen Mündungen (cups) in ungleichen Abstand von einer Schallquelle, als pickenden Uhr, tönenden Stimmgabel oder Glocke gebracht werden, was den Erfolg hat, dass der Schall in ungleicher Stärke von ihnen aufgenommen und den Ohren zugeleitet wird. Die Hörröhre bestehen zum Theil aus biegsamem Material (wie es scheint gewundenem Metalldraht), um ihre Mündungen in jede Lage und Entfernung zur Schallquelle bringen zu können, und sind so aneinander befestigt, dass sie bequem in Verbindung an die Ohren applicirt werden können.

Da diese Abhandlung meines Wissens in kein deutsches wissenschaftliches Journal übergegangen ist, so schalte ich hier das Wesentlichste daraus ein.

»The first fact of which I shall treat is the restriction of hearing external sounds of the same character to one ear, when the intensity is moderately yet decidedly greater in one ear than in the other, the hearing being limited to that ear into which the sound is poured in greater intensity. . . .

»The instrument being fitted into the ears, with the knobs directed upwards, and the cups being applied equally near to, or upon a sounding body, say the inflating lung, or a watch, and the conditions for collecting sound being the same, the sound is heard with both ears, as in ordinary hearing. But if one cup be removed a little, say a half or a quarter of an inch from the watch (for we shall now adopt it), and the other cup be left upon the watch, the sound is heard with that ear only which is connected with the cup placed upon the watch, and the sensation in the hearing ear is so marked, as to leave the mind in no doubt whatever that it is trough that ear we become conscious uf the sound. If the cup placed up or nearer the watch, be removed a little further than the other cup, so as to be left favourably situated for collecting sound, say on inch

*) Proceedings of the royal Soc. Vol. IX. Nr. 31. p. 196.

from the watch, the ear connected with it becomes totally inconscious of sound, and the sensation of hearing is most unequivocally felt in the ear, and in that ear only, which but a moment before was utterly deaf to it. If one cup be placed upon the middle of the watch, and the other on the edge, the watch sound is heard in that ear only which is connected with the cup placed upon the middle.«

Der Verfasser theilt noch viele Modificationen dieser Versuche mit, die jedoch nichts Neues lehren. Im Uebrigen meint er damit, dass der Schall im einen Ohr allein vernommen werde, nicht, dass blos der zu diesem Ohr gelangende Schall vernommen werde, sondern nur dass der Eindruck allein dorthin verlegt werde, wie aus Folgendem hervorgeht:

p. 203. »When sound is proceeding into the two ears, but in consequence of its reaching one ear in greater intensity than the other is heard only in one ear, the sensation of hearing in the favoured ear, though strictly limited to it, is augmented by the sound entering the less favoured ear, although it entirely fails to cause a sensation there, or to produce a consciousness of sound in that organ. The more sound collected by the less favoured ear, as long as the amount is less than that conveyed to the other ear, the more the sensation of sound is augmented in the more favoured ear. The intensity of sensation in the more favoured ear increases in a ratio with the increase of sound in the less favoured ear, until the intensity of sound is the same, or nearly the same, in both ears, when the sensation experienced is the ordinary one of hearing with two ears.«

Beachtung verdient noch Folgendes:

p. 204. »It is sounds of the same character only which exhibit the phenomenon of restriction in virtue of moderately different intensity. The sounds must emanate from the same sounding body or from bodies sounding similarly. A little difference in character will cause the experiment of restriction to fail.«

»Thus, if two bells, differing considerably in character, be rung respectively in the two ears, one louder than the other, the louder and graver sound does not render the other ear insensible to the weaker sound of the weaker bell. Both ears hear perfectly, but the loud, grave sound is heard in one ear, and the weak sound is heard in the other.«

»The sound of a watch ticking continue to be heard in one ear although a large-sized bell is made to ring at the other, and I have not perceived, that the sensation produced by the watch is at all impaired by the bell. A whistling lung-sound heard in one ear, is not rendered less obvious by a loud blowing lung-sound in the other. A hissing murmur at the apex of the heart conveyed into one ear, and a rasping sound at the base conveyed into the other, are both heard without alteration in the ears to which they are respectively conveyed.«

Im Uebrigen ist hiebei der interessanten Versuche E. Webers*) zu gedenken, welche beweisen, dass man unter Wasser untergetaucht,

*) Berichte der sächs. Ges. d. Wiss. 1851. S. 30.

nachdem zuvor auch die Gehörgänge sorgfältig mit Wasser gefüllt sind, wodurch das Trommelfell ausser Wirkung gesetzt wird, das Localgefühl des Schalles völlig verliert; wir nehmen den Schall nur noch als eine Empfindung im Innern des Kopfes wahr, ohne unterscheiden zu können, ob er von rechts oder links kommt, wogegen diese Unterscheidung bleibt, wenn wir untertauchen, während die Gehörgänge noch mit Luft gefüllt sind; wonach jenes Localgefühl »nicht in der Empfindung der Gehörnerven, sondern in der des äusserst nervenreichen Trommelfells liegt.«

Halte ich zwei an einander angeschlagene gleiche oder nahe gleiche Stimmgabeln vor beide Ohren oder stecke sie mit den Stielen in die Ohren, so glaube ich auch, je nachdem ich die Aufmerksamkeitsspannung auf das rechte oder linke Ohr verlege, den Ton blos rechts oder links zu hören. Doch ist diess unstreitig nur eine Sache der Imagination. Denn wenn ich eine stark tönende Stimmgabel oder einen angeschlagenen Klangstab vor mir habe, oder auf einen rollenden Wagen auf der Strasse horche, vermag ich dadurch, dass ich die Aufmerksamkeit mehr auf das eine oder andre Ohr richte, oder mit andern Worten, mehr mit dem einen als andern Ohre zu hören suche, keineswegs die Täuschung zu erzeugen, als wenn sich der Schall mehr vor diesem oder jenem Ohr befinde; da mir der Ort, woher der Schall kommt, hier nicht nur bekannt, sondern auch keine Wahl zwischen zwei Orten ist, wie bei dem Versuche mit den Stimmgabeln vor beiden Ohren.

Auch wird bei diesem Versuche mit den beiden Stimmgabeln der Toneindruck keinesfalls schwächer, wenn ich die Aufmerksamkeitsspannung einseitig richte, als wenn ich sie gleichmässig beiden Ohren zuwende: ich kann also nicht durch Abstraction der Aufmerksamkeit von einer Seite an der Tonstärke dieser Seite abstrahiren.

Dove*) bemerkt, dass, wenn man von zwei unisono tönenden Stimmgabeln die eine vor das eine, die andre vor das andre Ohr hält, und nur eine derselben um ihre Axe dreht, nicht ein blosses Anschwellen und Abnehmen des Tones gehört wird, sondern der Ton alternirend mit dem einen und andern Ohre gehört zu werden scheint, und erklärt diesen Erfolg so: »bekanntlich stumpft sich der Eindruck auf das Auge durch Continuität in der Weise ab, dass man, wenn es lange eine Farbe gesehen, und nun ihm zwei abwechselnd geboten werden, es sich nur

*) Pogg. CI. 492 oder Berichte der Berl. Akad. 1858. S. 291.

des Eindrucks der einen bewusst wird. Diesem analog scheint der vorhergehende akustische Versuch zu sein. Das Trommelfell des einen Ohres ist in Schwingungen versetzt, während das des andern noch ruhend dieselben erst beginnt. Statt einer unmittelbaren Combination beider Eindrücke werden wir uns des neuen als eines überwiegenden bewusst, obgleich die Intensität beider Erregungen dieselbe ist.«

Der Dove'sche Versuch gelingt mir sehr wohl, wenn ich nicht versuchen will, die Stimmgabel continuirlich fortzudrehen, was nicht leicht gleichförmig gelingt, sondern in langsamem Tempo um 90° abwechselnd hin- und zurückdrehe, oder überhaupt einen der Versuche mit zwei Gabeln, wodurch sich nach S. 543 die Stösse nachahmen lassen, hinreichend langsam anstelle; denn in der That hat abwechselnde Näherung und Entfernung der vor einem Ohr schwingenden Stimmgabel bezüglich dieses Ohres, während die andre vor dem andern Ohre festgehalten wird, ganz denselben Erfolg, und sogar noch sicherer. Bei der Näherung geht der Ton jedesmal auf das Ohr über, dem die Gabel genähert wird, bei der Entfernung auf das andre Ohr, vor dem die andre Gabel in fester Lage schwingt.

Mag man aber die Gabel vor dem einen Ohre drehen oder abwechselnd nähern und entfernen, so ist zum Gelingen des Versuchs vorausgesetzt, dass sie nicht in erheblich grösserer Entfernung als die andre vom Ohre bleibe; denn ist diess der Fall, so wechselt der Ton nicht zwischen beiden Ohren, sondern bleibt vor dem Ohre, vor dem sich die nähere Gabel findet, und scheint sich nur hier abwechselnd zu verstärken und zu schwächen.

Es schien mir von Interesse zu untersuchen, wie sich die Erscheinung verhält, wenn man dieselben Versuche mit so rascher Bewegung der gedrehten oder geschwungenen Gabel wiederholt, dass der Eindruck der Stösse entsteht, also vor einem Ohre eine tönende Gabel festhält, indess man eine vor dem andern Ohre tönende Gabel rasch hin und her um ihre Axe dreht oder rasch vom Ohre weg und nach dem Ohre zu schwingt. Wo und wie glaubt man den Ton zu hören?

Stellt man Versuche hierüber an sich selbst an, so thut man wohl, um die Stimmgabeln in möglichst constanter Entfernung von den Ohren zu erhalten, die herabgeschlagenen Oberarme durch Anlegen an den Brustkasten zu fixiren, wo dann die aufgerichteten Unterarme mit den Händen, in denen die angeschlagenen Gabeln vor den Ohren gehalten

werden, weniger leicht ihre feste oder mittlere Lage ändern, was sonst namentlich bei der bewegten Gabel leicht der Fall ist. So nun findet man Folgendes:

1) Hält man die an einander angeschlagenen gleichen oder nahe gleichen Stimmgabeln (bei nicht zu grosser Verschiedenheit des Gehörs beider Ohren) in gleiche Entfernung von den Ohren, und bewegt abwechselnd, in nicht zu langsamem Wechsel, um der Aufmerksamkeit nicht Zeit zu lassen, sich in denselben Toneindruck zu vertiefen, die Gabel vor dem linken und vor dem rechten Ohre, indess man zugleich jedesmal die andre vor dem andern Ohre festhält, so scheint der ganze Ton als intermittirender oder periodisch anschwellender jedesmal auf das Ohr überzugehen, wo die Gabel bewegt wird, und der gleichförmige Ton auf dem andern Ohre wird scheinbar vernachlässigt, obwohl er doch wirklich gehört wird, da man bei Entfernung der festen Stimmgabel sofort die Schwächung des intermittirenden Tons erkennt.

2) Stellt man denselben Versuch mit langsamem Wechsel oder ohne Wechsel an, indem man die eine Gabel in standhaft fester Lage und die andre in Bewegung immer vor demselben Ohre behält, so kann man bei darauf gerichteter Aufmerksamkeit sich ganz gut sowohl des Daseins eines gleichförmigen Tons vor dem einen, als eines intermittirenden Tones vor dem andern Ohre bewusst werden, und beide in gewissem Sinne scheiden, wie es bei dem Versuche mit den Uhren der Fall.

3) Hält man von den gleich stark tönenden Stimmgabeln die eine erheblich näher als die andre an das Ohr, so scheint der intermittirende (oder periodisch anschwellende) Ton vorzugsweise oder allein vor dem Ohre zu sein, dem sich die Gabel näher findet, sei es die feste oder bewegte.

Lasse ich diesen Versuch durch einen Andern an mir vornehmen, d. h. die feste und bewegte Gabel vor meine Ohren halten, ohne dass ich weiss, vor welchem sich die eine und andre findet, indem ich zugleich die Augen schliesse, so möchte ich, falls sich die ruhende Gabel näher am Ohre befindet, nach dem scheinbaren Orte der Stösse schwören, die bewegte Gabel finde sich vielmehr vor diesem Ohre; ich täusche mich regelmässig, und finde die Täuschung manchmal lächerlich, wenn ich bei schneller Oeffnung der Augen die Gabel vor dem entgegengesetzten Ohre in Bewegung sehe, als das ist, vor welchem ich sie suchte; wogegen ich den Ort der Stösse auch mit geschlossenen Augen richtig

beurtheile, wenn beide Gabeln ungefähr gleich weit von den Ohren gehalten werden, oder die bewegte näher als die feste. Inzwischen ist nicht zu verkennen, dass die Beurtheilung hiebei minder leicht fällt, als wenn man den Versuch an sich selbst anstellt, so dass das Wissen, vor welchem Ohre man die Gabel schwingt, den Eindruck oder seine Auffassung unstreitig mitbestimmt.

Diese Versuche, mit Grabau, Zöllner und noch einer andern Person (mit ganz gleich gut hörenden Ohren) bei geschlossenen Augen wiederholt, gaben dasselbe Resultat. Sie suchten mit geschlossenen Augen jedesmal den Ort der Stösse da, wo sich die nähere Gabel fand, mochte es die feste oder bewegte Gabel sein; gaben ihn aber richtig an, wenn sich die Gabeln gleich weit von den Ohren befanden.

Von diesen drei Versuchen hat der erste das sehr Auffällige, dass wir in Widerspruch mit dem, was durch die vorher angeführte Erfahrung bewiesen wird, den Ton vor dem Ohre zu hören glauben, was im Ganzen einen geringern Toneindruck empfängt, da bei jeder Entfernung der Gabel von diesem Ohre oder Drehung in die Minimumlage sich der Ton schwächt, und die Dove'sche Erklärung reicht unstreitig für diesen Fall nicht aus. Man kann nun geneigt sein, ihn entsprechend zu erklären, als den Fall, den nach den Versuchen des 7. Abschnitts die Augen darbieten, wenn dem einen continuirliches Weiss, dem andern auf correspondirenden Stellen eine Abwechselung von Weiss und Schwarz dargeboten wird; der Contrast macht den Eindruck des Schwarz und Weiss über den des gleichförmigen Weiss überwiegend, ungeachtet doch das gleichförmige Weiss im Ganzen mehr Lichteindruck erzeugt.

Inzwischen findet hier nur Analogie nicht Uebereinstimmung statt. Denn bei den Augen wird das gleichförmige Weiss auf einer Netzhaut wirklich dem contrastirenden Schwarz auf der andern gegenüber ziemlich vernachlässigt, bei den Ohren aber wird der gleichförmige Ton auf einem Ohre nicht dem contrastirenden Eindruck auf dem andern gegenüber vernachlässigt, sondern nur auf dasselbe Ohr mit diesem verlegt, und setzt sich mit ihm zu einem abwechselnd anschwellenden und abnehmenden oder selbst scheinbar intermittirenden Tone zusammen. In der That brauchen wir, wie schon bemerkt, blos die in fester Lage vor dem einen Ohr schwingende Gabel von diesem zu entfernen, so dass die bewegte Gabel vor dem andern allein tönt, so werden wir sogleich die Schwächung des Totaleindrucks gewahr. Meines Erachtens ist daher

hier zwar wirklich ein Contrasteffect zu suchen, der sich aber beim Ohre in andrer Weise als beim Auge äussert.

Hienach dürfte denn aber auch der Contrast bei dem Dove'schen Versuch seine Rolle mit spielen. Wird die vor einem Ohre schwingende Gabel von diesem entfernt oder in die Minimumlage gedreht, so tritt für dieses Ohr die Stille gegen den vorherigen Ton in Contrast, und erscheint um so auffälliger als Stille, umgekehrt, wenn die Gabel dem Ohre genähert wird, tritt der Ton daselbst gegen die vorherige Stille in Contrast, und erscheint dadurch stärker als der gleichförmige Ton vor dem andern Ohr. Sollte ein Spiel der Ermüdung und Wiedererholung den Erfolg bedingen, so müsste man wohl erwarten, dass, wenn ein Ohr vor Anstellung des Versuches absichtlich stark ermüdet wird, der Dove'sche Versuch den Erfolg versagen, und der Ton beständig auf Seiten des nicht ermüdeten Ohrs bleiben würde. Um diess zu prüfen, habe ich vor Anstellung des Dove'schen Versuchs wiederholt hinter einander eine möglichst stark tönende Stimmgabel mit dem Stiel in das Ohr selbst gesteckt, wo der Klang sehr stark ist, und nach dieser wiederholten Ermüdung sofort den Dove'schen Versuch angestellt. Mochte ich aber die Gabel vor dem ermüdeten oder nicht ermüdeten Ohre bewegen, so fiel der Versuch merklich eben so als ohne vorherige Ermüdung aus.

Von andrer Seite könnte man erwarten, dass bei rascher Bewegung der Gabel sich der Eindruck einer erhöhten Stille und eines verstärkten Tons im Ganzen compensiren müsste; und also bei dem Versuch 1) (Seite 551) kein Grund sei, dass der Ton auf Seiten der bewegten Gabel gesucht wird. Aber auch, wenn Weiss und Schwarz mit einander contrastiren, erscheint das Schwarz schwärzer, das Weiss weisser, und der Wechsel wirkt noch überdiess als ein Reiz; um so mehr wenn er sich rasch wiederholt. Dieser Reiz des Wechsels bleibt immer bestehen, wenn auch jene Erhöhung des Eindrucks der Stille und der Stärke des Tons sich im Ganzen ihrem absoluten Werthe nach compensiren.

Vom Contrast abhängig ist unstreitig auch der Erfolg folgenden Versuches.

Wenn ich eine tönende Stimmgabel irgendwo auf die Kopfknochen aufsetze, und daselbst fast ganz ausklingen lasse, so dass ich nur noch eine Spur von Ton wahrzunehmen glaube, dann die Gabel vom Kopfe

abhebe, so fühle ich im Gegensatz der jetzt erst eintretenden vollen Stille gegen den Ton, dass jene Spur von Ton noch viel weiter von der wirklichen Stille lag, als es mir schien, da ich die letzte Tonspur zu hören glaubte.

XIX.

Einige Zusätze.

Während des sich längere Zeit hinziehenden Drucks dieser Abhandlung habe ich noch Gelegenheit gefunden folgende nachträgliche Bemerkungen und Beobachtungen zu machen.

Die kleine Statistik der Personen, welche leichter respectiv ungleichseitiges oder gleichseitiges Doppeltsehen haben, erweitert sich noch etwas dadurch, dass von 4 in dieser Hinsicht neu geprüften Personen drei (Kohlschütter, Nies und v. Zahn) leichter ungleichseitiges als gleichseitiges Doppeltsehen erzeugten, einer (H. Hankel) umgekehrt. Auch habe ich seitdem in Erfahrung gebracht, dass Zöllner, der jetzt gleich leicht beide Arten Doppelbilder erzeugt (vgl. S. 368), die Erzeugung des ungleichseitigen Doppelbildes erst durch Uebung lernte, da ihm anfangs das gleichseitige Doppeltsehen natürlicher war. Hienach erzeugten im Ganzen von vorn herein 13 leichter ungleichseitiges, 8 gleichseitiges Doppeltsehen.

Wie S. 506 bemerkt, fand sich bei einem meiner Mitbeobachter (v. Zahn) eine Ungleichheit in der Helligkeit beider Augen mit einer Ungleichheit des Farbensehens in Beziehung, indem das linke hellere Auge weisse Objecte vielmehr röthlich, das rechte grünlich sieht. Es ist mir seitdem ein ähnlicher Fall bei einem andern Individuum (Stud. Chalybäus) vorgekommen, wo ebenfalls das linke Auge heller, und mehr röthlich, das rechte dunkler, aber vielmehr bläulich als grünlich sieht.

Versuche über die Nachbilder monocularer blendender Eindrücke, welche ich S. 497 noch für wünschenswerth hielt, sind, wie mich folgende Notiz in Valentins Lehrb. der Physiologie (II. 482) nach Brewster's Handb. d. populären Optik (II. 91)*) belehrt, schon früher mit weissem Lichte angestellt worden, woraus sich zu ergeben scheint, dass auch für die, von der Nachdauer abhängigen positiven Phänomene des Far-

*) Die Originalangaben sind mir für den Augenblick nicht zugänglich.

benabklingens das complementäre Verhältniss zwischen beiden Augen besteht, welches sich durch meine Versuche für die negativen Nachfarben herausgestellt hat.

»Schon Newton hatte die Bemerkung gemacht, dass das Lichtphantom (nach Blick in ein Sonnenbild) selbst in demjenigen Auge welches der Einwirkung des Lichts nicht ausgesetzt war, mit grosser Lebhaftigkeit erscheint. Brewster vervollständigte diese Erfahrung dahin, dass sich das Farbenbild in dem andern Bulbus zum Theil umkehrt.«

Zu den Versuchen über die Dauer der Nachfarben, welche im 13. und 14. Abschnitte angeführt sind, trage ich noch einige von Kohlschütter nach, deren Vergleich insbesondre mit den entsprechenden von Grabau interessant ist, sofern bei Grabau eine sehr leichte Ermüdungsfähigkeit der Augen und demgemäss lange Nachdauer der Farben, bei Kohlschütter aber das Entgegengesetzte statt fand, so dass er bei 20 Sec. Blick durch Farbengläser in den Himmel doch viel geringere Zahlen für die Dauer der Nachfarben erhielt, als Grabau bei 6 Sec., die aber doch zu wesentlich denselben gesetzlichen Ergebnissen als die Grabau'schen und übrigen führen, und hienach vorzüglich geeignet sind, in der Zusammenstellung damit zu beweisen, dass diese Ergebnisse von der Individualität unabhängig sind. So zeigt sich in dem Versuche mit zweiseitiger Farbenreizung die Dauer der Nachfarben auch hier ohne Vergleich grösser nach Reizung beider Augen mit complementären Farben als mit derselben Farbe, und in den Versuchen mit einseitiger Farbenreizung das Uebergewicht der Methode β über α (S. 490) in Betreff der Dauer der Gleichfarbe, die Gleichwerthigkeit beider Methoden für die Complementärfarbe, und das Uebergewicht der Dauer der Complementärfarbe über die Gleichfarbe nach Methode α, das sich aber bei Methode β durch den Vortheil dieser Methode für die Gleichfarbe hier ganz compensirt. Ausserdem findet sich das Interessante, dass die, nur in der Sehweite, aber nicht in der Helligkeit verschiedenen zwei Augen Kohlschütters sich nach einseitiger Farbenreizung doch nicht nur in der Dauer der Nachfarben sehr verschieden verhalten, sondern auch bei gelbem und violetem Glase verschieden beschaffene Nachfarben geben, ungeachtet ohne vorherige Anwendung von Farbengläsern das Doppelbild eines weissen Feldes Kohlschütter'n zwei gleich helle und farblose Componenten giebt.

Das rechte Auge ist bei Kohlschütter von 6 bis 22 Zoll, das linke von 9 Zoll bis ins Unbestimmte accommodationsfähig; er wendet un-

gleichseitiges Doppeltsehen an, wobei er die Augen sehr nahe an das Object hält. Alle folgenden Versuche sind bei bedecktem Himmel angestellt.

Zum Beweise der geringen Ermüdungsfähigkeit von Kohlschütters Augen kann folgender vorläufige Versuch dienen.

Ein weisses Feld auf schwarzem Grunde mit beiden Augen einmal 15 Sec., ein andresmal 30 Sec. lang einfach fixirt, gab auf einem nachher vorgeschobenen weissen Grunde nach der Weise der Versuche des 9. Abschnitts weder das einemal noch andremal ein merkbares Nachbild, indess ich selbst bei einem vergleichungsweise zur selben Zeit angestellten Versuche nach 15 Sec. langer Fixirung ein ungefähr eben so lange währendes Nachbild erhielt.

Wenn 20 Sec. mit einem Auge in den Himmel geblickt und dabei das andre Auge geschlossen ward, so zeigten sich allerdings Helligkeitsunterschiede an einem nachher auseinandergeschobenen Doppelbilde; die aber viel schneller verschwanden, als ich es bei andern Personen unter gleichen Verhältnissen gefunden; worüber ich die Versuche der Kürze halber übergehe.

Bei den folgenden Versuchen wurde stets 20 Sec. langer Blick in den Himmel, zwischen den einzelnen Versuchen 1½ Min. Zwischenzeit und noch 15 Sec. Blick auf einen schwarzen Grund, vor dem Uebergange zu einem neuen Versuche angewendet.

1) Versuche mit doppelseitiger Farbenreizung zum Vergleiche von *E* und *C*, Methode *β*. S. 478 f.

Weder das hellgrüne Glas vor beiden Augen, noch das rothe vor beiden Augen gab nach *E*-*β* eine merkliche Nachfarbe (jeder dieser Versuche zweimal); das grüne Glas vor dem rechten, das rothe vor dem linken Auge hingegen gab nach *C*-*β* eine nach 90 Sec. noch nicht ganz erloschene grüne Nachfarbe, nichts von einer rothen Nachfarbe (zweimal wiederholt). Das rothe Glas vor dem rechten, das grüne vor dem linken Auge gab einmal 35, das andremal etwas über 60 für die grüne Nachfarbe, das erstemal nur eine schnell vorübergehende, das zweitemal 20 Sec. dauernde rothe Nachfarbe.

2) Versuche mit einseitiger Farbenreizung zum Vergleiche von *α*) und *β*). S. 490.

Nach den vorigen Versuchen wurden an demselben Tage mit dem

hellgrünen Glase folgende Resultate erhalten, welche wie die S. 497 ff. zu verstehen sind.

Glas	α				β			
	A		B		A		B	
	r	l	r	l	r	l	r	l
Hellgrün	11	12	20	22	23	22	0	0

3) Versuche an einem spätern Tage mit Roth, Röthlichgelb, Hellgrün, und an noch einem andern mit Dunkelgrün, Blau, Violet, gaben folgende Zahlen:

Glas	α				β			
	A		B		A		B	
	r	l	r	l	r	l	r	l
Roth	0	60	168	140	0	56	200	112
R.-Gelb	0	0	135**)	8*)	0	4	108**)	19*)
H.-Grün	7	6	8	17	260	12	0	22
D.-Grün	0	10	10	12	28	27	0	24
Blau	0	0	6	18	17	16	6	38
Violet	0	0	130	24	140***)	40	52	22
	7	76	457	219	445	165	367	237
	83		676		610		604	

Hienach

	A	B	α	β	Summa
r	452	824	464	812	1276
l	191	456	295	402	647

Bei dem gelben Glase wurde zwar im linken Auge das Violetblau richtig als Complementärfarbe (mit 8 und 19 Dauer) erhalten, hingegen im rechten statt dessen Blaugrün (mit 135 und 108 Dauer) von gleicher Beschaffenheit als die Complementärfarbe bei rothem Glase. Bei dem violeten Glase andrerseits ward im linken Auge (mit 140) keine eigentliche Gleichfarbe sondern das Blaugrün der Versuche mit gelbem Glase erhalten.

*) Violetblau.
**) Blaugrün.
***) Blaugrün.

Auch Kohlschütter hat wie Grabau (S. 509) bemerkt, dass sehr intensive Nachfarben verhältnissmässig sehr rasch abfielen; hingegen schwache verhältnissmässig viel langsamer abnahmen und sich schwer der Dauer nach sicher bestimmen liessen.

Mehrfach bemerkte er bei den einseitigen Farbenreizungsversuchen, dass die Nachfarbe, und zwar sei es Gleichfarbe oder Complementärfarbe, erst 1 bis 2 Sec. bedurfte, ehe sie deutlich wurde, was Betreffs der Gleichfarbe in sofern von Interesse ist, als dadurch bewiesen wird, dass auch die, durch den primären Eindruck in einem Auge antagonistisch erweckte complementäre Farbe im andern ihre Nachdauer hat, da jenes Zaudern in der Entwicklung der Gleichfarbe unstreitig nur von einer Nachdauer dieser Complementärfarbe ableitbar ist.

Die Merkwürdigkeit, welche sich bei mir in den zusammengehörigen Versuchen eines und desselben Tages (Tabelle II. S. 502) und den Nies'schen Versuchen (Tabelle VII und VIII. S. 505 und 506) gezeigt hat, dass die Farben in Summa im rechten Auge gerade noch einmal so lange standen als im linken, findet sich auch bei Kohlschütter wieder; so dass man mit Rücksicht, dass ein so einfaches Zahlenverhältniss in der Dauer sich auch nach einer andern Beziehung in einem andern Falle herausstellte (vgl. S. 506), fast versucht sein könnte, hier eine Neigung zu einfachen Zahlenverhältnissen zu vermuthen; wenn nicht eine solche doch an sich zu unwahrscheinlich wäre.

Alle Versuche dieser Abhandlung sind im Jahre 1859 angestellt, und die in der Abhandlung vorkommenden Daten also auch auf dieses Jahr zu beziehen.

XX.

Resumé.

1) Die Streitfrage bezüglich der sogenannten Identität der Netzhautstellen ist einer klaren Erörterung und bestimmten Entscheidung nur in sofern fähig, als man der Frage, ob correspondirende Stellen beider Netzhäute wie eine einzige identische bezüglich ihrer Leistung beim Sehen zusammenwirken, die Frage substituirt, wiefern sie so zusammenwirken; und es gelten in dieser Hinsicht nach der Discussion und Zusammenstellung früher bekannter und durch diese Abhandlung hinzugefügter neuer Thatsachen folgende Bestimmungen.

Es ist in sofern gleichgültig, ob zwei Eindrücke auf correspondirenden (sog. identischen) Stellen beider Netzhäute oder einer wirklich identischen Stelle einer und derselben Netzhaut zusammentreffen, als sie beidesfalls gleich vollständig in einen Eindruck verschmelzen, einen Raumpunct in der Erscheinung decken, nur eine qualitativ einfache Resultante der Empfindung geben; in sofern aber nicht gleichgültig, als sich *a*) an die verschiedene Weise, wie die Verschmelzung zu Stande kommt, ein unterscheidendes Gefühl knüpft, welches bei den stereoskopischen Versuchen eine Rolle spielt, als *b*) die Unterscheidung gegebener Eindrücke verschieden leicht erfolgt, je nachdem ein Eindruck von einem differenten derselben Netzhaut, oder dem damit correspondirenden disparaten der andern Netzhaut zu unterscheiden ist;*) als *c*) die Grösse und Beschaffenheit einer einfachen Resultante aus gegebenen Eindrücken verschieden und durch Mitbedingungen verschieden bestimmt sein kann, je nachdem diese Eindrücke auf correspondirenden Stellen oder auf einer wirklich identischen Stelle zusammentreffen (Abschnitt 2).

2) Zwischen beiden Netzhäuten besteht ein antagonistisches Verhältniss, welches sich eben sowohl bezüglich der Helligkeits- als Farbenempfindung äussert, in erster Beziehung durch gegenseitige Beschränkung der Helligkeitsempfindung, in letzter durch Hervorrufung complementärer Farbenstimmungen, wie durch die Thatsachen bewiesen wird, die in den Abschnitten 11 bis 14 angeführt, und in den folgenden Sätzen 3 bis 9 resumirt sind.

3) Ist eine Netzhaut *A* mit Licht von gegebener Intensität gereizt, die andre *B* dunkel, so nimmt die Helligkeit des gemeinsamen Gesichtsfeldes vielmehr ab als zu, wenn man bei gleichbleibender Intensität auf *A* die Lichtintensität auf *B* steigert, bis zu einer gewissen Gränze (wo die Intensität auf *B* etwa 2 bis 5 Hunderttheile der Intensität auf *A* beträgt), von wo an die Helligkeit, bei weiterer Steigerung der Intensität auf *B*, wieder wächst; was sich dadurch repräsentiren lässt, dass, während das Wachsthum des Lichtreizes auf jeder Netzhaut an sich nur zur Verstärkung der Empfindung wirken kann, das gleichzeitige Dasein des Lichtreizes auf beiden dessen Leistung für die Empfindung wechselseits beschränkt, und dass diese beschränkende Wirkung bis zu gewissen

*) Ueber den Begriff differenter und disparater Stellen s. S. 340.

Gränzen jene Steigerung überwiegt, über gewisse Gränzen hinaus davon überboten wird (Abschnitt 11).

4) Wenn zwei disparate Stellen beider Netzhäute mit Licht gereizt sind, so erscheint das Licht auf jeder insbesondere heller oder minder hell, je nachdem das Licht auf der andern ausgeschlossen oder wieder zugelassen wird. Am augenfälligsten ist der Erfolg, wenn beide disparate Stellen mit ungleicher Intensität gereizt sind und das stärker mit Licht gereizte Auge abwechselnd verschlossen und geöffnet wird. Der Versuch gelingt auch, wenn das Bild, dessen Helligkeitsänderung man beobachtet, durch ein Nadelloch in einem Kartenblatte betrachtet wird, zum Beweise, dass er von Pupillenänderungen nicht wesentlich abhängig ist, und giebt einen in der Richtung constanten doch bei verschiedenen Personen sehr ungleich starken Erfolg (Abschnitt 12).

5) Wenn bei übrigens dunklem Grunde beider Augen eine Netzhaut *B* an einer Stelle farbig gereizt ist, so erscheint eine, mit (hinreichend abgedämpftem) weissem Licht gereizte, disparate Stelle der andern Netzhaut *A* mit der Complementärfarbe dazu (Abschnitt 14. S. 486).

6) Wenn eine Netzhaut *B* mittelst Blicks in den Himmel durch ein Farbeglas eine gewisse Zeit hindurch mit einer gewissen Farbe gereizt war, indess zugleich die andre *A* entweder *α)* dunkel oder *β)* mit weissem Lichte gereizt war, so hinterbleibt nach der Reizung eine, zum Farbenglase complementäre subjective Farbenstimmung*) auf der Netzhaut *B*, eine mit dem Glase gleichfarbige Stimmung auf der Netzhaut *A*, welche Farbenstimmungen durch abwechselnden Schluss eines und des andern Auges abwechselnd, durch Erzeugung des Doppelbildes eines weissen Objectes auf schwarzem Grunde gleichzeitig, in Absonderung von einander zur Geltung gebracht werden können (Abschnitt 14 und 19).

7) Von den solchergestalt gleichzeitig zur Geltung gebrachten Nachfarben steht die Gleichfarbe im Auge *A* im Allgemeinen minder lange als die Complementärfarbe im Auge *B*, wenn (nach Methode *α)* während der Farbenreizung von *B* das Auge *A* geschlossen war; was für eine stärkere Entwickelung der Complementärfarbe als Gleichfarbe spricht. Wird jedoch (nach Methode *β)* während der Farbenreizung von *B* das Auge *A* offen gehalten, so kann dieses Uebergewicht

*) Ueber den Begriff subjectiver Farbenstimmungen s. S. 469.

der Dauer der Complementärfarbe über die Gleichfarbe verschwinden, wovon der Grund entweder darin gesucht werden kann, dass die Gleichfarbe sich in einem für alle Farbenstralen ermüdeten Auge verhältnissmässig stärker entwickelt, als in einem gar nicht ermüdeten, oder wahrscheinlicher darin, dass die Gleichfarbe in dem vermöge der Ermüdung für alle Farbenstralen dunkler erscheinenden Weiss leichter zur Geltung kommt (Abschnitt 14 und 19. S. 491. 497 ff.).

8) Wenn beide Augen mit zu einander complementären Farben gereizt waren, so hinterbleiben in ihnen subjective complementäre Farbenstimmungen, die durch geeignete Massnahmen beliebig zu Weiss combinirt, oder abgesondert zur Geltung gebracht werden können (Abschnitt 13).

9) Die complementären Nachfarben, die man nach complementärer Farbenreizung beider Augen abgesondert aber gleichzeitig an Weiss zur Geltung bringt, haben eine unvergleichlich grössere Dauer, als die einzige Nachfarbe, die nach Reizung beider Augen mit einer und derselben Farbe zur Geltung gebracht wird. Auch wird die Dauer der complementären Nachfarben, sei es, dass sie durch zweiseitige oder einseitige Farbenreizung hervorgerufen werden, durch ihr gleichzeitiges Erscheinen sehr befördert, indess eine jede schneller vergeht, wenn man sie ohne die andere allein zur Geltung bringen und darin erhalten will; nachdem sie aber vergangen ist, durch Geltendmachung der andern wieder belebt werden kann (Abschnitt 13 und 14. S. 476 ff. 478 ff. 492 f. 494 f.).

10) Ein- und dasselbe weisse Object auf schwarzem Grunde erscheint, als Doppelbild in zwei übrigens ungleich beleuchteten Augen aufgefasst, dunkler in dem heller beleuchteten, heller in dem mehr beschatteten Auge, was als ein Erfolg monocularer Contrastwirkung anzusehen ist; zugleich zeigt sich ein Farbenunterschied der Bilder, der bis jetzt noch nicht erklärt ist (Abschnitt 15).

11) Durch geeignete Combination heterogener Deckung*) und monocularer Contrastwirkung lassen sich scheinbar anomale Phänomene erzielen, der Art, dass gleich hell beleuchtete Objecte ungleich hell, heller erleuchtete dunkler erscheinen können (Abschnitt 16).

12) Der mehrfach behauptete Einfluss der Aufmerksamkeit, bei

*) Ueber den Begriff heterogener Deckung s. S. 340.

dem sog. Wettstreit der Sehfelder beliebig die eine oder andre der wettstreitenden Farben zur vorwiegenden Geltung zu bringen, scheint nur auf einem Nebeneffecte der Aufmerksamkeit zu beruhen, und eine bestimmte Beziehung der Richtung der Aufmerksamkeit zur Richtung des Erfolges nicht statt zu finden (Abschnitt 8).

13) Intensive Nachbilder können auch von Objecten entstehen, von denen die Aufmerksamkeit ganz abgezogen war, und es ist sogar noch fraglich, ob die verstärkte Aufmerksamkeit, mit der man ein Object auffasst, etwas zur Verstärkung der Dauer und Intensität des Nachbildes beiträgt (Abschnitt 9. S. 412 f.).

14) Wenn ein Object als Doppelbild betrachtet worden ist, so haben die Nachbilder seiner Componenten nur $^1/_2$ bis $^1/_3$ so lange Dauer, als das einfache Nachbild, was man erhält, wenn man das Object in gewöhnlicher Weise einfach mit beiden Augen beobachtet hatte (Abschn. 9).

15) Subjective complementäre Nachbarfarben erscheinen leichter bei indirectem als directem Sehen (Abschn. 17. S. 535).

16) Wenn man ein Auge durch den Blick in den Himmel oder auf eine gleichförmig erleuchtete Fläche unter Schluss des andern Auges ermüdet hat, so kann man, wenn man nachher das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde erzeugt, an dem Helligkeitsunterschiede beider Bilder den Einfluss der Ermüdung constatiren und durch Vornahme photometrisch bestimmter grauer Gläser vor das nicht ermüdete Auge, welche geeignet sind, sofort oder nach gemessener Zeit Compensation zu bewirken, messende Versuche über die Abhängigkeitsverhältnisse der Ermüdung durch den Lichtreiz anstellen, welche verdienen, weiter verfolgt zu werden (Abschnitt 10).

17) Schwache Farbenschimmer auf Weiss bleiben gleich merklich, wenn man die Intensität des Weiss und der Farbe in gleichem Verhältniss erhöht oder vermindert, jedoch mit einer obern und untern Gränze der Gültigkeit dieses Gesetzes (S. 376).

18) Der Gebrauch der Augen mit einer gewissen Aufmerksamkeit und Intention hat sich bei einem Zustande sehr verdorbener Augen von sehr wohlthätigen Folgen gezeigt (Abschnitt 3).

19) Die Verhältnisse des Hörens mit beiden Ohren sind bis zu gewissen Gränzen den Verhältnissen des Sehens mit beiden Augen analog; jedoch reicht diese Analogie nicht sehr weit (Abschnitt 18).

20) Wenn man vor einem Ohre einen intermittirenden, vor dem an-

dern einen gleichförmigen Ton durch zwei gleiche oder nahe gleiche Stimmgabeln erzeugt, deren eine man rasch um ihre Axe hin- und herdreht oder abwechselnd dem Ohre nähert und davon entfernt, so ist man unter sonst gleichen Umständen geneigter, den ganzen Ton auf der Seite zu suchen, wo der Ton intermittirt, ungeachtet die Summe der Toneindrücke auf dieser Seite durch die Intermissionen vermindert wird (S. 550 ff.).

INHALT.

Seite

I. Allgemeine Inhaltsangabe, Nomenclatur 339
II. Ueber die Frage nach der Identität der Netzhautstellen im Allgemeinen. 340
III. Einschaltungsweise Schilderung eines Zustandes sog. verdorbener Augen. 345
IV. Allgemeine Vorbemerkungen zu den Versuchen. Photometrische Verhältnisse der zu den Versuchen gebrauchten dunkeln und farbigen Gläser. 351
V. Ueber die Erzeugungsweise der Doppelbilder und einige allgemeine Verhältnisse derselben 366
VI. Von einigen praktischen Benutzungsweisen der Doppelbilder. Ein Gesetz der Merklichkeit schwacher Farbenschimmer 375
VII. Zusammenstellung mehr oder weniger bekannter Thatsachen bezüglich der Verhältnisse der monocularen und binocularen Bilder 378
VIII. Vom Einflusse der Aufmerksamkeit 392
IX. Vergleichsweise Dauer der Nachbilder von binocularen und monocularen Bildern und je nach dem Zustande der Aufmerksamkeit 408
X. Einseitige Ermüdungsversuche des Auges 413
XI. Ueber die resultirende Helligkeit des Gesichtsfeldes bei ungleicher Helligkeit beider Netzhäute. Der paradoxe Versuch 416
XII. Ueber den wechselseitigen Einfluss der Erleuchtung begränzter Stellen beider Netzhäute 463
XIII. Zusammensetzung subjectiver Färbungen auf beiden Netzhäuten . . . 469
XIV. Wirkungen monocularer Farbenreizung 481
Vergleichsweise Versuche über die Länge der Nachdauer der Gleichfarbe und Complementärfarbe bei einseitiger Farbenreizung nach Methode α) und β) 497
XV. Der seitliche Fensterversuch 511
XVI. Erscheinungen, die aus dem Zusammenwirken des Contrastes und der heterogenen Deckung hervorgehen 524
a) Die Scheidewandsversuche 525
b) Die Röhrenversuche 528
c) Der binoculare Streifenversuch. 531
XVII. Ueber einige Erscheinungen des indirecten Sehens 534
XVIII. Ueber einige Verhältnisse des zweiseitigen Hörens 536
XIX. Einige Zusätze 554
XX. Resumé 558

Berichtigung.

S. 344. Z. 10 v. o. statt verschiedenen l. correspondirenden.

4.

BEITRÄGE

ZUR

ANATOMIE DER CYCADEEN,

VON

G. METTENIUS.

MIT 5 TAFELN.

Die Untersuchungen über die Structur der Cycadeen, welche wir Brongniart (Ann. d. sc. nat. XVI. 369; Arch. d. Mus. I. 405), von Mohl (Abh. d. Münch. Acad. I. 399; Verm. Schrift. 195), Miquel (Linn. 18, 125), Karsten (Abh. d. Berl. Acad. 1856. 193) u. A. verdanken, haben dargethan, dass der Wuchs und Bau der Stämme dieser Familie weder mit den Farnbäumen noch den Palmen einen Vergleich, den entfernte Aehnlichkeiten verschiedener Organe zulässig scheinen liessen, rechtfertigte, vielmehr dem Typus der Dikotyledonen, sowohl in der Anordnung, wie in der Fortbildung der Gefässbündel folge und in der Beschaffenheit der Elementarorgane ihres Holzes eine Bestätigung der nahen Verwandtschaft von Coniferen und Cycadeen gefunden. Zugleich wurde von den genannten Forschern unter den Eigenthümlichkeiten der Cycadeen der Mangel der Jahresringe ihres gleichmässig anwachsenden Holzkörpers (Zamia) oder die Zusammensetzung desselben aus durch Bast getrennten in regelloser Weise anastomosirenden Holzringen (Cycas) hervorgehoben und auf verschiedene Verhältnisse hingewiesen, welche, wie z. B. der Verlauf der Markscheidengefässbündel (Mohl l. c. 420; Karsten l. c. 195), die Structur derselben nach ihrem Eintritt in den Blattstiel (Mohl l. c. 421), die peripherischen Holzkörper in der Rinde von Cycas (Miquel l. c. 138), wichtig genug schienen, um neuen Untersuchungen als Ausgangspunkt zu dienen.

Verlauf der Markscheidenbündel.

Auf dem Querschnitt des Stammes der Cycadeen erblickt man in der an Parenchym reichen Rinde zahlreiche Gefässbündel, welche auf dem Weg von der Markscheide nach den Blättern durchschnitten oder in verschiedener Ausdehnung ihres Verlaufs blosgelegt sind; einzelne der letzteren sind im Begriff die Markscheide zu verlassen, andere treten in eine Blattbasis aus, wiederum andere beschreiben zwischen diesen, an ihrem Anfang und an ihrem Ende blosgelegten, Bündeln den

Holzring umkreisende Bogen und geben nach verschiedenen Seiten Zweige ab oder gehen mit andern bogenförmigen Bündeln Anastomosen ein.

Eine klare Einsicht in die Beziehungen und den Zusammenhang dieser Bündel erhält man erst dann, wenn man ein Bündel von seinem Austritt aus der Markscheide an in seinem Verlauf nach dem Blatt, oder in entgegengesetzter Richtung von seinem Eintritt in das Blatt rückwärts gegen seinen Ursprung verfolgt.

Die die Markscheide verlassenden Bündel von Cycas revoluta *) verfolgen in der Rinde zunächst eine radial nach aussen aufsteigende Richtung und lösen sich meist in geringer Entfernung von ihrer Austrittsstelle aus dem Holzringe, seltener schon an ihr, in zwei Zweige auf, die häufig alsbald eine weitere Theilung erfahren (Taf. I 1, 3). Diese Zweige und Zweiglein behalten theilweise ihre radiale aufsteigende Richtung bei, wenden sich theilweise zur Seite nach rechts oder links und steigen gleichzeitig entweder weiter nach aussen auf oder senken sich tiefer abwärts in der Rinde, gehen unter einander oder mit Zweigen benachbarter, sowohl älterer, wie jüngerer Markscheidenbündel Anastomosen ein und vereinigen sich endlich mit Bündeln, welche in horizontaler Lage den Holzring bogenförmig umgeben. Diese letzteren (Taf. I 2 *a*) treten mit ihren beiden Enden in eine Blattbasis ein und umkreisen daher mit Ausnahme dieser gürtelartig den Holzring, liegen auf der dieser Blattbasis diametral entgegengesetzten Seite des Stammumfang's in geringster Entfernung von dem Holzring, erreichen dann, allmählig von dieser Stelle nach beiden Seiten sich entfernend, nach Zurücklegung eines Bogens von ungefähr 90° die Mitte der Rinde, überschreiten in ihrem weiteren Verlauf auch diese und gelangen in das äussere Dritttheil derselben, um dann an der Basis desjenigen Blattes, für welches sie bestimmt sind, angelangt nach aussen in dieses abzulenken.

Einem jeden Blatt gehört ein solcher horizontaler gürtelförmiger Bogen an, der in den beschriebenen Entfernungen von dem Holzring hinzieht und in Folge dieses Verlauf's sich mit den Gürteln sämmtlicher

*) Ein junges lebenskräftiges Exemplar des hiesigen Garten's, dessen Stamm einen Durchmesser von 2″ erreicht hatte, wurde zum Behuf dieser Untersuchungen geopfert; abgestorbene Stämme von verschiedenem Alter dienten zur Vergleichung; den stärksten derselben, der einen Durchmesser von 7 Zollen erreicht hatte, verdanke ich der Güte des Herrn Director Schott in Schönbrunn.

Blätter, welche mit ihm einen Blattcyclus bilden — man projicire dieselben in eine Ebene — kreuzt, indem er von der Nähe des Holzring's, wo er der innerste von sämmtlichen Gürteln ist, bis zu seinem Austritt in das Blatt, wo er ausserhalb derselben liegt, die Bahn eines jeden an zwei Stellen durchschneidet.

Jeder Gürtel nimmt auf seiner inneren dem Holzring zugekehrten Seite Zweige von Markscheidenbündeln, welche an den verschiedensten Stellen den Holzring verlassen, auf und entsendet auf seiner äusseren der Stammoberfläche zugekehrten Seite Zweige an andere Gürtel. Auf der inneren Seite treten ausnahm'slos an der dem Holzring am meisten genäherten Stelle seines Verlauf's ein oder zwei Zweige von Bündeln, welche hier unmittelbar die Markscheide verlassen haben, in radialer Richtung an ihn heran; häufig, wenn auch nicht immer, gehen ferner an seiner Austrittsstelle in das Blatt oder in geringer Entfernung von derselben zwei Bündel, welche ebenfalls in bedeutender Ausdehnung ohne Abgabe von Zweigen in annähernd radialer Richtung die Rinde durchziehen und sich zuweilen als primäre Zweige von Markscheidenbündeln erweisen, eine Vereinigung mit ihnen ein; zwischen diesen beiden Stellen nimmt endlich jeder Gürtel andere Zweige auf, deren Zahl bedeutenden Schwankungen unterworfen zu sein scheint. Ein Theil von diesen tritt in radialer Richtung, ein anderer von der Seite an sie heran, ja nicht selten verschmelzen zwei von entgegengesetzten Seiten kommende Zweige an der nämlichen Stelle oder in nur geringer Entfernung von einander mit einem Gürtel. In keiner Beziehung zu diesen an die innere Seite der Gürtel tretenden Zweigen stehen, der Zahl nach den nämlichen Schwankungen unterworfen, diejenigen, welche von der äusseren Seite derselben abgehen und zwischen den benachbarten Gürteln Verbindungen herstellen. Erst mit ihrem Eintritt in die äusserste Lage der Rinde gegen die Austrittsstelle in das Blatt zu erlischt die Auszweigung auf ihrer nach aussen gekehrten Seite.

Die Stärke des Gürtels nimmt im Allgemeinen von der Nähe des Holzrings gegen den Austritt in das Blatt zu oder erhält, im Fall sie in dem grössten Theil ihrer Ausdehnung unverändert sein sollte, an den in das Blatt ausbiegenden Enden eine auffallende Zunahme.

Das numerische Verhältniss der die Markscheide verlassenden Bündel zu den Blättern konnte nach Feststellung der mitgetheilten Thatsachen an dem Stamm, den ich diesen Untersuchungen opferte, nicht

mehr ermittelt werden, so dass ich, um diesen Punkt nicht unberührt zu lassen, an dem Fragment eines abgestorbenen Stammes die annähernde Bestimmung dieses Verhältnisses versucht habe. Der Holzkörper dieses Fragment's hatte eine Oberfläche von 26 Quadratzollen und war von einer Rinde bedeckt, auf der die Reste von 57 Blättern hafteten. Von der Fläche eines Quadratzolles traten aus den Spalten des Holzkörpers 20—24 Markscheidenbündel aus, so dass 520—624 solcher Bündel auf sämmtliche Blätter, 9—11 auf ein einzelnes Blatt kommen.

Einen mit Cycas revoluta übereinstimmenden Verlauf der Markscheidenbündel, insofern dieselben sich zu in horizontaler Lage den Holzring umkreisenden gürtelartigen Bündeln vereinigen, welche mit ihren beiden Enden in eine Blattbasis eintreten, besitzen Zamia muricata, Dioon edule und Encephalartos horridus.

Bei Zamia muricata*) erscheint ihre Anordnung einfacher, indem die einzelnen Bündel nach ihrem Austritt aus der Markscheide (Taf. III 7) in grader Linie ohne Abgabe von Zweigen ihren Lauf zu den Gürteln vollenden; ferner findet in der Lage der Gürtel eine Abweichung statt, in so fern diese auf der ihrem Blatt abgewendeten Seite des Stammes ungefähr bis zur Mitte der Rinde vordringen und in dem grösseren Theil ihrer Ausdehnung unter der Oberfläche derselben hinziehen, bis sie an ihrer Blattbasis anlangen.

Dieser oberflächliche Verlauf der Gürtel ist noch entschiedener ausgesprochen bei Dioon edule**), indem dieselben in kaum merklicher Weise auf der ihrer Austrittsstelle in das Blatt gegenüberliegenden Seite des Stammes dem Holzring sich nähern (Taf. III 1), vielmehr beinah in ihrer ganzen Ausdehnung unter der äussersten Rinde hinziehen, wo die den aufeinanderfolgenden Blättern angehörenden Gürtel dicht über einander liegen (Taf. III 2). Ferner ist Dioon dadurch ausgezeichnet, dass von den beiden Zweigen, welche durch die primäre Theilung der Markscheidenbündel bei ihrem Eintritt in die Rinde entstehen und durch ihre weiteren Verzweigungen und Anastomosen das wirre Netz bilden, dessen Maschen in der Rinde innerhalb der Gürtel ausgespannt sind, der eine eine bedeutendere Stärke als der andere besitzt und dass alsdann bei der

*) Nach Untersuchung einer 2jährigen Pflanze, die ich nebst einer in Weingeist aufbewahrten Keimpflanze der Mittheilung Dr. Karsten's verdanke.

**) Nach Untersuchungen eines starken Exemplar's aus dem K. botanischen Garten zu Berlin.

Vereinigung der Zweige verschiedener Markscheidenbündel die stärkeren in die Bildung der Gürtel der Laubblätter, die schwächeren in die der Niederblätter eingehen. In Folge dieses Verhaltens übertreffen die Laubblattgürtel die der Schuppenblätter um ein Mehrfaches an Stärke, ja die letzteren sind gewöhnlich so fein, dass nur mit den grössten Schwierigkeiten ihr Verlauf verfolgt werden kann. Diese Verschiedenheit der Gürtel von Laub- und Niederblättern wurde an den jungen Stämmen von Cycas, Zamia, Encephalartos vermisst, war dagegen an einem kräftigen Stamm von Cycas*) ebenfalls, aber in geringerem Grade als bei Dioon, bemerkbar.

Bei Encephalartos horridus**) spalten die einzelnen Markscheidenbündel sich gewöhnlich bei ihrem Eintritt in die Rinde in 2 Zweige, die an verschiedene Gürtel herantreten; die Lage von diesen (Taf. III 6) in der Nähe des Holzrings stimmt mit Zamia, in dem weiteren Verlauf, sowie dem plötzlichen Ablenken nach aussen in das Blatt mit Cycas überein. — In der unteren Hälfte des untersuchten Stammes standen ferner die Markscheidenbündel vor ihrem Austritt in die Rinde mit andern Bündeln in Verbindung, welche keine Spiralfaserzellen enthalten, in dem Mark sich verzweigten und mit einander anastomosirend ein wirres Geflechte bildeten, dessen Maschen hie und da ringförmig in einer gewissen Entfernung einen Gummigang umgaben, im Uebrigen, so weit meine Beobachtungen reichen, niemals Zweige in die Blätter absendeten. An dem jüngeren Theil des Stammes war von diesem Geflechte keine Spur wahrzunehmen und an dem älteren Theil vermag es die Anordnung der Markscheidenbündel weder zu trüben, noch zu verändern, so dass, wenn auch ihre Entstehung nicht unmittelbar verfolgt werden konnte, doch kaum zu bezweifeln sein dürfte, dass diese Bündel nach der Bildung der Markscheidenbündel, selbstständig ihre Entwickelung beginnen und nur an einzelnen Punkten sich an diese ansetzen und dürfte dieses Markgeflechte von Encephalartos demjenigen gleichzustellen sein, welches bei Pflanzen mit scharf geschiedenen Internodien, wie bei Gräsern, Ricinus***) auf den Knoten beschränkt ist.

---

*) Die Gefässbündel der Laubblätter übertrafen an radialer Ausdehnung ihres Holztheils den der Niederblätter um das Dreifache.

**) Nach Untersuchungen eines faustgrossen Exemplar's des hiesigen Garten's.

***) Vgl. von Mohl bot. Zeitg. 16, 197.

Die beiden in eine Blattbasis eintretenden Gürtelenden spalten sich alsbald in 2 Zweige, von welchen bei Cycas (Taf. I 1, 2) und Encephalartos (Taf. III 6), Dioon (Taf. III 1), der eine nach aussen, der andere nach unten und innen gegen die Längsachse des Blattes strebt; beide theilen sich dann bald gleichmässig, bald ungleichmässig, eine verschiedene Zahl von Malen und ordnen ihre Zweige zu einem halbkreisförmigen nach oben offenen Bogen an, dessen Enden nach aussen gekrümmt sind (Taf. III 3, 4, 5). Bei einem Stämmchen von Cycas revoluta, welches bei einem Durchmesser von $1\frac{1}{2}''$ die beträchtliche Länge von $\frac{3}{4}'$ erreicht hatte, bildeten 4 Bündel den halbkreisförmigen Bogen, und hatte der äussere der einen Seite nur einen, der der anderen 2 oder 3 kleinere Zweige abgegeben (Taf. I 5), in den Blattbasen des im frischen Zustand untersuchten Stamm's waren 10, bei dem stärkeren abgestorbenen Stamm hingegen 20 Gefässbündel in völlig symmetrischer Anordnung vorhanden. Bei diesem Stamm waren ferner in der Mehrzahl der Blattbasen die beiden inneren Zweige die Gürtelenden zu einem Bogen vereinigt, aus dessen Mitte ein nach dem Grund des Blattstiels verlaufender und sich hier wiederholt theilender Bündel abging und stellten in Folge dieser Vereinigung die Gürtel vollkommen geschlossene Ringe dar, aus welchen scheinbar 3 Bündel nach einer Blattbasis abgingen (Taf. I 4).

In dem Verlauf durch den Scheidentheil des Blatt's spalten sich einzelne Bündel von Neuem und vereinigen sich andere benachbarte mit einander, so dass die symmetrische Anordnung derselben hie und da getrübt erscheint. Bei dem Eintritt in den Blattstiel erfährt ihre Anordnung dann eine geringe Modification, indem der Bogen, in welchem sie auf dem Querschnitt angeordnet erscheinen, mehr die Form eines Hufeisens annimmt, dessen Schenkel von der Mitte des Blattstiels bis gegen die obere Seite desselben sich bedeutend näheren und dann von hier nach aussen umbiegen. In dem Verlauf durch den Blattstiel geben die das äusserste Ende der Bogen beider Seiten einnehmenden Bündel Zweige in die Fiedern ab und werden dadurch, dass die benachbarten Bündel sich mit ihnen vereinigen und an ihre Stelle treten, wieder ersetzt. Auf diese Weise bleibt in dem grösseren Theil des Blattstiels bei einer allmähligen Abnahme der Bündel an Zahl ihre Anordnung ungetrübt erhalten, bis unter den beiden letzten Fiederabschnitten, z. B. bei Cycas glauca, nur noch ein Bündel übrig ist, welches sich in zwei, in diese eintretende, Parthieen spaltet.

Eine erwähnenswerthe Abweichung von dieser bei Cycas beschriebenen Anordnung der Gefässbündel in dem Blattstiel bietet Dioon dar, insofern die Bündel beider Schenkel des hufeisenförmigen Bogens (Taf. I 10) sich nicht nur nähern, sondern paarweise untereinander verschmelzen.

Bei Zamia muricata (Taf. III 7) endlich läuft einer von den beiden Zweigen, in welche die Gürtelenden sich theilen, nach innen gegen die Mitte der Blattbasis, und spaltet sich zuweilen in zwei Zweiglein, während der andere unmittelbar nach seinem Ursprung von Neuem in 2 Zweige sich theilt, von welchen der äussere zunächst ausserhalb des Gürtels beinah bis zu dem Rand der Blattbasis zurückläuft, und erst dann in einem der Oberfläche derselben entsprechenden Bogen in diese eintritt. In dem weiteren Verlauf durch den Blattstiel theilen sich die Bündel unregelmässiger als bei Cycas und erscheinen daher niemals in symmetrischer Anordnung; oberhalb der Mitte des Blattstiels verschmelzen dann überaus häufig 3 bis 5 Bündel von beiden Schenkeln des hufeisenförmigen Bogens, während die die äussersten nach aussen gebogenen Enden desselben einnehmenden Bündel in die Fieder eintreten; es verschmelzen ferner ganz gewöhnlich benachbarte Bündel auf der der Unterseite des Blattstiels zugekehrten Hälfte des Bogens und wird hierdurch die Zahl der Gefässbündel des Blattstiels bereits oberhalb des ersten Fiederpaar's bedeutend verringert. Endlich sind nur noch 2 Bündel vorhanden, welche in die beiden obersten Seitenfieder eintreten und besteht das diese überragende Ende des Blattstiels nur aus parenchymatischem Gewebe.

Structur der Markscheidenbündel.

Der Querschnitt eines jugendlichen Stamm's von Cycas revoluta zeigt in geringer Entfernung von dem in die Stammspitze eingesenkten Vegetation'spunkt *) an der Grenze von Mark und Rinde, deren Zellen von Stärkekörnern erfüllt sind, einen ringförmigen Streifen zarter in radialen Reihen angeordneter und in Vermehrung begriffener Zellen, die Cambiumschichte. Auf der innern Seite von dieser erhalten in dem älteren Theil des Stamm's einige Zellen durch Ablagerung von Ring- oder Spiralfasern zunächst ihre vollkommene Ausbildung; auf diese folgen

*) Vergl. Hofmeister. Abh. d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch. V. 627.

netzfaserige und treppenförmige, dann poröse Zellen, welche zusammen den Anfang des Holzring's bilden, während gleichzeitig auf der äusseren Seite der Cambiumschichte die Entwickelung des Bastes beginnt. Durch zahlreiche Markstrahlen werden Holzring und Bast in Bündel von verschiedener Breite, jeder Bündel wieder in eine verschiedene Zahl kleinerer Bündel oder in einzelne Reihen verholzter Zellen gesondert, die in ihrer Längsausdehnung seitlich mit den benachbarten zu einem feinmaschigen Netz anastomosiren.

Diejenigen Bündel, welche bei Cycas zunächst die Markscheide verlassen, sind durch breite Markstrahlen von den benachbarten getrennt und durch diese sowohl, wie durch die geringere Breite ihrer eignen Markstrahlen schärfer umgrenzt, als diejenigen, welche zunächst ihren Lauf in der Markscheide nach oben fortsetzen; sie sind ferner an ihrem keilförmig verschmälerten Anfang mit Ring- und Spiralfaserzellen versehen, während den Anfang jener Netzfaser- oder solche Zellen einnehmen, deren Verdickungsschichten zwischen netzförmigen und spaltenförmigen in der Mitte stehen.

Die treppenförmigen und porösen Zellen sämmtlicher Bündel besitzen im Allgemeinen weitere Lumina als die Spiralfaserzellen, sie sind gewöhnlich nur auf den den Markstrahlen, seltener auf den dem Mark oder der Rinde zugekehrten Wandungen mit ihren characteristischen Verdickungsschichten*) versehen und sind stets wie die zartwandigen in radialer Richtung gestreckten Parenchymzellen der Markstrahlen in regelmässige Reihen angeordnet, während die Spiralfaserzellen, sowohl wegen der geringeren Weite ihres Lumens, als wegen der unregelmässigen Gestalt der sie trennenden Parenchymzellen eine solche gereihte Anordnung mit minderer Deutlichkeit zeigen.

Ueberhaupt herrschen solche parenchymatische Zellen am Anfang der Bündel vor und trennen nicht nur die Spiralfaserzellen von dem Anfang der Reihen der treppenförmigen Zellen, sondern sie finden sich auch zwischen beiden, so dass die ersteren völlig vereinzelt oder nur zu wenigen beisammen liegen, ringsum von Parenchymzellen umgeben, die Reihen der letzteren aber durch zartwandige den Zellen der Markstrahlen nicht unähnliche Zellen unterbrochen erscheinen; ihre Grösse ist

*) Bei Dioon, Zamia sind die treppenförmigen Zellen grösstentheils, die porösen Zellen nur zum kleineren Theil auf sämmtlichen Wandungen mit denselben versehen.

aber stets eine nur unbedeutende und treten sie daher am jugendlichen Stamm nicht augenfällig hervor.

Mit der beträchtlichen Erweiterung des Umfang's des Mark's nach der Anlage des Holzring's erfahren alsdann diese parenchymatischen Zellen eine bedeutende Dehnung und treten ihnen gegenüber die verholzten Zellen der Markscheide zurück.

An Stämmen von Cycas, welche ein vorherrschendes Längswachsthum besitzen — das von mir untersuchte Exemplar eines solchen Stamm's hatte bei einem Durchmesser von 1½″ die beträchtliche Länge von 9″ erreicht — ebenso bei dem zweijährigen Stämmchen der Zamia muricata dehnen sich vorwiegend diejenigen Zellen aus, welche an dem Anfang der Reihen der Prosenchymzellen liegen und erscheint alsdann der Holzring durch einen ringförmigen Streifen parenchymatischen Gewebes in zwei Zonen gesondert, von welchen der innere scheinbar in dem Mark liegende die Spiralfaser- und Netzfaserzellen enthält.

In Stämmen hingegen, bei welchen das Dickewachsthum vorherrscht, erfahren sämmtliche Zellen in der Umgebung der verholzten Bestandtheile der Markscheide eine beträchtliche Ausdehnung, ja es scheint, dass sie bei dieser Ausdehnung noch zwischen die verholzten Zellen der letzteren sich einzuschieben vermögen, und in Folge dessen eine völlige Zerstreuung von diesen eintritt und nun nur bei aufmerksamer Beobachtung die Gruppe der einem Bündel angehörigen Spiralfaserzellen noch übersehen werden kann (Taf. I 6). In diesem Fall erfolgt zugleich die Ausdehnung dieser parenchymatischen Zellen in so unregelmässiger Weise, dass Ring-, Spiral- und Netzfaserzellen nicht nur von einander entfernt, sondern auch aus ihrer perpendiculären Lage in eine schräge, ja selbst horizontale Lage verschoben werden; es erstreckt sich ferner diese Zerstreuung auch auf den Anfang der Reihen treppenförmiger Zellen und erst weiter nach aussen nimmt die Ausdehnung der Markstrahlzellreihen eine bestimmtere, nun vorzugweise tangentiale Richtung an. Bei dem Absterben solcher Stämme wird alsdann mit der Zerstörung des Mark's gleichzeitig der Anfang des Holzring's entfernt und aus der Untersuchung solcher Stämme ist der Irrthum früherer Forscher entstanden, dass die Markscheide der Cycadeen überhaupt oder wenigstens an älteren Stämmen keine Spiralfaserzellen enthalte.

An der Ausbiegungsstelle der Markscheidenbündel in der Rinde sammeln sich, wie radiale Längsschnitte durch den Stamm lehren, alle

in dem Mark zerstreuten einem Bündel angehörigen Spiralfaserzellen wieder und liegen nun auf der nach oben und innen gekehrten Seite desselben, entweder in unmittelbarer Berührung mit den treppenförmigen Zellen, die bei weitem den grössten Theil der in die Rinde eintretenden Bündel bilden oder durch wenige Lagen gestreckter parenchymatischer Zellen von denselben getrennt.

Nur wenige poröse Zellen begleiten ferner auf der äusseren und unteren Seite den Bündel treppenförmiger Zellen und enden stets in geringer Entfernung von der Ausbiegungsstelle dieser in die Rinde.

Die Zweige, in welche die Markscheidenbündel in dieser sich theilen, so wie die gürtelförmigen Bogen durchlaufen den nämlichen Entwickelungsgang, indem überall an dem keilförmig geschmälerten Anfang derselben bei den ersteren auf ihrer oberen und inneren, bei den letzteren auf der inneren, dem Centrum des Stamm's zugekehrten Seite, zunächst Spiralfaser-, dann Netzfaser-, dann treppenförmige Zellen verholzen, welche überall den grössten Theil der Bündel bilden und durch feine meist nur aus einer Zellreihe bestehende Markstrahlen in, durch seitliches Aneinanderlegen ein äusserst feinmaschiges Netz bildende. Bündelchen getheilt, und nach aussen durch einige Cambiumzellen von den zartwandigen Bastzellen ihres Rindentheils getrennt werden.

In dem ersten Stadium der Entwickelung liegen die den jüngsten Blättern angehörigen Gürtel in der Umgebung des Vegetationspunkt's des Stamm's und stellen nach Verholzung ihrer ersten Zellen die Spiralfaserzellringe dar, die zuerst die Aufmerksamkeit Karsten's*) erregten; zu ihnen steigen in dieser Periode die Markscheidenbündel in beinah perpendiculärer Richtung auf; mit dem weiteren Wachsthum des Stamm's nehmen diese alsdann allmälig von ihrer Austrittsstelle aus der Markscheide an eine mehr horizontale Lage oder zuweilen, wie bei Encephalartos, eine nach abwärts geneigte Lage an und erfahren eine der radialen Zunahme des Stamm's entsprechende Verlängerung, während gleichzeitig die Gürtel eine der Vergrösserung der Peripherie des von ihnen beschriebenen Kreises entsprechende Dehnung erfahren.

Dieser Ausdehnung scheinen die Spiralfaserzellen der Gürtel nur in geringem Grad folgen zu können; die Windungen ihrer Fasern werden zunächst aus einander gezerrt, dann ihre Membran zerstört oder

*) l. c. 195.

unkenntlich und ihre Fasern zwischen den Zellen, welche an die innere Seite der Gürtel angrenzen, angetroffen. Die treppenförmigen Zellen der Gürtel alter Stämme erhalten ferner an Strecken von bedeutender Ausdehnung das Ansehen von Netzfaserzellen, indem statt der engen spaltenförmigen, rechtwinklicht zur Längsausdehnung dieser Zellen stehenden Tüpfel, elliptische Tüpfel von bedeutender Weite in einer zu dieser schrägen Richtung auftreten, während an den Wandungen der Zellen jugendlicher Gürtel nur sehr unbedeutende Strecken von solchen Tüpfeln bedeckt sind. An den Gürteln jugendlicher Blätter maassen die kürzesten der treppenförmigen Zellen 0,04‴, an Gürteln von älteren Stämmen konnte ich bereits einige solcher Zellen in einer Länge von 0,65‴ isoliren, an den Gürteln des ältesten der von mir untersuchten Stämme erreichten einige der isolirten Zellen eine Länge von 1,99‴ und war ungefähr der dritte Theil ihrer Länge mit den weiten elliptischen Tüpfeln versehen.

Auch den Zweigen, in welche die Gürtelenden in der Blattbasis sich auflösen, kommt, nachdem sie in die oben beschriebene Anordnung eingetreten sind, sowie in ihrem Verlauf durch die untere Hälfte der Schuppenblätter oder des Scheidentheils der Laubblätter der nämliche Entwickelungsgang zu und sind ihre Ring- und Spiralfaserzellen der Oberseite des Blattes, die treppenförmigen Zellen der entgegengesetzten Seite zugekehrt (Taf. IV 1); nun aber erfolgt in dem weiteren Verlauf in der Ausdehnung weniger Linien, aber allmählig, wie aus zahlreichen über einander geführten Querschnitten ersichtlich ist, in dem Entwickelungsgang und demgemäss in der Structur dieser Bündel eine Veränderung, die stets vor ihrem Eintritt in den zusammengezogenen Theil des Blattstiels vollendet und durch die ganze Ausdehnung desselben eine bleibende ist.

Die erste Andeutung dieser Veränderung giebt sich dadurch zu erkennen, dass in der Umgebung der Spiralfaserzellen einige zartwandige Zellen auftreten, welche dieselben von den treppenförmigen Zellen des Bündels, welchen sie bisher gewöhnlich unmittelbar anlagen, trennen; dieses selbst erhält eine bedeutendere Breite und umgreifen seine treppenförmigen Zellen nun auch seitlich und nach oben die Spiralfaserzellen nebst den eben erwähnten zartwandigen Zellen oder umschliessen beide vollkommen (Taf. I 7).

In dem weiteren Verlauf rücken alsdann Ring- und Spiralfaserzel-

len allmählig gegen die Mitte des Bündels und entwickelt sich der Holztheil desselben in zwei durch die zartwandigen Zellen in ihrer Umgebung von einander getrennten Parthieen. Die eine derselben bildet ihre Elementarorgane in centripetaler Richtung nach der oberen Seite des Blattstiels, die andere in centrifugaler nach der entgegengesetzten Seite, also in derjenigen Richtung aus, in welcher bisher der ganze Holztheil des Bündels seine Ausbildung vollendete. Die erste derselben besteht aus weiten fest aneinander liegenden treppenförmigen Zellen und stösst unmittelbar an die Spiralfaserzellen an, von welchen die engsten am weitesten nach aussen liegen; die andere ist durch die zartwandigen Zellen von diesen getrennt und hat im Vergleich mit den früheren Stadien eine bedeutende Abnahme seiner radialen Ausdehnung erfahren, zeigt im Uebrigen noch die nämliche Structur, indem seine treppenförmigen Zellen in regelmässigen durch Markstrahlen getrennten Reihen angeordnet und nur auf den diesen parallelen Wandungen mit den spaltenförmigen Tüpfeln versehen sind.

Endlich treten die Spiralfaserzellen, die auf den Querdurchschnitten der Bündel stets an der geringen Weite ihres Lumens kenntlich sind, in dem äusseren Theil des Bündels auf (Taf. I 8) und erfährt der in centrifugaler Richtung entwickelte Abschnitt derselben eine abermalige Abnahme, während der centripetale das Maximum seiner Ausbildung erreicht. Beide sind wie bisher getrennt durch zartwandige mässig gestreckte parenchymatische oder mit etwas geneigten Wandungen übereinander stehende Zellen, welche nach innen und oben unmittelbar an diejenigen Spiralfaserzellen, welche die engsten Lumina haben, anstossen; ersterer besteht nun nur aus einer einzigen Lage enger getüpfelter oder poröser Zellen und wird durch einige zartwandige Zellen, die letzten Andeutungen der Markstrahlen, in kleine Gruppen gespalten oder er besteht überhaupt nur aus wenigen, oft nur aus 3—4 solcher Zellen, die alsdann ausserhalb der Spiralfaserzellgruppen zwischen die zartwandigen Zellen des Cambium's und Bastes vorspringen und gewöhnlich eine abermalige Verengerung ihres Lumens erfahren haben.

Der einer centripetalen Entwickelungsfolge seinen Ursprung verdankende Abschnitt des Holzbündels steht hingegen in unmittelbarer Berührung mit den Spiralfaserzellen und wird von fest aneinander liegenden auf sämmtlichen Wandungen mit spaltenförmigen Verdickungsschichten versehenen Zellen gebildet, von welchen die zuerst entstan-

denen die engsten, die zuletzt gebildeten die weitesten Lumina besitzen und nicht selten auch poröse Verdickungsschichten ausbilden. Markstrahlen fehlen stets diesem Abschnitt gänzlich und sind seine Zellen niemals in regelmässigen radialen Reihen angeordnet.

Wenige Lagen zartwandiger radial gereihter cambialer Zellen persistiren auch im ausgebildeten Zustand der Bündel an der Grenze des centrifugalen Holzabschnitts und des Bastes. Letzterer besteht aus dickwandigen Bastzellen, aus Bastparenchym und aus Gilterzellen. Erstere sind langgestreckte dickwandige enge Zellen, die mit fein zugespitzten Enden in einander greifen und durch die gelbliche Farbe ihrer gleichmässig stark verdickten, nicht getüpfelten, Wandungen von allen andern Bestandtheilen des Bündels auffallend abweichen; sie nehmen die äussere Grenze des ganzen Bündels ein und sind hier zu einem der Convexität dieser Seite entsprechend gekrümmten Bündelchen vereinigt (Taf. I 7, 8). Zwischen diesen und dem Cambium liegt alsdann ein Gewebe, welches von feinen Markstrahlen durchzogen und von alternirenden Lagen weiterer und engerer gestreckter, stets mit horizontalen Wandungen übereinander stehender Zellen zusammengesetzt wird. Erstere, die weiteren Zellen, haben eine bedeutendere Länge und enthalten einen wässerigen durchsichtigen Inhalt und sind auf den seitlichen Längswandungen mit gegitterten Verdickungsschichten von äusserster Feinheit versehen; letztere, die engeren, das Bastparenchym bildenden, haben eine geringere Länge und sind von einem trüben, leicht gerinnenden, an Protoplasma reichen Inhalt erfüllt und besitzen völlig glatte Wandungen.

Zwischen den Rindenparenchymzellen in der Umgebung der Bündel trifft man ferner einige langgestreckte derbwandige Bastzellen an, die durch zarte Scheidewände septirt sind.

Ueber die Folge, in welcher die verschiedenen Theile eines Bündels sich entwickeln, lehrte das einzige an dem diesen Untersuchungen geopferten Stamm in der Entwickelung befindliche Blatt, welches beiläufig eine Länge von 1 Zoll erreicht hatte, dass nach dem Verholzen der Spiralfaserzellen zunächst die weiten Lumina der treppenförmigen Zellen des Holzabschnitt's und der derbwandigen langgestreckten feinen Bastzellen an der äusseren Grenze des Bastes kenntlich werden, in einer Periode, in der in dem übrigen Theil des Bündels eine Sonderung seiner Cambiumzellen noch nicht wahrnehmbar ist.

In dem Verlauf durch den Blattstiel behalten sämmtliche Gefässbündel die beschriebene Structur und selbst in dem Gefässbündel des unverzweigten Mittelnerven der Fiederabschnitte bleiben ausserhalb der Spiralfaserzellen noch 1 oder 2 poröse Zellen als letzte Andeutung des centrifugalen Abschnitts des Holzkörpers erhalten.

In der gleichen Weise, wie bei Cycas revoluta, erfolgt die Structurveränderung der Gefässbündel im Scheidentheile der Blätter bei Zamia muricata, Encephalartos horridus und Dioon (Taf. IV 1—5), oder sie weicht, wie die Structur der ausgebildeten Bündel in dem Blattstiel aller andern Cycadeen, von welchen ich nur Blätter untersuchen konnte, — als Encephalartos longifolius, Zamia pumila, integrifolia, Ceratozamia Miqueliana, Macrozamia spiralis, Stangeria paradoxa, Cycas glauca, welche letztere von allen genannten die schärfste Sonderung der verschiedenen Bestandtheile der Bündel zeigt — nur in so unerheblichen Punkten ab, dass einige wenige Bemerkungen genügen.

So z. B. sind bei Stangeria paradoxa*) die zartwandigen Zellen zwischen die Spiralfaserzellen eingeschoben und liegt ein Theil von diesen unmittelbar auf der innern Seite des auf wenige Zellen reducirten centrifugalen Theils der Gefässbündel, der andere auf der äusseren des centripetalen, während bei Dioon die Spiralfaserzellen ringsum von diesen zartwandigen Zellen umgeben und von beiden Theilen des Holzkörpers getrennt sind. Der centripetale Theil wird ferner bei Dioon häufig durch einen oder 2 parenchymatische Zellstreifen durchbrochen und nehmen zahlreiche poröse Zellen, von welchen die äussersten an Weite die inneren kaum oder nicht mehr übertreffen, an der Bildung desselben Antheil.

In den Fiedern von Dioon**), ebenso von Encephalartos longifolius und horridus aber schwindet der centrifugale Theil des Holzkörpers gänzlich.

Bei andern, wie bei Zamia integrifolia und muricata fehlen sämmtlichen Gefässbündeln derbwandige Bastzellen gänzlich oder treten nur in sehr geringer Zahl auf.

Die nämliche Veränderung der Structur erfahren ferner die Gefäss-

*) Nach Untersuchung eines Blatts, welches ich der Güte des Herrn H. Wendland verdanke.

**) Bei Dioon liegen in den Fiedern die Nerven unter den Gummigängen, bei Encephalartos alterniren sie mit denselben.

bündel der Schuppenblätter bei Cycas und rücken ihre Spiralfaserzellen demgemäss allmählig von der innern Seite des Bündels gegen die Mitte desselben und grenzen einen centripetalen und centrifugalen Theil desselben ab, bis sie mit dem Schwinden des letzteren auf der äusseren Seite des ersteren liegen. Ihr Bast zeigt die nämliche Zusammensetzung wie bei den Laubblättern.

Bei Dioon edule enthalten die ausserordentlich feinen Bündel der Niederblätter wenige verholzte treppenförmige Zellen und liegen die Spiralfaserzellen an dem Grunde auf der innern Seite von diesen, durch einige zartwandige Zellen von ihnen getrennt (Taf. IV 6), unter der Spitze hingegen in unmittelbarer Berührung mit der äusseren Seite derselben (Taf. IV 7).

Ebenso sind in den Bündeln der Fruchtblätter*) von Cycas die Spiralfaserzellen ringsum von den treppenförmigen Zellen des Holzkörpers umgeben.

In dieser Structur, welche die Gefässbündel der Cycadeen in dem Scheidentheil des Blattes annehmen und in dem weiteren Verlauf durch den Blattstiel behaupten, ist ein Verhältniss ausgesprochen, welches nicht minder, als der beschriebene Verlauf der Markscheidenbündel, den Cycadeen eigenthümlich sein dürfte.

In den Stämmen und Blättern aller phanerogamischen Pflanzen ist nämlich, wenn auch die Structur der Markscheidenbündel in ihrem Verlauf manchem Wechsel unterworfen ist, die Entwickelung, so weit sie aus der Folge der verholzenden Zellen und Gefässe in der cambialen Anlage abgeleitet werden kann, eine centrifugale und in den Stämmen der Farne unserer jetzigen Schöpfung erfolgt die Verholzung der treppenförmigen Zellen entweder in centripetaler oder tangentialer Richtung von den zunächst ausgebildeten Spiralfaserzellen oder sie schreitet gleichzeitig ringsum von denselben fort, der Art, dass die Spiralfaserzellen nach innen von einer mächtigeren, nach aussen von einer schmäleren Lage von Treppengängen umgeben werden. Aber auch in diesem letzten Fall findet niemals weder eine Trennung der treppenförmigen Zellen in 2, ausserhalb und innerhalb der Spiralfaserzellen entstehende, Parthieen statt, noch zeigen die der ersteren eine gereihte Anordnung, die überhaupt überall in den Zellen der Gefässbündelanlage der Farne

*) Nach Untersuchung eines getrockneten Fruchtblatts, welches mir nicht gestattet, die weiteren Modificationen, die hier stattfinden, zu beschreiben.

vermisst wird. Dieser Vergleich mit den Farnen ist aber um so weniger durchzuführen, als gerade in den Blättern dieser Gewächse die centrifugale Entwickelung der Gefässbündel vorherrscht und selbst dann in dieser Richtung stattfindet, wenn die Gefässbündel in dem Stamm in entgegengesetzter Richtung verholzen.

Unter den Gefässcryptogamen der Vorwelt bildet Sigillaria, welche nach Maassgabe ihrer Fructificationsorgane in die Verwandtschaft von Isoëtes*) gehört, insofern eine Uebereinstimmung, als bei ihr nach den Untersuchungen Brongniart's**) die das Mark des Stammes umscheidenden Bündel aus einer Gruppe fest aneinanderliegender ungeordneter Zellen bestehen, von welchen die weiteren spaltenförmigen markwärts, die kleineren Spiralfasern enthaltenden nach aussen liegen, nächst den scharf von ihnen abgesetzten, in regelmässigen radialen Reihen angeordneten, durch Markstrahlen getrennten Treppenzellen des Holzkörpers. Wenn diese Anordnung aber darauf hinweist, dass von den von einander geschiedenen beiden Theilen, aus welchen diese Bündel des Stammes von Sigillaria bestehen, der innere eine centripetale, der äussere eine centrifugale Entwickelung, gerade wie die Gefässbündel in dem Blattstiel der Cycadeen besitzen, auch die bedeutende oder unbegrenzte Fortbildung der äusseren bei Sigillaria als ein dem Stamm zukommendes Verhältniss betrachtet werden kann, so ist doch immerhin nicht ausser Acht zu lassen, dass die Structur der in die Rinde austretenden, zu den Blättern verlaufenden Bündel von Sigillaria durchaus von der der Gefässbündel der Blätter der Cycadeen abweicht, indem erstere nur aus einem Strang treppenförmiger Zellen von gleicher Weite bestehen***).

Eine weitere Bemerkung verdient die Natur der den Holzantheil der Bündel zusammensetzenden Elementarorgane.

Bekanntlich hatte von Mohl, nachdem die ersten Untersuchungen Brongniart's die Cycadeen und Coniferen als gefässlose, nur von porösen Holzzellen zusammengesetzte Gewächse dargestellt hatte, das Vorkommen von Spiralfasern enthaltenden Röhren an dem Anfang der Markscheide beider Familien nachgewiesen und diese so wohl, wie die

*) Vergl. Goldberger, flora saraepontana fossilis I 35, 36; II 1.

**) Arch. du Museum I 411.

***) Nach den Untersuchungen Brongniart's l. c.

porösen Röhren derselben dem Gefässsysteme zugezählt und dem zufolge gegenüber von Brongniart angenommen, dass das Holz der Cycadeen nur von Gefässen zusammengesetzt werde. In Folge späterer Untersuchungen gelangten alsdann die beiden genannten Forscher*) zu dem übereinstimmenden Resultat, dass sowohl die porösen Röhren der Coniferen und Cycadeen, als auch die treppenförmigen Gänge der Farne gleichsam eine Mittelbildung zwischen Zellen und Gefässen darstellten, indem sie mit den ersteren durch den völligen Abschluss ihrer Wandungen, mit den letzteren in den Verdickungsschichten übereinstimmten. Die mit Spiralfasern versehenen Elementarorgane der Coniferen und Cycadeen schienen beide nun dem Gefässsysteme beizuzählen, während Schacht**) auch diese für geschlossene Spiralfaserzellen, hingegen die Treppengänge der Farne für Gefässe hielt und Karsten***), der zuerst überall in den verholzenden Bündeln der Farne Spiralfaserzellen auftreten sah, so wie verschiedene Forscher, welche sich mit der Untersuchung der kleineren Familien der sogenannten Gefässcryptogamen beschäftigten, kein Bedenken trugen, diesen sowohl, wie den treppenförmigen Röhren derselben die Natur der Gefässe zuzuerkennen.

Isolirt man um über diesen Punkt in's Klare zu kommen, mit Hülfe der Schultze'schen Mischung die Elementarorgane der Gefässbündel, so findet man, dass sowohl die Spiralfaser führenden, als die spaltenförmigen und porösen Röhren an beiden Enden vollkommen geschlossen sind und demnach nicht als Gefässe angesehen werden können.

Bei den Gefässcryptogamen, von welchen ich in dieser Beziehung Polypodium vulgare, Pteris Vespertilio, Hypolepis tenuifolia, Alsophila radens, Gleichenia sp. Angiopteris†) (Blattstiel) Trichomanes javanicum, Le Prieuri, Adiantum reniforme (Nerven der Blattfläche), Selaginella

*) Brongniart, hist. d. végét. foss. XII 20; Arch. d. Mus. I 411; von Mohl, verm. Schrift. 112.

**) Baum. 200; Anat. u. Phys. d. Gew. I 220.

***) Veget. Organe der Palmen 130.

†) Nach Untersuchungen des Blattstiels, abweichend von Harting (Monog. d. Maratt. 43), der sich berechtigt hält, seine Theorie von der Entstehung der Gefässe (Linn. 19. 554) auch auf die Farne auszudehnen, aber übersehen hat, dass die vermeintlichen Gefässe der Farne aus geschlossenen Zellen bestehen. — Ebenso hat Nägeli diese Thatsache ausser Acht gelassen, trotzdem dass er für nothwendig hält die Gefässbündel in dem weitesten Sinne des Worts in Vasal, Fibral und Fibro-vasal stränge einzutheilen (Beitr.-Heft 1).

helvetica, Psilotum triquetrum*), Marsilea aegyptiaca untersuchte, treten in den geschlossenen zugespitzten Enden der Spiralfaserzellen ganz gewöhnlich Ringe auf, ebenso fand ich, dass bei Equisetum variegatum, umbrosum, limosum die Spiral- oder Ringfasern führenden Elementarorgane sehr lang gestreckte, fein zugespitzte, aber vollkommen geschlossene Zellen sind, und vergeblich war mein Bemühen, ihre Entwickelung aus Reihen kurzer Zellen, von welchen eine jede nur 5—6 Ringe enthält, wie es nach den Beobachtungen Hofmeister's**) und Cramer's***) der Fall sein soll, nachzuweisen.

In Betreff von Isoëtes, den ich in dieser Beziehung zu untersuchen versäumte, hat Schacht über die Verbindung der Gefässzellen zu Gefässen wohl begründeten Zweifel erhoben.

Mit leichterer Mühe gelingt es, über den vollkommenen Abschluss der treppenförmigen Zellen der Farne Gewissheit zu erlangen und wird man auch nicht selten 2spaltige Zellen isoliren, deren Schenkel bald eine gleiche, bald eine ungleiche Länge besitzen, aber ebenfalls stets geschlossen sind†).

Von Coniferen habe ich Salisburia, Pinus patula, chinensis Hort., Taxus baccata, Cunninghamia sinensis in dieser Beziehung untersucht und stets nur Spiralfaserzellen mit geschlossenen Enden zu isoliren vermocht, und vergeblich war mein Bemühen, in der Markscheide von Ephedra, deren Holz poröse Gefässe enthält, wahre Spiralgefässe zu erkennen. In dem feinen zugespitzten Ende der Spiralfaserzellen der Nadelhölzer findet man oft einzelne Ringfasern auf einer der Längswandungen ausgebildet, an andern Stellen findet man zwischen den aneinanderliegenden Wandungen linsenförmige Tüpfelräume, welche Hartig††) bereits bei den Abietineis beobachtet hat, und wenn es auch schwierig sein dürfte, den Nachweis zu führen, dass an diesen Stellen immer diese Zellen geschlossen sind, so wird man doch z. B. bei Pinus chinensis nicht selten

*) Psilotum triquetrum besitzt weder an der Keimpflanze — von welchen ich im Uebrigen die ersten Stadien noch nicht beobachtet habe, — noch an dem Stamm alter Exemplare Wurzeln, widerlegt daher den allgemeinen Ausspruch Nägeli's (Beitr. 1. 5), dass allen Gefässpflanzen Wurzeln zukämen.

**) Vergl. Unters. 93.

***) Beitr. von Nees und Cramer. Heft 3. 26.

†) Schacht (Anat. I 219) stellt eine solche Zelle dar, deren Enden abgebrochen sind.

††) Bot. Zeit. 1859. 100.

Spiralfaserzellen isoliren, welche gerade an den verschmälerten Enden vollkommen glatte und vollkommen geschlossene Wandungen besitzen.

Von Cycas revoluta habe ich die Markscheidenbündel aus den verschiedensten Stellen ihres Verlauf's dem Macerationsverfahren unterworfen, ohne auch nur ein einziges Mal eine Verbindung zweier Zellen zu einem Gefässe zu finden,

Nach diesen Untersuchungen würden also weder die sogenannten Gefässcryptogamen, noch die Cycadeen und Coniferen mit Ausschluss der Gnetaceae wahre Gefässe enthalten und ihre Gefässbündel dadurch ausgezeichnet sein, dass diejenigen ihrer Elementarorgane, welche bei den bedecktsamigen Phanerogamen durch mehr oder minder vollkommene Resorption ihrer übereinanderstehenden Wandungen zu wahren Gefässröhren vereinigt werden, auf einem früheren Entwickelungsstadium verharrten, und geschlossene Wandungen behielten, mithin nur aus Gefässzellen zusammengesetzt würden. Dem Begriff der Gefässbündel selbst aber muss, da bei den nackt- und bedecktsamigen Phanerogamen diese Bündel in der nämlichen Weise entstehen, in der nämlichen Folge und an den nämlichen Stellen ihre Elementarorgane mit characteristischen Verdickungsschichten ausbilden, mithin in allen diesen Punkten vollkommen identisch sind, eine weitere Fassung gegeben werden, weil eben nur ein Theil der Gewächse, die bisher beinah allgemein als Bedingung eines Gefässbündels postulirten Gefässe enthält und erst in zweiter Linie können die Gefässbündel in solche, welche nur Gefässzellen und solche, bei welchen ein Theil von diesen zu wahren Gefässen verschmelzen, eingetheilt werden. Diese Annahme aber ist um so mehr gerechtfertigt, als auch bei bedecktsamigen Phanerogamen, deren Markscheidenbündel in dem Stamm gewöhnlich wahre abrollbare Spiralgefässe enthalten, an verschiedenen Stellen des Verlaufs derselben in den Blättern eine Vereinigung der Gefässzellen zu Gefässen nicht mehr zu Stande kommt. So z. B. findet man bei Phaseolus, dessen Keimaxe einen Cylindermantel cambialer Zellen enthält, der nach unten mit dem Vegetationspunkt der Wurzel zusammenfliesst, wenige Tage nach dem Beginn des Keimungsaktes wahre Spiralgefässe in der Markscheide, indem Spiralfaserzellen, die zunächst verholzen, unterhalb ihres zugespitzten Endes eine elliptische Oeffnung erhalten*), vermittelst welcher die übereinander-

*) In der nämlichen Weise, wie es Schleiden bei Cacteen nachgewiesen hat. Vergl. dessen Anat. der Cacteen 360.

anderstehenden communiciren; in den Nerven der jugendlichen Blätter sind hingegen in einer Periode, in welcher die Bildung der getüpfelten Gefässe vollendet war, die Spiralfaserzellen stets mit geschlossenen Enden ineinandergeschoben, ebenso suchte ich vergeblich in den Kelchblättern von Anemone coronaria nach einer Vereinigung der Ring- und Spiralfaserzellen zu wahren Gefässen.

Die Holzkörper.

Wie aus den Untersuchungen früherer Forscher bekannt ist, bilden die Bündel des Holzes und Bastes der Cycadeen, wie bei andern Dikotyledonen, durch ihre seitlichen Vereinigungen ein Netz, dessen Maschen von den Markstrahlen ausgefüllt werden und sind nicht minder die radialen Reihen der Holz- und Bastzellen, welche bei den Cycadeen beinahe eine gleiche Ausdehnung erreichen, durch parenchymatische Zellen unterbrochen und in unregelmässige concentrisch umeinanderliegende Platten von sehr verschiedener Stärke gespalten. Zwischen den Zellen des Bastes treten diese letzteren Parenchymzellen im Allgemeinen reichlicher als zwischen den Zellen des Holzes auf und erscheinen desshalb die Bastzellen selbst mehr vereinzelt.

Ausser diesen parenchymatischen markstrahlartig weiten Zellen und den gestreckten spindelförmigen fein zugespitzten Bastzellen, deren Wandungen bei Cycas, Dioon eine bedeutende Festigkeit erreichen, während sie bei Zamia muricata sehr zart bleiben, findet man einestheils gestreckte parenchymatische Zellen, anderntheils Gitterzellen. Erstere sind häufig durch zarte Scheidewände in 2 oder 3 kleine quadratische Zellen getheilt, von welchen eine jede einen rhomboëdrischen Crystall*) enthält.

Letztere, die Gitterzellen (Taf. V 17), sind zunächst an der bedeutenden Weite ihres Lumen's, nicht minder durch ihre zugespitzten Enden**), von den Zellen des Bastparenchym's, die stets enger sind und mit horizontalen Wandungen übereinanderstehen, verschieden. Ihre characteristischen Verdickungsschichten sind gewöhnlich nur auf den

*) Die Annahme Schleiden's, dass diese Crystalle (Grundz. I [2. Ausg.] 166) aus kohlensaurem Kalk bestehen, kann ich nicht bestätigen.

**) Durch welche sie auch von den Gitterzellen der Blätter abweichen, die, wie oben angeführt, mit horizontalen Wandungen übereinanderstehen.

den Markstrahlen parallelen Seiten, seltener auch auf den gegen Rinde und Mark gekehrten entwickelt und bestehen einmal aus einer Schichte, deren Spalten entweder über die ganze Breite der Zelle hingehen, oder eine unregelmässige Ausdehnung besitzen, dann einer tertiären Schichte, welche auf die Spalten der ersteren beschränkt ist und von zahllosen feinen Tüpfeln das Ansehen eines Siebes enthält.

Dieses characteristische Gepräge ihrer Verdickungsschichten ist an alten kräftigen Stämmen mit Leichtigkeit, dagegen an jüngeren Exemplaren von Cycas, Encephalartos, Zamia nur nach den sorgfältigsten Untersuchungen, und selbst dann nur sehr undeutlich oder selbst gar nicht zu erkennen, und dürften daher die Gitterzellen in der Ausbildung ihrer Verdickungsschichten in dem nämlichen Maass variiren, wie die Markparenchymzellen, die an jungen Exemplaren von Cycas, wie schon Moldenhawer*) und von Mohl**) hervorgehoben haben und ich selbst bestätigen kann, nur mit feinen Tüpfeln, an kräftigen Stämmen hingegen mit Tüpfeln von bedeutender Weite***) versehen sind.

Die Gitterzellen stossen bald nach einer Seite an eine derbwandige Bastzelle, nach der andern an die zu Krystalle-führenden Zellchen abgetheilten Bastparenchymzellen an, sind bald zu beiden Seiten von ersteren oder den letzteren umgeben oder liegen zu mehreren beisammen.

Während bei Zamia und Dioon das langsame Wachsthum des Holzrings gleichmässig und continuirlich fortdauert, erlischt bei Cycas und Encephalartos nach einer wahrscheinlich bei verschiedenen Stämmen bedeutenden Schwankungen unterworfenen Periode in dem grösseren Theil der Cambiumschichte die Neubildung von Zellen und bildet sich in dem Rindenparenchym ausserhalb des Bastes, von diesem durch eine Lage Stärkmehl enthaltender Parenchymzellen getrennt, eine neue Cambiumschichte aus.

Der Holzring, welcher aus diesen hervorgeht, erhält niemals Spiralfaserzellen und stimmt, abgesehen von diesen, in der Structur, wie in der Anordnung seiner Holz- und Bastbündel mit dem ersten Holzring über-

*) Beiträge 115.

**) l. c. 419.

***) Unter den von mir untersuchten Stämmen hatten nur die Markzellen des stärksten diese weiten Tüpfel; bei ihm waren gleichzeitig die Gitterzellen in den Bündeln des Stammes und der Blätter deutlicher ausgeprägt, als bei allen andern.

ein. Ein Gleiches gilt von der Entstehung wie der Structur der folgenden Holzringe. Diejenigen Stellen, an welchen die Cambiumschichte eines innern Holzring's ihre Thätigkeit fortsetzt, nachdem sie in dem grössten Theil des Umfangs desselben erloschen ist, besitzen eine sehr verschiedene Breite und Länge, und greifen diesem gemäss einzelne Bündel von innern Holzringen durch ihre bedeutende radiale Fortbildung zwischen die Bündel der äusseren ein. Auf diese Weise entstehen Verbindungen der auf einander folgenden Holzringe, deren Zahl und Unregelmässigkeit im Allgemeinen mit der Vermehrung und radialen Abnahme der Bündel in den äusseren Holzringen sich steigert, wie durch die Untersuchungen Miquel's *) bekannt ist.

Die Rinde.

Auf durchschnittenen Stämmen von Dioon und Cycas erscheint das Gewebe des Rindenparenchym's durch Streifen oder Lamellen, von welchen ein Theil in annähernd radialer Richtung von der äussersten Bastschichte gegen die Oberfläche des Stammes unter wellenförmigen unregelmässigen Biegungen hinzieht, der andere in tangentialer oder schrägtangentialer Richtung Verbindungen zwischen den ersteren herstellt, in Felder von unregelmässiger Weite getheilt **). Das Gewebe, welches diese Felder einnimmt, ist im geringeren Grad durchscheinend, und schrumpft an eintrocknenden oder in Weingeist aufbewahrten Stämmen in geringerem Grad ein, als das der Lamellen.

In seinen Zellen ist eine beträchtliche Menge von Stärkmehl abgelagert; dieselben haben eine bedeutende Weite, ihre Wandungen eine gewisse Festigkeit; weder in ihrer Anordnung, noch in ihrer Gestalt lässt sich eine Regel erkennen; Intercellularkanäle ziehen zwischen denselben hin und scheint eine Neubildung von Zellen in diesem Theil des Rindenparenchym's längst erloschen.

Das Gewebe der Lamellen besteht dagegen aus zartwandigen, gleichmässiger gestalteten, meist engeren Zellen, welche nur eine geringe Menge von Stärkekörnern enthalten, fest mit einander in Verbindung stehen und keine Intercellularkanäle zwischen sich lassen. Ihre regelmässige Anordnung lässt ferner erschliessen, dass sie durch wieder-

*) l. c. 133, 334.

**) Das nämliche gilt auch von dem Markparenchym von Dioon.

holte Theilung weniger Mutterzellen vermittelst paralleler Scheidewände in einer nicht fernen Periode entstanden seien, vielleicht auch in ihnen die Vermehrung des Rindenparenchym's noch fortdaure, wenn es auch nicht möglich war, diesen Vorgang unmittelbar in seinen einzelnen Phasen zu verfolgen*).

Bei Cycas erfahren ferner annähernd senkrechte, der Längsausdehnung des Stammes folgende, Zellreihen des Rindenparenchym's eine Theilung in kleinere Zellen und werden in cambiale Stränge übergeführt, die allmählig zu kleinen Holzkörpern anwachsen (Taf. II 7 ff.),

An dem frischen Stamm wurden diese Stränge nur in geringer Zahl in dem äussern Rindenparenchym an der Basis der Blätter wahrgenommen und sorgfältige Untersuchungen liessen hier ihren Ursprung in Gruppen kleiner von Protoplasma erfüllten Zellen, die den Raum weniger Rindenparenchymzellen einnahmen, erkennen (Taf. II 8). In der Folge sonderten sich diese cambialen Stränge in 2 Zonen, eine centrale, das Mark, dessen Zellen sich alsbald ausdehnen, und eine peripherische, in welcher die Zellbildung noch fortdauerte und alsdann eine abermalige Sonderung in Holzkörper, Cambiumschichte und Rinde eintrat (Taf. II 9). Ihr weiteres, nur von der Thätigkeit der Cambiumschichte abhängige, Dickewachsthum dauert gleichmässig ohne Unterbrechung an und erfolgt stets ausserordentlich langsam, so dass ihre Zunahme selbst nach vielen Jahren nur eine sehr unbedeutende ist und an dem ältesten Stamm, den ich untersuchen konnte, ihr Durchmesser nur 1—2 ½ Linien beträgt.

Das Mark in der Längsachse dieser Stränge besteht im ausgebildeten Zustand aus unregelmässig gestalteten parenchymatischen Zellen,

*) Nicht unwahrscheinlich dürfte ferner sein, dass während diese neugebildeten Zellen zu Dauerzellen der Rinde sich ausbilden, an andern Stellen des Rindenparenchym's eine Vermehrung der Zellen angebahnt und ausgeführt wird; es würde alsdann die Vermehrung der Zellen der Parenchymschichte der Rinde bei Cycadeen nur dadurch, dass die neugebildeten Zellen gruppenweise in Reihen oder Lamellen geordnet auftreten, von andern Pflanzen abweichen, bei welchen die sich theilenden Zellen der Parenchymschichte stets vereinzelt und zerstreut in dieser liegen. Doch fehlen gerade bei denjenigen Rinden, die durch ein vorherrschendes Wachsthum der Parenchymschichte ausgezeichnet sind, genauere Beobachtungen.

Bei den Cycadeen wäre ferner zu ermitteln, in welchem Maass bei der Entwickelung einer Laubblattskrone die in dem Stamm abgelagerte Stärke resorbirt werde und ob etwa mit den Veränderungen des Zellinhalts in dieser Periode die Vermehrung des Rindenparenchym's zusammenhängt. Der von mir diesen Untersuchungen geopferte Stamm befand sich im Stadium der Ruhe, alle andern aber waren abgestorben.

die entweder zartwandig — so an dem frischen Stamm — oder mit den zierlichsten Netzfasern — so an dem stärksten der abgestorbenen Stämme — versehen sind. Die äussersten derselben bilden, indem bei geringerer Weite ihre Längsausdehnung vorherrscht, den Uebergang zu dem Holzkörper, der von in radialen, mit der Zunahme des Stammumfang's sich mehrenden Reihen von Markstrahlen- und prosenchymatischen Zellen gebildet wird (Taf. II 9), die gerade wie in dem Holzkörper des Stammes in tangentialer Richtung zu einem Netz anastomosiren, dessen äusserst feine Maschen von den zahlreichen Markstrahlen ausgefüllt werden. Den Anfang dieses Holzkörpers nehmen engere langgestreckte mit breiten elliptischen Tüpfeln versehene Netzfaserzellen ein, den grösseren Theil desselben bilden weitere derbwandige, gewöhnlich nur auf den den Markstrahlen zugekehrten Seiten mit treppenförmigen Verdickungsschichten versehene Zellen, denen nur zuweilen einige poröse Zellen sich anreihen. Spiral- und Ringfaserzellen fehlen diesen Rindensträngen stets gänzlich.

Cambium und Rinde derselben besitzen nur eine sehr geringe Mächtigkeit; das erstere besteht nur aus 1 oder 2 Lagen zartwandiger Zellen, die letztere einestheils aus Bündelchen gestreckter feiner zartwandiger Zellen, in welchen hie und da eine derbwandige Bastzelle vorkommt, anderntheils aus parenchymatischen Zellen, von welchen die äusseren eine bedeutende tangentiale Streckung erfahren und mit den von Stärke erfüllten Zellen des gemeinschaftlichen Rindenparenchym's des Stammes verwachsen sind.

Um über den Verlauf dieser Rindenstränge Aufschluss zu erhalten, ist es geeigneter, sie an dem abgestorbenen Stamm, wo sie in mehreren Schichten, in grösserer Zahl und bedeutender Stärke ausgebildet waren, zu verfolgen.

Bei dem Kochen eines Fragment's dieses Stammes in Wasser löste sich zunächst die Rinde von dem Holzkörper; auf der Trennungsfläche beider ragten die in ihrem Verlauf von der Markscheide zu den Gürteln zerrissenen Bündel vor, der Gürtel selbst so wie die Rindenstränge waren völlig von dem parenchymatischen Gewebe der Rinde eingeschlossen. Von den auf der Oberfläche der Rinde haftenden Blattresten löste sich gleichzeitig bei diesem Verfahren der obere Theil über dem Grunde, wo im Innern eine Korklamelle ausgebildet war, wie bereits

Miquel*), beschrieben hat, los und zeigten die persistirenden Grundtheile der Blattbasen die oben beschriebene Anordnung ihrer Gefässbündel. Die Basen der Laubblätter übertrafen an tangentialer Breite die der Niederblätter um das 3—4fache und hatten sich daher bei dem Anwachsen des Stammes vergrössert, sie waren im Uebrigen im Vergleich mit den Niederblättern nur in sehr geringer Zahl vorhanden, so dass sonder Zweifel nur ein Theil der Laubblattbasen diese Vergrösserung erfahren haben dürfte.

Nach Entfernung des aufgeweichten parenchymatischen Gewebes von der innern Seite der Rinde übersieht man alsdann die Anordnung der Rindenstränge (Taf. II 1). Diese liegen in mehreren Schichten über einander, folgen im Allgemeinen unter leichten Biegungen der Längsausdehnung des Stammes und kreuzen sich daher rechtwinklicht einerseits mit den Gürteln, welche in tangentialer Richtung hinziehen (Taf. II 1 *g g*), anderseits mit den Zweigen der Markscheidenbündel, welche in radialer Richtung an diese herantreten (Taf. II 1 *m*) und beide bald zwischen denselben ihren Weg nehmen, bald durch Spalten derselben hindurchtreten (Taf. II 2, 3). Die Mehrzahl der Rindenstränge setzt sich über das obere und untere Ende des Fragmentes fort, während andere mit ihrem unteren Ende sich seitlich an einen Gürtel anlegen oder an der Kreuzungsstelle mit einem Gürtel in 2 Stränge spalten, von welchen der eine mit diesem in Verbindung tritt, der andere seinen Lauf nach unten fortsetzt (Taf. II 6) oder sie theilt sich in ihrem Verlauf in mehrere Stränge, welche entweder selbstständig zwischen den nächst benachbarten nach unten verlaufen oder wieder mit einander oder mit andern seitlich oder ausserhalb von ihnen in der Rinde hinziehenden Strängen sich vereinigen. Diese setzen alsdann entweder ihren Lauf über das Fragment hinaus fort oder legen sich an Gürtel an, so dass man stets vergeblich nach einem freien unteren abgeschlossenen Ende eines Rindenstranges sucht.

Ihr Ursprung an dem oberen Theil des Stammes lässt sich hingegen wenigstens an denjenigen, welche in den äusseren Schichten der Rinde hinziehen, bis zu den Basen der Laubblätter verfolgen, wo sie stets zu mehreren beisammen von den beiden Gürtelenden, welche in eine Blattbasis eintreten, sowie von den Verzweigungen derselben entspringen

*) Linn. 18. 130.

(Taf. II 3, 4, 5). Dabei ist es Regel, dass von den Rindensträngen einer Blattbasis die beiden stärksten (Taf. II 3, 5) an der ersten Gabelung der Gürtelenden sich ansetzen, die anderen aber allmählig und zwar in dem nämlichen Maass an Stärke abnehmen, als ihr Ursprung an den Auszweigungen oder dem die Gürtelenden verbindenden Bogen von dieser Stelle entfernt ist. Nicht selten vereinigen sich mehrere von einer Blattbasis entspringende Stränge in geringer Entfernung von ihrem Ursprung (Taf. II 2) oder mit den Strängen, welche von höher am Stamm inserirten Blättern herabsteigen; im Allgemeinen aber liegen die der unteren Blätter schichtenweise ausserhalb der von höheren Blättern herabsteigenden.

An dem frischen Stamm, der nur wenige solcher Rindenstränge besass, nahmen diese in der nämlichen Weise, wie wir eben gesehen haben, von Gürtelenden ihren Ursprung und ebenso konnte ein Zusammenhang ihrer unteren Enden mit den Gürteln tiefer stehender Blätter nachgewiesen werden (Taf. I 3 f.). Bevor diese Vereinigung zu Stande kommt, tritt stets auf der dem Gürtel zugekehrten Seite des Rindenstrang's ein Markstrahl von ungewöhnlicher Breite auf, durch welchen seine Holzbündel auseinanderweichen, dann mit Erweiterung desselben sich ausbreiten und in 2 Parthieen theilen, von welchen die eine nach rechts, die andere nach links unter einem Bogen an den Gürtel sich ansetzt.

In der Nähe dieser Verbindungsstellen und ebenso an den oberen Ursprungsstellen schliessen daher diese Rindenstränge kein centrales Mark ein, sondern erscheinen mehr oder minder halbirt, centripetal oder centrifugal entwickelt, je nachdem der Gürtel, mit welchem sie in Verbindung treten, auf ihrer äusseren oder inneren Seite hinzieht. In andern Fällen legt sich nur ein Abschnitt eines Rindenstrang's an einen Gürtel an, während der übrigbleibende Theil sich alsbald wieder schliesst und als stielrunder Strang seinen Lauf fortsetzt. In andern Fällen zog ein ausgebildeter Gürtel mitten durch die cambiale Anlage eines Rindenstrang's hindurch oder richtiger gesagt, es kam der letztere zur Hälfte auf der äusseren, zur Hälfte auf der inneren Seite desselben zur Entwickelung, so dass die zahlreichen Fälle, in welchen die Gürtel durch eine Spalte der Rindenstränge hindurchtreten, nicht dadurch zu Stande kommen, dass das untere Ende eines von oben herabwachsenden Stranges bei der Berührung mit ihnen sich theilt und sie gleichsam wie einen fremden Gegenstand umwächst und dann sich wieder vereinigt, sondern

in der Lage der in ihrer ganzen Ausdehnung oder doch einem grossen Theil derselben gleichzeitig entstandenen cambialen Anlage dieser Stränge ihre Aufklärung findet.

Auf diese Weise vereinigen sich die von den Basen der Laubblätter entspringenden Rindenstränge auch untereinander und umstricken die die Rinde durchziehenden Zweige der Markscheidenbündel, so wie die in die Blätter eintretenden Gürtel derselben und gehen auch mit diesen wieder mit ihrem unteren Ende Verbindungen ein.

Weder bei Dioon, noch bei Zamia, noch bei Encephalartos findet sich auch nur eine Spur von diesem merkwürdigen Rindengeflechte.

Miquel, der einzige Forscher, der bei Cycas circinalis diese Rindenstränge und das Netz, welches sie mit den Gürteln, deren Verhalten ihm unbekannt war, beobachtete, nahm an, dass diese »in dem Rindenparenchym hinziehenden und sich verästelnden Holzparthieen«*) die Grundlage einer neuen Holzlage darstellten, eine Annahme, die, nachdem alle Beobachtungen**) übereinstimmend den Zusammenhang der Holzringe des Stammes unter einander dargethan haben, keine einzige Thatsache auch nur von ferne auf den Zusammenhang dieser Rindenstränge mit dem äusseren Holzring des Stammes hinweist, vielmehr diejenigen Stränge, welche von den Basen der höher an dem Stamm inserirten Blätter herabsteigen, innerhalb der den unteren Blättern angehörenden hinziehen, nicht zu rechtfertigen ist, nicht zu gedenken, dass die Structur einer Holzlage, die durch die Vereinigung solcher stielrunder ein Mark umschliessender von einer besonderen Rinde umgebener Stränge leicht diesen Ursprung, oder wenn man annehmen wollte, dass diese einzelnen Stränge bei der Vereinigung zu einer Holzlage sich ausbreiteten, leicht den Zusammenhang derselben mit den in der Rinde hinziehenden oberen Abschnitten derselben erkennen lassen müsste.

Ihre Vergleichung mit Wurzeln, die in der Rinde hinziehen, zu welcher man zunächst geneigt ist, wenn man sie an Stammfragmenten über die Rinde vorragen sieht, entbehrt jeden Haltes, sobald man die Eigenthümlichkeiten der Wurzeln, deren Untersuchung der nächste Abschnitt gewidmet ist, in Betracht zieht; es wäre ausserdem weder die eigenthümliche Verflechtung dieser Stränge, noch die Thatsache, dass

*) Linn. 18. 141.

**) Vergl. Miquel l. c. 18. 134.

man niemals ein freies Ende in der Rinde findet, mit einer solchen Annahme zu vereinigen.

Ebenso wenig kann daran gedacht werden, sie mit den peripherischen Holzkörpern, welche bei Calycanthus, manchen Sapindaceen u. a. in der Rinde angetroffen werden, zu vergleichen, da diese stets in bestimmter Zahl und Stellung schon an dem sich entwickelnden Spross auftreten, in die Blätter desselben eintreten, ferner Ring und abrollbare Spiralgefässe enthalten.

Um zu ermitteln, ob diese mit einem centralen Mark versehenen Rindenstränge etwa unter Umständen die Rinde durchbrechen, Spiralfaserzellen ausbildeten und ein selbstständiges Wachsthum bethätigten, war meine Aufmerksamkeit auch auf ihre etwaigen Beziehungen zu Seitenknospen*) gerichtet.

Die wenigen Knospen, welche ich bei Cycas revoluta und Dioon edule zu beobachten Gelegenheit hatte, waren stets in der Blattachsel, seitlich von der Mittellinie des Blattes befestigt und dem Rand desselben mehr als dieser genähert; in dem Grund der jugendlichen Knospe war stets eine Gruppe von Netzfaserzellen wahrnehmbar, erst in den älteren weiter in der Entwickelung vorgeschrittenen bildete sich ein Kreis von Markscheidenbündeln aus. Nach abwärts drangen diese bis zu verschiedener Tiefe in die Rinde ein und konnten in manchen Fällen bei Cycas

*) Rheede hort. malab. III 13 berichtet bereits, dass Stücke des Stamm's von Cycas Wurzel schlügen und zu neuen Pflanzen aufzuwachsen vermöchten.

Falderman (Trans. Hort. soc. Lond. VI. 1826. 501) sah an den von einem absterbenden Stamm von Encephalartos horridus losgelösten Blattbasen Knospen entstehen, und veröffentlicht einen Holzschnitt einer Blattbasis mit 2 Knospen, von welchen die eine aus der Wundfläche der Schuppe, die andere auf der oberen Seite derselben zu entspringen scheint.

Buckland (Geol. u. Minerol. Uebers. v. Agassiz 1839. I. 560) beobachtet angeblich achselständige Knospen an dem oberirdischen Stamm von Cycas revoluta, und gedenkt der Knospenbildung bei Macrozamia spiralis.

Miquel (Monog. 7) sah bei Encephalartos horridus und Cycas revoluta circinalis Knospen an dem unterirdischen oder dem Grund des oberirdischen Stammes entspringen.

Regel 2 neue Cycadeen des Petersburger Gartens. Moscau 1857. 9) beobachtete bei Encephalartos horridus, caffer, Ceratozamia, Cycas revoluta am Grunde des Stammes, bei letzteren auch an dem oberen Theil desselben, Knospen und berichtet, dass die persistirenden Schuppen der Blätter, wenn sie mit einem Stück des Stammes ausgeschnitten werden, bei geeigneter Behandlung aus ihren Achseln Knospen entwickelten; bei Zamia calocoma beobachtete er auch einmal eine Knospe an einer Wurzel.

und Dioon bis zu den Gürteln, denen sie gleichsam aufsassen, verfolgt werden, während sie in 2 andern Fällen bei Cycas mit einem Rindenstrang zusammenzuhängen schienen; doch bin ich weit entfernt, aus diesen unvollständigen Beobachtungen diesen Zusammenhang verbürgen zu wollen, zumal da die Nothwendigkeit derselben schon desshalb unwahrscheinlich ist, weil Dioon, welchem diese Rindenstränge abgehen, ebenfalls Knospen in der gleichen Stellung hervorzubringen vermag.

Sucht man, da alle Vergleiche, zu welchen die Structur dieser ein Mark umschliessenden Stränge einladet, unbegründet erscheinen, in der Anordnung derselben einen Anhaltspunkt, um ihre Bedeutung zu ermitteln, so liegt es nah, dieselben mit denjenigen, welche bei Encephalartos ein Mark-, bei Ricinus und Zea ein Knotengeflechte bilden, zu vergleichen, und anzunehmen, dass sie ein diesen analoges Geflechte, welches die in der Rinde hinziehenden Markscheidenbündel umstricke und mit ihnen in Verbindung trete, darstellten, ja es scheint selbst eine solche Annahme bis zu einem gewissen Grad durch die Structur, nämlich in so fern ihnen Spiralfaserzellen abgehen, begünstigt zu werden; auf der andern Seite kann auch diesem Vergleich keine volle Berechtigung zuerkannt werden, sobald man die Entwickelung derselben in Betracht zieht, da die das Mark und Knotengeflechte bei den genannten Pflanzen darstellenden Stränge stets marklos, eine einseitige und eine begrenzte Ausbildung besitzen, während die Stränge in der Rinde von Cycas nur an ihren Ansatzstellen an die Gefässbündel des Blattes oder der Gürtel ein einseitiges, vielmehr in dem grösseren Theil ihrer Ausdehnung ein allseitiges Wachsthum und diesem gemäss ein centrales Mark in der Längsaxe ihres stielrunden Holzkörpers besitzen, und diesem ein unbegrenztes wenn auch langsames Dickewachsthum zukommt.

Die Wurzel.

Oberhalb des von der Spongiola bedeckten Vegetationspunkt's einer Adventivwurzel von Cycas revoluta oder des Zweig's einer solchen tritt in Folge der ersten Differenzirung des gleichmässigen Gewebes in der Längsachse derselben ein cylindrischer Strang auf, dessen Zellen durch geringere Weite und bedeutendere Längsausdehnung von den Zellen der umgebenden Rinde geschieden sind, im Uebrigen gleich diesen mit einem dichten an Protoplasma reichen Inhalt erfüllt sind.

In geringer Entfernung oberhalb dieser Stelle erscheint durch Vergrösserung der Rindenzellen und das Auftreten eines wässerigen Inhalt's in denselben dieser Strang deutlicher abgegrenzt; derselbe hat nun auf dem Querschnitt einen elliptischen Umriss angenommen und zeigt die erste Sonderung seiner bisher vollkommen übereinstimmenden Elementarorgane durch ungleiche Ausbildung derselben in Folge der Ablagerung secundärer Schichten (Taf. V 1). Dieser Prozess beginnt in der Nähe der Scheitel der grossen Achse der Ellipse, zwischen diesen und den Brennpunkten derselben, schreitet centripetal gegen den Mittelpunkt fort und entzieht zunächst wenige in der grossen Achse der Ellipse liegende Zellen der weiteren Vermehrung, in welcher alle übrigen Zellen des Stranges noch fortfahren (Taf. V 9). Diese verholzten Zellen stellen den Anfang der beiden Gefässbündel der Wurzel dar; die peripherischen eines jeden sind mit Ring oder abrollbaren Spiralfaserzellen versehen und übertreffen an Weite kaum die benachbarten Zellen, wesshalb es wahrscheinlich ist, dass man sie in früheren Entwickelungsstadien übersieht; die nach innen sich anreihenden haben ein weiteres Lumen und ringsum getüpfelte Wandungen von gelblicher Farbe. Auf diese folgen einige noch zarthäutige weitere Zellen, die in der Ausbildung zu porösen Zellen begriffen sind. Zwischen beiden Bündeln fährt das Gewebe des ursprünglichen centralen Strang's in der Vermehrung seiner Zellen fort.

An dem älteren Theil der Wurzel behält der centrale Strang auf dem Querschnitt entweder seinen elliptischen Umriss bei, oder er erscheint bandartig gedehnt. Die Zunahme seiner beiden Gefässbündel erfolgt sowohl an ihrem peripherischen, wie an ihrem centralen Ende, jedoch in sehr ungleichem Maasse. An dem ersteren werden in unmittelbarer Berührung mit den ersten Spiralfaserzellen oder doch in der nächsten Nähe derselben (Taf. V 10) einige neue Spiralfaserzellen gebildet, die ein etwas weiteres Lumen besitzen und deren Faser nicht mehr abgerollt werden kann. Mit ihrer Bildung ist in manchen Wurzeln der peripherische Theil dieser Bündel abgeschlossen, während an andern seitlich von seinem Ende (Taf. V 11, 12) einige mit Spiral-, Netzfasern verdickte oder einige getüpfelte Zellen sich anreihen, deren Lumen im Uebrigen hinter dem der porösen Zellen am centralen Ende des Bündels zurücksteht, deren Bildung hier gleichzeitig fortdauert.

Diese sind in 2 oder 3 unregelmässigen Reihen (Taf. V 10, 11, 12) angeordnet, stossen unmittelbar aneinander oder es erscheint nur hie

und da eine poröse Zelle durch eine Parenchymzelle von den übrigen abgetrennt. Die jüngeren derselben erhalten stets weitere Lumina als die zunächst älteren.

Auf dieser Stufe verharren vielfach diese beiden Gefässbündel, während in Wurzeln, deren Gefässbündelsystemanlage bandartig abgeflacht erscheint, ihre centripetale Entwickelung durch Ausbildung neuer poröser Zellen fortdauert (Taf. V 3), bis schliesslich eine Vereinigung beider herbeigeführt wird (Taf. V 4, 5).

Die Zweige der Wurzeln entspringen stets von den Spiralfaserzellen dieser Bündel und bilden selbst wieder zwei solcher Gefässbündel, das eine auf ihrer oberen, das andere auf ihrer unteren Seite, aus.

Während dieser Entwickelung der beiden Gefässbündel fährt das sie umgebende Gewebe der ursprünglichen Gefässbündelsystemanlage in der Theilung seiner Zellen, bald in stärkerem, bald in geringerem Grad fort und mehrt sich die Masse seiner unregelmässig angeordneten Zellen seitlich von und zwischen den beiden Gefässbündeln in bedeutenderem Maass als an den peripherischen Enden derselben; auch nachdem dieselben ihre Ausbildung vollendet haben, dauert diese Vermehrung noch fort und treten nun alsbald Spuren einer neuen Sonderung auf, indem in den peripherischen Lagen dieser Zellenmasse in 2 parallel mit den Seiten der Gefässbündel hinziehenden Bogen dickwandige Bastzellen, bald vereinzelt, bald zu 3—4 beisammen liegend, auftreten (Taf. V 12). Etwas später findet alsdann in der seitlich an den Anfang der Gefässbündel grenzenden Region eine wiederholte Theilung etlicher Zellen durch tangentiale Scheidewände statt und entstehen etliche senkrecht auf den Gefässbündeln stehende regelmässige Reihen zartwandiger, auf dem Querschnitt tafelförmiger, Zellen, die von einem dichten Inhalt erfüllt sind (Taf. V 11).

Diese Zellreihen stellen den Anfang der Cambiumschichte dar; ihre Ausbildung schreitet allmählig längs der centralen Ausdehnung der beiden Gefässbündel in den an diese anstossenden Zellen fort, zieht dann die zwischen den centralen Enden beider Bündel liegenden Zellen in ihre Entwickelung, bis schliesslich die Vereinigung der Cambiumschichten zu beiden Seiten der Bündel herbeigeführt wird.

Bevor diese Vereinigung erreicht ist, verholzen an den Anfängen derselben die von ihnen gebildeten radial gereihten Elementarorgane (Taf. V 13), sowohl auf ihrer inneren, wie äusseren Seite und auch dieser

Prozess schreitet in der nämlichen Richtung seitlich fort, bis innerhalb der vereinigten Cambiumschichte die Holzbündel, ausserhalb derselben die Bastschichten sich vereinigt haben (Taf. V 6).

Alsdann stellt der Holzkörper der Wurzel zwei parallele Platten dar, welche die beiden Gefässbündel, mögen diese nun vereinigt oder getrennt sein, umgeben; jede Platte des Holzkörpers zerfällt in 3 übereinanderliegende Lamellen, eine mittlere, die Cambiumschichte, eine innere, die Holzschichte, eine äussere, die Bastschichte, welche letztere auf dieser Stufe der Entwickelung gewöhnlich eine bedeutendere radiale Ausdehnung als die Holzschichte besitzt.

Alle Elementarorgane des Holzkörpers, wie die ihnen den Ursprung gebende Cambiumschichte, werden von radial gereihten Zellen gebildet, und stellen Markstrahlen-, Bast- und Holzzellen dar (Taf. V 14), die in der nämlichen gegenseitigen Beziehung wie in dem Stamm stehen und die nämliche Ausbildung wie in diesem erreichen. Letztere sind nur auf den den Markstrahlen zugekehrten Seiten mit Spalten oder Poren versehen, während die in centripetaler Folge entstandenen porösen Zellen der beiden Gefässbündel stets ringsum getüpfelt sind.

Das Gewebe zwischen den Gefässbündeln und dem Anfang des Holzkörpers dehnt sich während der Ausbildung des letzteren aus, es theilen sich seine Zellen, nehmen den parenchymatischen Character an und speichern Stärke in ihrer Höhlung an. Nicht selten dringen bei ihrer Ausdehnung einzelne zwischen die Bestandtheile der Gefässbündel ein und trennen den Anfang derselben mit seinen Spiralfaserzellen von der Gruppe der porösen Zellen (Taf. V 12, 14) oder es werden, besonders an stärkeren Wurzeln, letztere in kleine Gruppen gespalten oder selbst vereinzelt, so dass nur die aufmerksamste Beobachtung die Bestandtheile der beiden Gefässbündel zwischen den nun weiten markähnlichen Zellen der ursprünglichen Gefässbündelsystemanlage aufzufinden vermag (Taf. V 6, 14) und der Holzring der Wurzel ein Gewebe umschliesst, welches mit dem Mark des Stammes in vollster Uebereinstimmung zu stehen scheint.

An älteren Wurzeln schliesst sich der Holzkörper auch ausserhalb des peripherischen Endes der beiden Gefässbündel, erreicht aber stets nur eine geringere Stärke als an den Seiten desselben.

Mit dem höheren Alter der Wurzel erlischt endlich die Thätigkeit der Cambiumschichte und beginnt gerade wie in dem Stamm ausserhalb

des Bastes die Ausbildung einer zweiten, und schreitet das weitere Wachsthum in voller Uebereinstimmung mit dem des Stamm's fort.

Das Rindenparenchym der Wurzel besteht aus Stärkmehl enthaltenden Parenchymzellen und bildet frühzeitig eine oberflächliche Korkschichte aus.

Bei Vergleichung zahlreicher Wurzeln von Cycas revoluta fanden sich Beispiele mit 3 (Taf. V f. 8), 4, selten mit 5 — 8 primären Gefässbündeln vor, zu deren Seiten die Entwickelung der Cambiumschichten und der Holzkörper begann.

Die nämlichen Verschiedenheiten boten die Wurzeln von Dioon, Zamia muricata, Encephalartos horridus, welche letztere vorzüglich dadurch ausgezeichnet sind, dass der Holzkörper in der Mitte von den beiden Gefässbündeln sehr frühzeitig eine sehr bedeutende Stärke erhält und alsdann auf dem elliptischen Querschnitt desselben die beiden Spiralfaserzellgruppen die kleine Achse desselben einnehmen, während an der jugendlichen Wurzel ihre Anordnung mit der von Cycas übereinstimmt (Taf. V 15).

Die dem Licht entgegenwachsenden Wurzelzweige, sammt ihren dichotomen Auszweigungen*) enthalten 3 — 5 primäre Gefässbündel, bilden gewöhnlich nur einen dünnen Holzkörper aus und sind durch eine Zone erweiterter Rindenparenchymzellen, deren Stärkekörner einen Ueberzug von Chlorophyll erhalten haben, ausgezeichnet. Ein Theil dieser Zellen hat Cylinderform und ist in radialer Richtung oft durch die ganze Breite dieser Zone gedehnt und enthält diesen Farbstoff gewöhnlich nur in geringerer Menge; ein anderer Theil ist reichlicher mit demselben versehen und bildet flügel- oder strahlenartige Fortsätze, welche die ersteren Zellen dicht umschliessen.

In der Hauptwurzel von Zamia muricata (Taf. V 16) waren 6 Gefässbündel in den breiten Markfortsätzen am Anfang des Holzkörpers wahrnehmbar; bei Encephalartos wurden diese Gefässbündel vergeblich gesucht; seine Wurzel war nebst dem ersten Internodium zu einer von dem oberen Theil des Stamm's durch eine Einschnürung getrennten Rübe angeschwollen, deren saftreiches Gewebe in 3 concentrische Zonen getrennt war. In der inneren, die aus parenchymatischen markähnlichen Zellen bestand, von welchen stets mehrere durch Theilung

*) Vergl. Schacht, Flora Bd. 36. 265. T. 4.

einer Mutterzelle in bestimmter Richtung, wie man aus ihrer Anordnung entnehmen konnte, entstanden sein dürften, waren nur wenige getüpfelte Zellen aufzufinden; die mittlere, den Holzkörper darstellende, Zone bestand aus regelmässigen Reihen radialer Zellen, von welchen ebenfalls der grössere Theil eine markartige Beschaffenheit besass, die bei weitem kleinere von verholzten treppenförmigen Zellen gebildet wurde. Letztere traten erst in dem Uebergang der Wurzel in den Stamm in grösserer Menge auf. Eine dünne Cambiumschichte trennte diese mittlere Zone von der äusseren, der Rinde.

An einer in Weingeist aufbewahrten Keimpflanze von Zamia muricata bildete die rübenartige Hauptwurzel oberhalb ihres Endes in der zunächst auftretenden Gefässbündelsystemanlage zwei Gefässbündel und alsdann zu beiden Seiten derselben den Anfang des Holzkörpers in der nämlichen Weise, wie bei Cycas aus. In der Anschwellung der Wurzel trat das markähnliche Gewebe reichlicher auf und lagen nun die porösen Zellen der beiden Gefässbündel in ihm zerstreut, während die Spiralfaserzellen derselben ihre Lage unverändert beibehalten hatten und über den Anfang des Holzkörpers vorragten. Diese letzteren traten alsdann in dem oberen Theil der Wurzel zunächst durch die Cambiumschichte in Verbindung und wurden durch neu entstandne Holzbündel zu einem geschlossenen Ring vereinigt, während nun in dem weiten Mark die porösen Zellen vergeblich gesucht wurden. Gegen das obere Ende der Wurzel nahm das Mark an Umfang ab, die porösen Zellen wurden wieder in Menge nachweisbar, die Spiralfaserzellen beider Gefässbündel bogen nach aussen in die Rinde, um in die Cotyledonen einzutreten.

An dem ausgebildeten Keim einer unbestimmten Art von Cycas enthielten die beiden in dem grösseren unteren Theil ihrer Ausdehnung verwachsenen, mit den oberen ungleichen Enden auseinanderspreitzenden Cotyledonen ungefähr in ihrer Mitte, je 7, weiter abwärts je 4 in einem hufeisenförmigen Bogen angeordnete, mit Spiralfaserzellen versehene Bündel, welche an der Insertionsstelle der Cotyledonen sich in je 1 Bündel vereinigten, in den Kanten eines der Ausdehnung des ersten Internodium's entsprechend flach gedrückten Zellstrangs nach abwärts stiegen und im Grunde der sogenannten Radicula in einen cambialen Strang zusammenflossen. Das in dem oberen Theil des ersten Internodium's beide Bündel vereinigende Gewebe war nur durch ge-

deutende Weite seiner Zellen von den Zellen des cambialen Strang's in dem Grunde der Wurzel verschieden.

Nachdem Nägeli als allgemeines Gesetz ausgesprochen hatte, dass den Wurzeln aller Pflanzen in centripetaler Richtung sich entfaltende Gefässbündel zukommen, war es nicht der Nachweis, dass auch die Cycadeen diesem Gesetz gehorchten, der mich bestimmte, diese Untersuchungen mitzutheilen, sondern einestheils schien es mir nothwendig, die Unterschiede der Wurzeln von den Rindensträngen festzustellen, anderntheils den Ursprung des markähnlichen Gewebes, den Naegeli bei den Wurzeln dikotyledoner Pflanzen nicht bestimmt hatte, zu ermitteln. Wenn als Resultat dieser Untersuchungen sich nun auch ergeben hat, dass in den Wurzelzweigen und Adventivwurzeln das Mark von dem nämlichen centralen cambialen Strang, in dem die Gefässbündel entstehen, gebildet werde, mithin von dem wahren Mark, welches bei Entstehung der Gefässbündel in dem Stamm durch diese von der Rinde getrennt wird, wohl unterschieden werden muss, so konnte doch für die Hauptwurzel, die nach Nägeli sich genau wie eine Adventivwurzel verhält, dieser Punkt nicht vollkommen aufgeklärt, vielmehr nur dargethan werden, dass derselbe nur durch die Entwickelung des Pflanzenkeim's festgestellt werden kann, nachdem zuvor bestimmt ist, welcher Theil der Radicula aus dem mit der Wurzelmütze bedeckten Vegetationspunkt, welcher aus dem entgegengesetzten Blatt-bildenden hervorgeht. An dem ausgebildeten Keim der Cycadeen ist, da die Gefässbündel desselben bereits Spiralfaserzellen enthalten, nicht zu ermitteln, ob die von ihnen eingeschlossenen Zellen schon vor der Verholzung dieser Zellen eine von dem Cambium verschiedene Ausbildung erhalten haben oder ob sie erst nach Bildung der Gefässbündel dieselbe erlangen.

Will man aber die mitgetheilten Beobachtungen zu Gunsten der letzten Ansicht deuten, so würde das erste Internodium der Pflanze in dem grösseren Theil seiner Ausdehnung mit der Wurzel übereinstimmen, will man sie zu Gunsten der andern Annahme deuten, so wird wenigstens der Uebergang von Wurzel und Stengel ein allmähliger genannt werden müssen.

Dass aber diese Frage nicht ohne die Erfüllung der angeführten Desiderien erledigt werden kann, lehren Adventivwurzeln, z. B. die von Hemerocallis, welche, wenn sie eben die Rinde des Stammes durchbrechen, eine Cambiumschichte enthalten, welche Mark und Rinde trennt,

bei welchen mithin der aus dieser Cambiumschichte entstehende Gefässbündelring ein wahres Mark umschliesst, während Wurzeln, die eine bedeutende Länge erreicht haben, in geringer Entfernung von ihrem Ende in ihrer Längsachse einen Cambiumcylinder enthalten, in welchem die Verholzung der Gefässbündel beginnt, bevor die in der Längsachse dieses Cylinders liegenden Zellen eine markähnliche Ausbildung erreicht haben. Hier sehen wir, dass also die nämliche Wurzel an verschiedenen Stellen sowohl wahres, vor der Verholzung der Gefässbündel ausgebildetes, Markparenchym, als auch secundäres, von dem centralen Theil der Gefässbündelanlage gebildetes, enthalten kann.

Dass aber auch eine scharfe Grenze der Hauptwurzel und des ersten Internodium's nicht in der Ausbildung der Gefässbündel gesucht werden kann, sondern vielmehr die extremen Gegensätze, welche die centripetale Entwickelung der Gefässbündel der Wurzel und die centrifugale Entwickelung derselben in dem Stamm zeigen, ganz allmählig vermittelt werden, soll, da dieser Punkt an den Cycadeen wegen Mangel geeigneten Materials nicht erörtert werden konnte, an einem andern Beispiel gezeigt werden.

In dem Embryo von Phaseolus, dessen sogenannte Radicula eine Mark umschliessende Cambiumschichte enthält, welche oberhalb des Vegetationspunkt's der Wurzel zu einem centralen Strang sich vereinigt, entwickeln sich bei dem Keimen in dem letzteren in centripetaler Folge 4 Gefässbündel (Taf. IV 8); etwas weiter nach oben mit dem Auftreten des Marks, welches ganz allmählig erfolgt (Taf. IV 9) und eben so allmählig an Masse gewinnt, weichen diese Gefässbündel zunächst in der Mitte auseinander und treten bei unveränderter Lage der zu erst verholzten Spiralgefässe nun die später sich entwickelnden getüpfelten Gefässe rechts und links von denselben auf (Taf. IV 10, 11), sodass jedes Bündel von den zuerst entstandenen Gefässen nach beiden Seiten in tangentialer Richtung sich fortbildet und erst dann an dem Ende einer jeden Hälfte weiter nach aussen andere Gefässe sich anlegen. Diese Richtung der Entwickelung behält das Gefässbündel in der nächsten Strecke seines Verlauf's durch das erste Internodium bei, spaltet sich in 2 symmetrische Hälften (Taf. IV 12), welche in dem weiteren Verlauf mit den Hälften der benachbarten Bündel sich vereinigen*), dann

*) Vergl. Nägeli, Beitr. 61, 62.

von diesen sich wieder trennen und erst dann, wenn in der Nähe der Cotyledonen die beiden Hälften eines jeden Bündels sich wieder vereinigt haben, in centrifugaler Richtung ausgebildet werden.

Erklärung der Abbildungen.

Taf. I.

Cycas revoluta.

1. Querdurchschnitt eines Stamm's in natürlicher Grösse. — *c* die Grenze des Holzring's; — in der Rinde sind die Markscheidenbündel, die den Holzring verlassen, die Verzweigungen derselben, nebst den gürtelförmigen Gefässbündeln mehrerer Blätter, sowie die Zweige, vermittelst welcher dieselben unter einander in Verbindung stehen, sichtbar; *a a* bezeichnet die beiden in ein Blatt eintretenden Gürtelenden.

2. Querdurchschnitt des Stamm's wie 1, nach Bloslegung des Verlaufs eines gürtelförmigen Gefässbündels *a a* in seiner ganzen Ausdehnung.

3. Radialer Längsschnitt eines älteren Stamm's; *a* der erste Holzring, *b* der zweite Holzring; — *cc* die beiden Zweige, in welche ein Markscheidenbündel bei seinem Eintritt in die Rinde sich auflöst. — *e e* querdurchschnittene Gürtel von verschiedener Stärke; die stärkeren gehören Laub-, die schwächeren Niederblättern an. — *f* ein Rindenstrang, der mit seinem unteren Ende an ein in ein Blatt austretendes Gefässbündel sich ansetzt. — *g* in die Blattbasen eingetretene Gefässbündel.

4. *aa* die beiden in ein Blatt eintretenden Gürtelenden von einem älteren Stamm mit ihren Auszweigungen in die Blattbasis; *b* die Anastomose, welche ihre beiden ersten innersten Zweige eingehen.

5. Querschnitt durch die Blattbasis eines Stamm's, der eine bedeutende Länge erreicht hatte.

6. Querschnitt des Anfangs eines Markscheidenbündels aus einem älteren Stamm, 60fach vergrössert. *s* stellt die innersten der Spiralfaserzellen, die wie die folgenden durch Parenchymzellen von einander, wie von dem Anfang der Reihen der porösen Zellen des Holzkörpers, zwischen welchen die Markstrahlzellen theilweise eine sehr bedeutende tangentiale Dehnung erfahren haben, getrennt sind.

7. Ein Gefässbündel aus dem Scheidentheil eines Laubblatt's, querdurchschnitten, 60 mal vergrössert; *a* Spiralfaserzellen; *b* die treppenförmigen Zellen des in centripetaler Folge entstandenen Abschnitts des Holztheils. *c* zartwandige Zellen zwischen den Spiralfaserzellen und dem centrifugalen Abschnitt des Holztheils *d*; *e* Cambiumzellen, ausserhalb welcher die Gitterzellen und zartwandigen Bastzellen liegen; *l* die derbwandigen Baststellen an der äussersten Grenze des Bündels.

8. Ein Gefässbündel des Blattstiels, querdurchschnitten, 60 mal vergrössert. *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *l* wie in Fig. 7. *gg* die Gitterzellen des Bastes.

9. Radialer Längsschnitt durch die Rinde eines jüngeren Stamm's, um die gesetzmässige Entfernung der querdurchschnittenen Gürtel von den Blattbasen zu zeigen.

Dioon edule.

10. Querschnitt durch einen Blattstiel, ungefähr 6 mal vergrössert, zur Verdeutlichung der Anordnung der Gefässbündel. *a* die paarweise verschmolzenen Gefässbündel; *g* Gummigänge.

Taf. II.

Cycas revoluta.

1—7 in natürlicher Grösse.

1. Eine Lage des Rindengeflechtes aus einem alten Stamm nach Entfernung des Rindenparenchym's von der innern Seite aus dargestellt. *gg* die Gürtel, *m* Markscheidenbündel, die an Gürtel herantreten.

2. Ein Rindenstrang in seinen Beziehungen zu 2 Gürteln, mit seinen Verzweigungen.

3. Von den beiden in eine Blattbasis eintretenden Gürtelenden *gg* entspringen starke Rindenstränge.

4. Der Ursprung der Rindenstränge *h*, *i* von den Auszweigungen eines Gürtelendes *g*.

5. Die beiden in eine Blattbasis eintretenden Gürtelenden *gg* mit ihren Auszweigungen in derselben, geben an ihrer ersten Gabelung den beiden stärksten Rindensträngen *aa* den Ursprung; andere *iii* entspringen von der Anastomose, die ihre beiden ersten innersten Zweige eingehen, andere *ccc* von den höheren Auszweigungen.

6. Ein Rindenstrang setzt sich in seinem Verlauf mit einem Abschnitt an einen Gürtel an.

7. Querschnitt eines jungen Stamm's; *fff* stellt die Querschnitte der Rindenstränge dar.

8. Die erste Anlage eines Rindenstrang's bei 250facher Vergrösserung.

9. Querschnitt eines solchen bei 60facher Vergrösserung; seine Rinde ist mit Ausnahme einer kleinen Parthie entfernt.

Taf. III.

Dioon edule.

1. Querschnitt des Stammes in natürlicher Grösse. *c* der Holzring. *d d* die beiden Enden eines in ein Blatt eintretenden Gürtels, der in seiner ganzen Ausdehnung blosgelegt ist; *e e* die beiden Enden eines andern in einem Theil seines Verlaufs blosgelegten Gürtels nebst ihren Auszweigungen in der Blattbasis. *f* querdurchschnittne die Rinde in verschiedenen Richtungen durchziehende Zweige der Markscheidenbündel, deren Anastomosen nach besonderer Präparation durch Entfernung des Rindenparenchym's an einer kleinern Stelle bei *g* dargestellt sind. In dem Mark des Holzrings fand sich auf der Höhe des Querschnitts ein innerer Kreis von Gefässbündeln, der der Achse einer Blüthe angehörte, die dieser Stamm vor Jahren getrieben hatte; in dem oberen Theil des Holzring's befand sich eine Spalte, durch welche die Achse der Blüthe hervortrat, nachdem der den Stamm fortbildende Zweig, dessen Holzring in *c* dargestellt ist, anwuchs. Einen Zoll tiefer an dem Stamm als der in ein Blatt austretende Gürtel *d d* liegt der Kreis der Gefässbündel der Blüthenachse beinah in Berührung mit dem Holzring *c*; etwas tiefer waren beide vereinigt.

2. Ein radialer Längsschnitt durch die äusserste Rinde und den Anfang der Blattbasen, die Querschnitte der dicht über einander liegenden Gürtel zeigend.

3. Der Querschnitt einer Blattbasis von einem Blatt in der Nähe der Basis der Blüthe, wie sie erst bei Durchschneidung der Rinde zum Vorschein kommen, da sie äusserlich vollkommen von den Schuppen der Nieder- und Laubblätter bedeckt sind.

4. Der Querschnitt durch ein ähnliches Blatt.

5. Der Querschnitt durch eine Laubblattbasis.

Encephalartos horridus.

6. Querschnitt des Stamm's in natürlicher Grösse nach Bloslegung eines gürtelförmigen Gefässbündels in seiner ganzen Ausdehnung bis zu dem Eintritt seiner beiden Enden *a a* in eine Blattbasis. *c* Grenze des Holzring's.

Zamia muricata.

7. Desgleichen.

Taf. IV.

Dioon edule.

1—5. 60fach vergrössert. Querdurchschnitte von Gefässbündeln aus dem Scheidentheile eines Laubblatts.

1. Aus dem Grunde der Blattbasis; die Ring- und Spiralfaserzellen liegen an der innern Seite des Bündels, durch zartwandige Zellen von den Treppengängen des Holztheils getrennt. Diese sind in radialen Reihen angeordnet und durch Markstrahlen getrennt.

2. Oberhalb von 1 genommen. — Die Spiralfaserzellen sind von zartwandigen Zellen umgeben, welche den centripetalen und centrifugalen Abschnitt des Holzkörpers von einander scheiden.

3. 4. Oberhalb von 2 genommen. Der centrifugale Theil des Holzkörpers hat bedeutend abgenommen, der centripetale Theil ist stärker entfaltet, in Fig. 4 durch zartwandiges Gewebe in 3 Parthieen gesondert.

5. Oberhalb 4 genommen. Von dem centrifugalen Abschnitt des Holzkörpers sind nur noch 3 poröse Zellen übrig; in dem Rindentheil sind, wie in Fig. 3 und 4, die Lagen der weiteren Gitterzellen leicht von den engeren Zellen des Bastparenchym's zu unterscheiden.

6—7. Gefässbündel eines Schuppenblatts. 250 mal vergrössert.

6. Aus dem Grunde desselben; die Spiralfaserzellen liegen innerhalb der treppenförmigen Zellen. An der Grenze des Bündels finden sich derbwandige Bastzellen.

7. Aus der Spitze desselben. Die Spiralfaserzellen liegen nun ausserhalb der treppenförmigen Zellen.

8—12. Phaseolus vulgaris.

8. Der Querschnitt des Gefässbündelsystems einer jungen Wurzel, *ssss* 4 Spiralgefässgruppen.

9. Dasselbe weiter nach oben an dem Anfang der Wurzel, Mark umschliessend; *l* Bastbündel im Umriss.

10. 11. Ein Gefässbündel aus dem ersten Internodium; seitlich von den Spiralfaserzellen liegen die weiteren nicht abrollbaren Gefässe; ausserhalb dieser liegen dann weitere Gefässe.

12. Das nämliche Gefässbündel weiter oben aus dem ersten Internodium, in 2 Hälften, die aus einander gerückt sind, getheilt, die Anordnung ihrer Gefässe aber noch wie in 10 und 11 bewahrend.

Taf. V.

Cycas revoluta.

Querschnitte von Wurzeln. 1—8 nach schwacher Vergrösserung.

1. Jugendliche Wurzel. *c* die Grenze der Gefässbündelsystemanlage; *ff* die beiden verholzenden Bündel.
2. Die letzteren weiter ausgebildet.
3. Seitlich von den letzteren haben sich die Anfänge des Holzkörpers *xxxx*, und die Bastschichten *ll* ausgebildet.
4. Wie Fig. 3, die beiden Gefässbündel haben sich mit ihrem centralen Ende vereinigt.
5. Wie Fig. 4, einem älteren Theil der Wurzel entnommen, nachdem die Vereinigung der Anfänge der Holzschichte zu beiden Seiten der Gefässbündel vollendet ist.
6. Das nämliche von einer stärkeren Wurzel; die Gefässbündel, namentlich die porösen Zellen derselben, in dem markähnlichen Gewebe des Centrums zerstreut.
7. Querschnitt einer Wurzel, deren Gefässbündel die Ausbildung von Fig. 2 erreicht haben. Das zwischen beiden Gefässbündeln und in ihrer Umgebung befindliche Gewebe ist in der Sonderung begriffen.
8. Der Querschnitt einer starken Wurzel mit 3 Gefässbündeln in den Einschnitten am Anfang des Holzkörpers.
9. Das eine Gefässbündel von Fig 1, 230fach vergrössert. *s* Spiralfaser —, *vv* Netzfaser —, *p* poröse Zellen.
10. Ein Gefässbündel von dem älteren Theil einer Wurzel, 60fach vergrössert.
11. Ein Gefässbündel, *s* seine Spiralfaserzellen, *v* seine porösen Zellen. Zur Seite desselben in *c* ist die Cambiumschichte in der Entwickelung begriffen.
12. Ein stärker entwickeltes Gefässbündel mit zahlreichen Spiralfaser- und porösen Zellen. In dem umgebenden Gewebe sind bereits etliche Bastzellen verholzt.
13. Ein Gefässbündel aus einer älteren Wurzel (60fach vergrössert), dessen Spiralfaser- und poröse Zellen fest aneinanderliegen; die Cambiumschichte *c* ist in der Entwickelung weiter, wie in Fig. 11 vorgeschritten; an dem älteren Theil derselben sind die ersten Bestandtheile des Holzkörpers hervorgetreten.
14. Querschnitt einer Wurzel, 60 mal vergrössert, ein Gefässbündel darstellend, dessen Spiralfaserzellen von den porösen abgetrennt sind, und theilweise,

wie diese *pp*, in dem markähnlichen Gewebe zerstreut liegen. *x* die Holzschichte weiter in der Entwickelung vorgeschritten, als in Fig. 13; *c* die Cambiumschichte; *l* die Bastschichte.

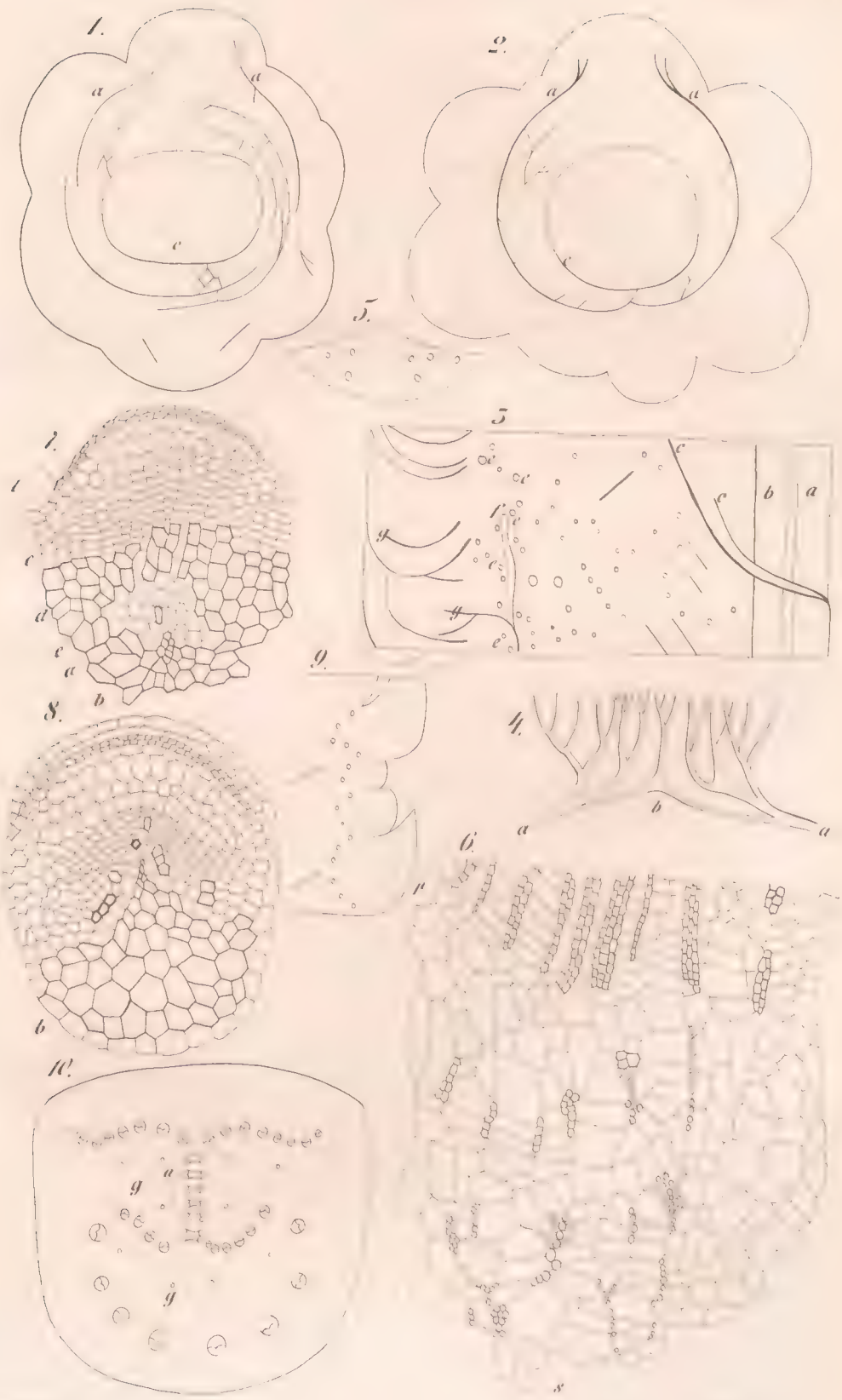
15. Querschnitt einer Wurzel von Encephalartos horridus. Die Spiralfaserzellen *ss* der beiden Gefässbündel sind von den porösen Zellen derselben *pp* abgetrennt; der Holzkörper erreicht in der Mitte zwischen beiden Bündeln frühzeitig eine sehr bedeutende Ausbildung.

Zamia muricata.

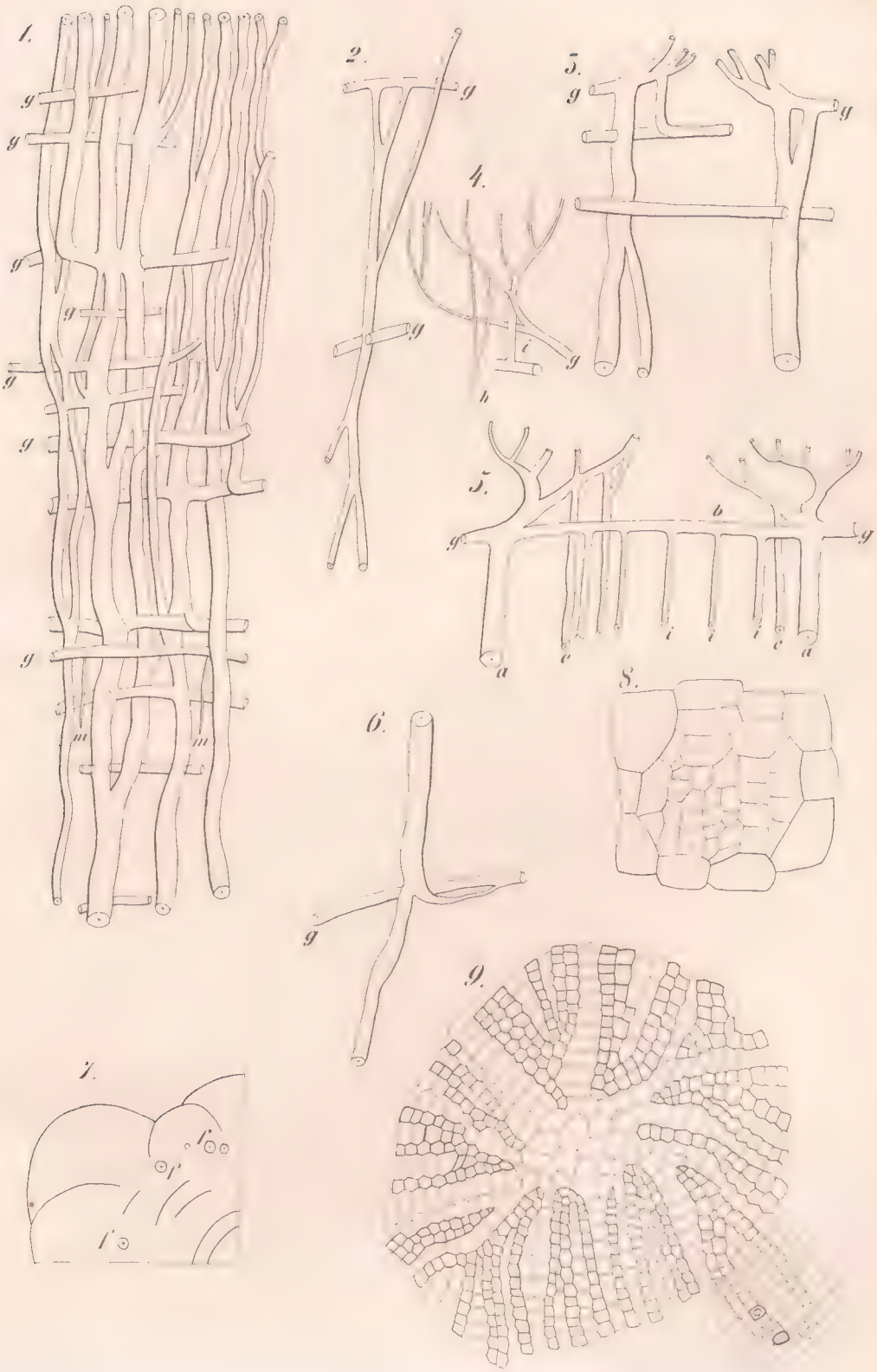
16. Querschnitt der Hauptwurzel; in den breiten Einschnitten des Holzkörpers liegen die Gefässbündel.

Cycas revoluta.

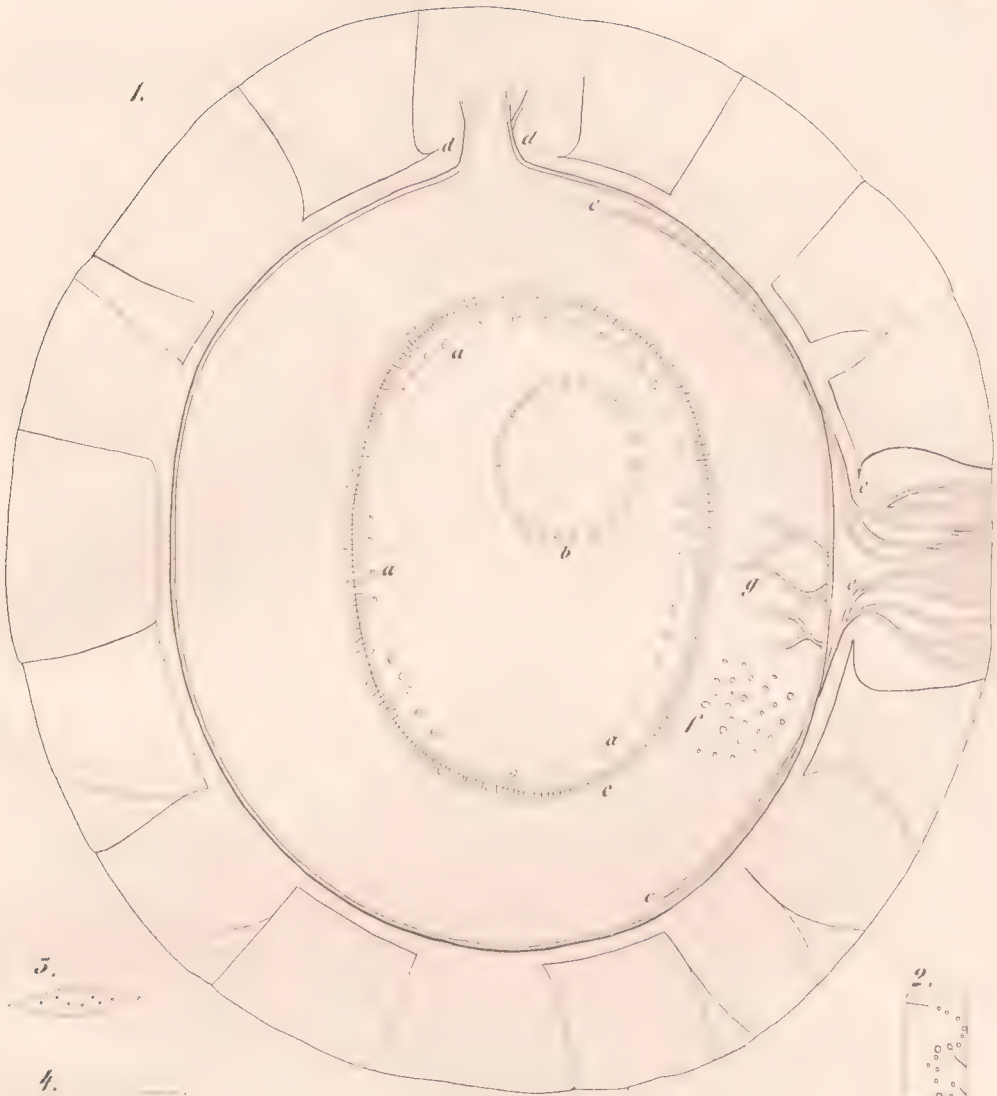
17. Radialer Längsschnitt durch den Bast bei 250facher Vergrösserung; *l* derbwandige Bastzellen; *m* Bastparenchym. *g* Gitterzellen, deren siebförmige Verdickungsschichten nur an einem kleinen Theil ihrer Wandung angedeutet ist.



Lith Anst v J G Bach Leipzig



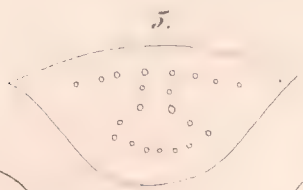
Lith.Anst. v. L. C. Bosch, Leipz.

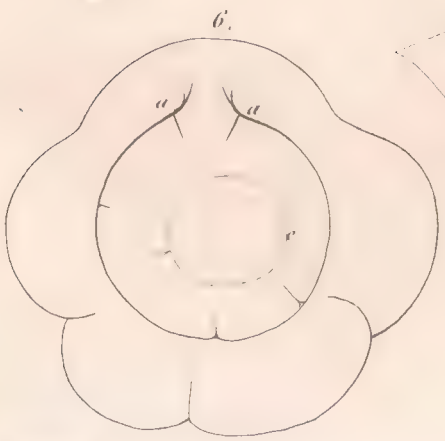

1.
d
d
c
a
a
b
a
g
f
a
c
c

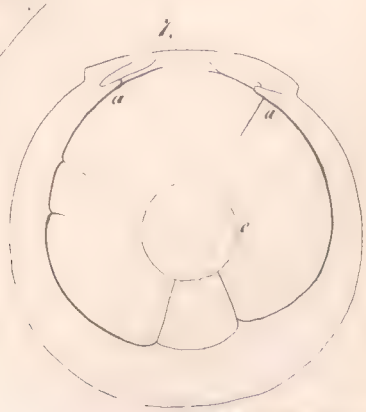
3.

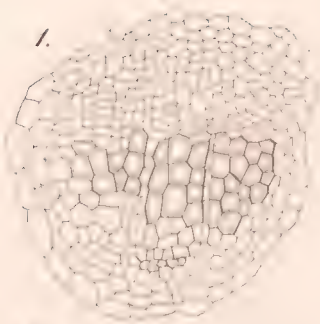
2.

4.

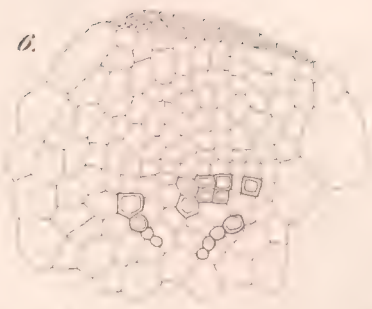

5.


6.
a
a
c

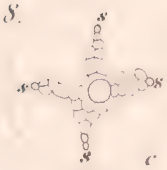

7.
a
a
c



1.

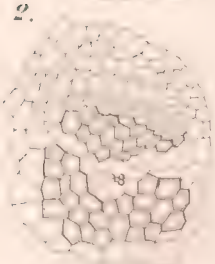


6.

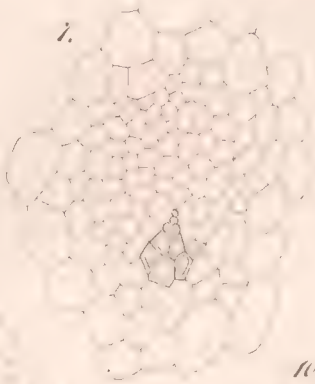


8.

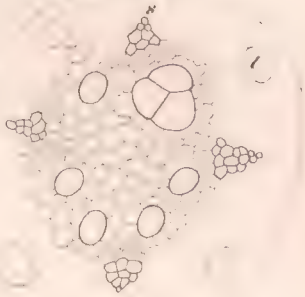
c



2.

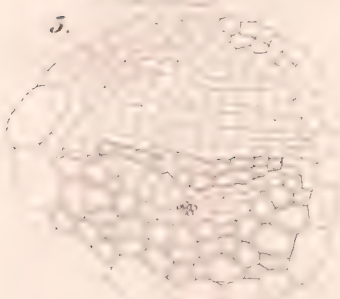


7.

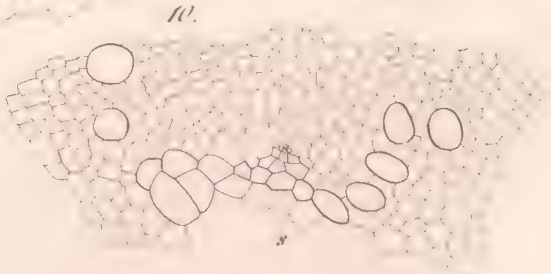


9.

1

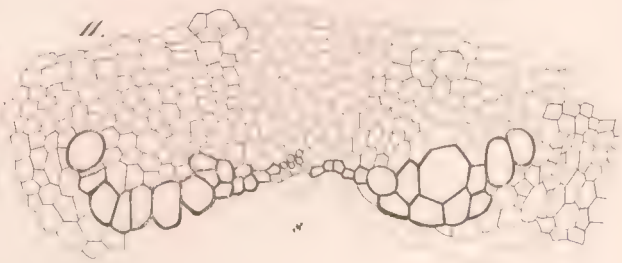


3.



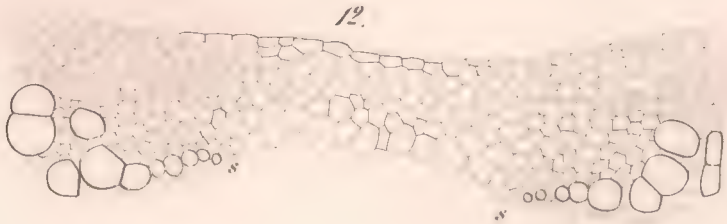
10.

4.

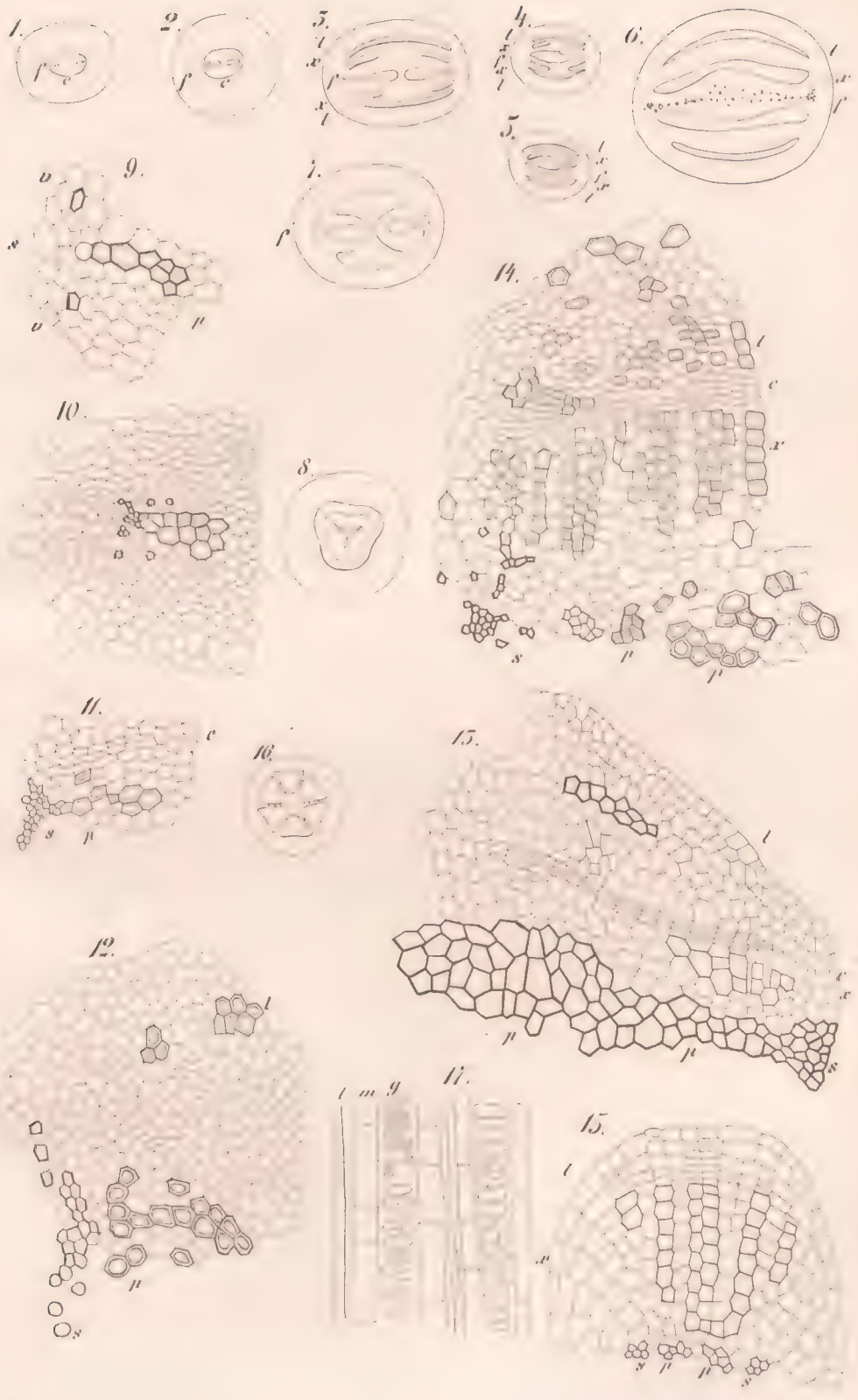


11.

5.



12.



Luth. Anst. v. C. Bach, Leipz.

ÜBER

SEITENKNOSPEN BEI FARNEN,

VON

G. METTENIUS.

Der erste Forscher, welcher sich entschiedener über die Auszweigung der Gefässcryptogamen aussprach, war meines Wissens Brongniart. In den trefflichen Characteristiken von verschiedenen Familien dieser Gewächse, welche wir in seiner Histoire des vegetaux fossiles finden, nimmt dieser Forscher an, dass den Gefässcryptogamen im Allgemeinen axilläre Knospen fehlen, dass die Stämme der Farne und Lycopodiaceae*) durch Dichotomie, die der Equisetaceae**) vermittelst Knospen, welche in der Mitte zwischen den Achseln zweier benachbarter Blätter hervorbrechen, sich verzweigen. Von den Lycopodiaceis erläutert Brongniart ausführlicher die dichotome Verzweigungsweise und führt zur Rechtfertigung seines allgemeinen Ausspruchs auf der einen Seite den Beweis, dass die Sporangien dieser Gewächse nicht in der Achsel, sondern auf dem Grunde der Blätter befestigt seien, während er auf der andern Seite eine unerhebliche Ausnahme in den angeblich axillären bulbillenartigen Zweiglein von Lycopodium Selago u. a. erblickt.

Ein dieser Ansicht Brongniart's widersprechendes Resultat ergaben die Untersuchungen Karsten's***), welcher bei zahlreichen Farnen eine Beziehung der Knospen oder Seitenaxen zu den Blättern der Hauptachse nachzuweisen vermochte; indem er fand, dass die Ursprungsstätte der Knospen entweder auf dem Rücken der Blattbasis, wie bei Alsophila prunata, oder auf dem Stamm in der Nähe von dieser, wie bei Arten von Polypodium u. a., oder an der Seite des Blattstiels liege, wie z. B. bei Hypolepis.

Aehnlich wie Karsten bei Farnen, versuchte Döll †) bei den Lycopodiaceis eine Beziehung zwischen den Zweigen und Blättern der Hauptachse nachzuweisen. Seine Untersuchungen an Selaginella erga-

*) Histoire des veget. fossiles II. 30. **) l. c. I. 102.
***) Vegetationsorg. d. Palmen 124. †) Flora Baden's I. 75.

ben, dass die Blattspirale sich continuirlich über die unbegrenzte Hauptachse fortsetze, dass diejenigen Blätter, welche Seitenzweige entwickeln, eine gleichhälftige Ausbildung erreichen und endlich, dass die Seitenzweige nicht in der Blattachsel, sondern neben derselben entspringen.

Auf der andern Seite erhielt die dichotome Theilungsweise der Lycopodiaceae eine Stütze in den Untersuchungen Hofmeister's*), welcher nachwies, dass die Auflösung der Achse in 2 gleichwerthige Strahlen in der Theilung der Scheitelzelle durch eine verticale Scheidewand in zwei gleiche, in der Längsausdehnung des Stamm's parallel neben einander liegende Zellen begründet sei, mithin in der nämlichen Weise, wie bei dem Thallus von Dictyota**) erfolge.

In Folge neuerer Untersuchungen spricht Hofmeister***) den Farnen axilläre Knospen ab und sucht den Nachweis zu führen, dass ihre Verzweigungen entweder durch Dichotomie oder Adventivknospen zu Stande kommen.

Zu den gleichen Resultaten gelangte ferner Stenzel.†)

Unter diesen widersprechenden Ansichten schien eine erneute Untersuchung der Auszweigung der Gefässcryptogamen gerechtfertigt und zwar um so mehr, als, nachdem die Ansichten der Botaniker sich über die Blattnatur der Wedel der Farne geeinigt hatten, es befremden musste, dass die Verzweigung der beblätterten Achsen dieser Gewächse durch Dichotomie, welche in der Regel nur bei Thallophyten oder nur zuweilen bei fasciirten Stämmen beblätterter Pflanzen angetroffen wird, erfolgen oder gar von zufällig sich entwickelnden Knospen, die auf den Namen von Adventivknospen Anspruch haben, abhängen sollte.

Um aber ein Missverständniss oder einen Wortstreit zu vermeiden, wird die Bemerkung nicht überflüssig sein, dass in den nachfolgenden Untersuchungen als Seitenknospen diejenigen Knospen angesehen werden, welche constant und normal in einer bestimmten Beziehung zu den Basen der Blätter stehen, während der Ursprung durch Dichotomie nur solchen Sprossen zuerkannt wird, welche durch eine von den Blättern unabhängige Auflösung der Achse in 2 gleiche Strahlen gebildet werden und als Adventivknospen nur solche gedeutet werden, welche ebenso unabhängig von den Blättern, wie die durch Dichotomie ent-

*) Vergl. Unters. 115. **) Vergl. Nägeli, Algensyst. 185.
***) Abhandl. d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch. V. 630, 649.
†) Jahresbericht d. schles. Gesellsch. 1857. 85.

standenen Sprosse, als Neubildung unter dem Vegetationspunkt der Hauptachse auftreten.*)

Gehen wir zu unsern Beobachtungen über, so wird es vielleicht nicht unpassend sein, zunächst bei denjenigen Farnen zu verweilen, deren Blätter nach dem einfachsten Verhältniss der Blattstellung in zwei Zeilen angeordnet sind.

Bekanntlich sind die Farne dieser Blattstellung in der Regel mit kriechenden, seltner mit klimmenden Stämmen versehen, entwickeln auf der unteren dem Boden zugekehrten Seite derselben, seltner ringsum, wie bei Pteris aquilina, Asplenium Thwaitesii, Wurzeln, während nach der oberen Seite die Blätter beider Zeilen in Folge einer Drehung des Blattstiels, welche ihre Fläche aus der normalen Lage, in welcher der Breitedurchmesser desselben sich mit der Längsausdehnung des Stamm's rechtwinklicht kreuzt, in eine zu dieser parallelen Lage übergeführt wird, convergiren.**)

Diese Farne sind ferner häufig dadurch ausgezeichnet, dass ihr Stamm sich etwas abplattet, auf dem Querschnitt eine elliptische Form annimmt, auf seiner oberen Seite das Rindenparenchym in bedeutenderer Mächtigkeit entwickelt, als auf der unteren und endlich die Anordnung

*) Eine solche Bestimmung der Seitenknospen nach ihren Beziehungen zu den Blättern ist, wenn man in Betracht zieht, dass auch bei manchen Phanerogamen die Seitenknospen nicht an ihrer gewöhnlichen Stelle in der Blattachsel, sondern neben derselben auftreten, eine nothwendige. — Nach dem Verhalten ihrer Anlage zu dem benachbarten Gewebe können sie ferner eingetheilt werden in solche, welche in dem Gewebe des Stammes entstehen und bei ihrer Entfaltung die Rinde durchbrechen, wie z. B. bei den Equisetaceis, die vielleicht Nägeli[1]) veranlasst haben, anzunehmen, dass alle Seitenachsen im Innern des Gewebes der Mutterachse ihren Ursprung nehmen, dann in solche, deren Anlage unter dem Vegetationspunkt von einer oberflächlichen Gewebsmasse der Hauptachse gebildet wird, wie es bei der Mehrzahl der axillären Knospen der Fall sein dürfte und endlich in solche, welche durch Theilung des Vegetationspunkt's in zwei ungleiche oder selbst zwei gleiche Theile ihren Ursprung erhalten, wie es, nach den Untersuchungen Hofmeister's bei Selaginella und in weit ausgedehnterem Maasse der Fall sein würde, wenn die Annahme Pringsheim's[2]) und Irmisch's.[3]) nach welcher alle axillären Knospen durch Dichotomie der Hauptachse in 2 zunächst gleiche Sprossen entstehen, von welcher der eine diese fortbilde, der andere zu dem Seitenzweig werde, eine allgemeinere Gültigkeit haben sollte.

Diese Verschiedenheiten dürften von der nämlichen untergeordneten Bedeutung sein, wie die Entstehung der Adventivknospen unter oder in den oberflächlichen Gewebslagen eines Pflanzentheil's.

**) Vergl. von Mohl, verm. Schriften 21; Hofmeister l. c. 619.

1) Zeitschr. f. wiss. Bot. Heft 23. 4. 178. 2) Bot. Zeitung 9. 118. 3) Bot. Zeitung 15. 492.

seines Gefässbündelsystems nicht unwesentliche Modificationen desjenigen Typus, welcher bei Farnen mit mehrzeiligen Blättern am häufigsten ausgebildet ist, bietet. Während nämlich bei letzteren im Allgemeinen sämmtliche Gefässbündel zu einem Netz vereinigt sind, dessen Maschen an Zahl und Ausdehnung den Blattbasen entsprechen und an bestimmten Stellen Zweige in die Blätter und Wurzeln abgeben, sind bei den Farnen mit zweizeiligen Blättern die Gefässbündel der oberen Seite vorzugsweise für die Blätter und Zweige, die der unteren für die Wurzeln bestimmt, und hängen ihre Vereinigungsstellen nicht nur von den Insertionspunkten der Blätter und Zweige ab, sondern finden auch an andern Stellen, unabhängig von diesen, statt, so dass das Netz, welches sie bilden, als ein unregelmässiges erscheint.*)

Diese Farne mit zweizeiliger Blattstellung sind aber auch durch die grosse Regelmässigkeit, mit der sie ihre Knospen entwickeln, ausgezeichnet und desshalb grade für unsere Untersuchungen vor allen andern geeignet.

Im Allgemeinen entsprechen die Knospen dieser Farne an Zahl den Blättern der Achse**) oder sie übertreffen dieselben nur in seltnen Fällen um das Doppelte und nehmen ihren Ursprung entweder aus dem Stamm oder dem Grund des Blattstiels.

Die dem Stamm entspriessenden Knospen sind stets in 2 Zeilen angeordnet, die entweder mit den Blattzeilen zusammenfallen und wie diese um 180° divergiren oder unterhalb der beiden Blattzeilen liegen und alsdann, da wo diese dem Rücken des Stammes sich näheren, in diametraler Opposition verharren oder da, wo diese nur in geringerem Grad diese Stellung verlassen, gegen die Mittellinie der unteren Stammseite rücken. Die einzelnen Knospen aber sind alsdann entweder unter dem Insertionspunkt des Blattes, dem sie angehören, vorn und unten oder hinten und unten von demselben befestigt.

---

*) Polypodium squamulosum, vulgare, aureum, latipes, Davallia pyxidata, elegans, Aspidium coriaceum können als Typus der angedeuteten eigenthümlichen Structur dieser Farne gelten, welche im Uebrigen die nämlichen Modificationen bietet, wie die Structur der mit complicirteren Blattstellungen versehenen Farne, wie ich an einem andern Orte darthun werde, wesshalb ich hier nur auf die von Nägeli (Beitr. I 54) bei Marsilea, von Hofmeister (l. c. 60) bei Pteris aquilina beschriebenen verweise.

**) Abgesehen von den Blättern der Keimachse, über welche wegen Mangel zahlreicherer Beobachtungen ein Urtheil abzugeben ich nicht im Stande bin und in gewissen, nachher näher bestimmten Fällen, dem ersten Blatt der Seitenaxen.

Nehmen die Knospen hingegen an dem Blattstiel ihren Ursprung, so ist entweder der vordere oder hintere seitliche Rand desselben ihre Ursprungsstätte oder es entspringt auf jeder dieser beiden Seiten des Blattstiels eine Knospe.

Beispiele von Farnen, deren Blatt- und Knospenzeilen zusammenfallen, indem ein jedes Blatt in seiner Achsel genau in der nämlichen Weise, wie es bei Phanerogamen Regel ist, eine Knospe trägt, bieten Trichomanes brachypus, Ankersii, rupestre, radicans, scandens, speciosum, giganteum, auriculatum, dissectum, Kunzeanum, welche zunächst namhaft gemacht zu werden verdienen, einestheil's weil sie die voreilige Behauptung, dass allen Farnen axilläre Knospen absolut fehlten, zurückweisen, anderntheil's, weil sie uns eine sichere Basis verleihen, wenn wir Knospen, welche statt dieser in der Blattachsel stehenden, in einer bestimmten Entfernung von derselben inserirt sind, mit ihnen identisch halten und als Seitenknospen ansehen, ja sie sind nebst allen andern Arten von Hymenophyllum und Trichomanes, deren Blätter und Knospen an Zahl stets übereinstimmen, geeignet, die geringe Bedeutung der verschiedenen Ursprungsstätten der letzteren, ja selbst die Uebergänge zwischen denselben zu zeigen.

Am geringfügigsten erscheinen in dieser Beziehung diejenigen Modificationen, welche die genannten Arten bei Vergleichung zahlreicher Exemplare darbieten und darauf beruhen, dass die axilläre Knospe etwas weiter nach vorn auf den Stamm, muthmaasslich in Folge einer Streckung des zwischen Knospen- und Blattbasis liegenden Stengelstück's, rückt z. B. Trichomanes rupestre, radicans, brachypus, Ankersii.

An diese reihen sich alsdann an: Hymenophyllum ciliatum, elegans, crispum, Trichomanes caespitosum, deren Knospen nur mit der äusseren Hälfte in der Richtung nach vorn und unten die Blattachsel verlassen und daher den Uebergang bieten zu denjenigen Arten, deren Knospen unmittelbar unter den Insertionspunkten der Blätter entspringen, wie es bei Hymenophyllum chiloënse, pulchellum, rarum, caudiculatum, australe, deutlicher noch bei H. interruptum, dichotomum, tortuosum, Serra, pedicellatum, Trichomanes exsectum der Fall ist.

Auf der andern Seite bieten uns die Hymenophylleae Uebergänge zwischen axillären Knospen und solchen, die an der vorderen, der Stammspitze zugekehrten Seite des Blattstiel's entspringen. So z. B. treten bei Hymenophyllum cruentum, asplenioides, hirsutum, Boryanum,

spectabile, pendulum die Knospen noch beinah aus der Blattachsel hervor, sind aber nicht nur nach unten und aussen gerichtet, sondern zeigen bereits auch in geringer Ausdehnung einen Zusammenhang mit dem Grund des Blattstiel's; deutlicher tritt dieser Zusammenhang hervor bei Hymenophyllum trapezoidale, tunbridgense, Wilsoni, pectinatum, Bridgesii, multifidum, magellanicum, javanicum, myriocarpum, polyanthos, demissum, gracile, spinulosum, Trichomanes reniforme, melanotrichum, humile; noch deutlicher oberhalb der Insertion des Blattstiels auf seiner vorderen Seite stehen endlich die Knospen bei Hymenophyllum valvatum, organense, sericeum, plumosum, dilatatum, flexuosum, Trichomanes Filicula, pyxidiferum, eximium.

An die Hymenophylleae*) dürften alsdann die Davallien anzureihen

*) Van den Bosch (Inleid. to de Kenn. d. Hymenoph. 1859. 8.) giebt folgende Diagnose der Hymenophylleae, seiner Bryopterides: Soris terminalibus, receptaculo e venula elongata constituto zum Unterschied von den Eupterides, welche alle andern Abtheilungen der Farne umfassen und deren Diagnose: »Soris lateralibus, receptaculo s. nullo, s. celluloso variae formae« lautet. Zur Erläuterung dieser Diagnose führt v. d. Bosch an, dass bei den Eupterides die Fruchthaufen niemals das Ende eines Nerven einnehmen, während meines Erachtens das Receptaculum der Dicksonien und Hymenophylleen in Stellung und Structur vollkommen übereinstimmt, nicht zu gedenken, dass Gefässzellen bei der Mehrzahl der Polypodieen an der Bildung des Receptaculum's der Fruchthaufen Antheil nehmen. — Nicht minder widersprechen muss ich der Annahme v. d. Bosch's, dass den Sporangien der Hymenophylleen häufig ein verticaler Ring zukomme, da ich bei keiner der mir zugänglichen Arten einen solchen aufzufinden vermochte. — Mit Recht widerlegt dagegen v. d. Bosch die von mir früher ausgesprochene Ansicht von der Bildung des Schleier's der Hymenophylleen und nimmt naturgemäss an, dass die Blattsubstanz gleichsam becherartig in der Umgebung des frei werdenden fruchttragenden Nerven auswachse; wenn er aber gleichzeitig die Existenz der beiden Nerven, welche bei Trichomanes von dem Grund des Receptaculum's aus an der Grenze des Schleier's von der unveränderten Blattfläche hinziehen und mich zur Annahme einer übereinstimmenden Bildung dieses Schleier's mit dem der Davallien veranlasst hatten, läugnet, so kann er wohl diesen Punkt nicht mit der erforderlichen Sorgfalt untersucht haben; nicht minder musste mich befremden, dass ein Monograph der Hymenophylleae, der die anatomische Structur der Blätter in das Bereich seiner Untersuchungen gezogen hat, in die Diagnose seiner Hymenophylleae (Hymenophyllum und Trichomanes Auct) zur Unterscheidung derselben von den Loxsomaceae »fronde e cellularum strato unico constituto« aufnehmen mag, da er doch wohl erkannt haben sollte, dass die Blätter von Trichomanes reniforme, Prieurii, Hymenophyllum dilatatum u. A. aus 3 — 4 Zelllagen bestehen. — Eigenthümlicher als alle Verhältnisse, welche bisher als Charactere der Hymenophylleae beigebracht wurden, wäre der Keimungsprozess dieser Gewächse, wenn die Beobachtungen Taschner's (De duab. Trichom. specieb. Jen. 1843), nach welchem die ersten Stadien der keimenden Sporen mit den der Laubmoose übereinstimmen würden, sich bestätigen sollten. Liegt die Vermuthung auch nah, dass Taschner durch keimende Laubmoossporen

sein, da auch diese uns Uebergänge von achselständigen Knospen zu solchen, die vorn und unten von der Blattachsel entspringen, bieten.

So z. B. liegen bei Humata heterophylla, pedata, parvula, sessilifolia, lepida, ferner bei Davallia mucronata u. a. die Knospen mit ihrer innern Hälfte in die Blattachsel und überragen mit ihrer äusseren dieselbe nach unten; bei Davallia elegans, divaricata, pentaphylla, Humata alpina, parallela, Belangeri wird zuweilen noch die nämliche Knospenstellung wahrgenommen, während häufiger bei ihnen, wie bei Davallia canariensis, pyxidata, dissecta, bullata, stenocarpa, falcinella, Humata chaerophylla, immersa, Microlepia tenuifolia die Seitenknospen in bedeutenderer Entfernung nach vorn und unten von den Blattbasen entspringen. Weitere Beispiele dieser Stellung bieten Aspidium coriaceum, Serra, gongylodes.

Die Entfernung der Knospen in dieser Richtung von den Blättern erreicht dann das Maximum bei Lygodium scandens und in's Besondere bei Polybotrya Meyeriana, deren Internodien oft eine Länge von $^1/_2$—1′ erreichen und aus ihrer Mitte die Knospe hervortreten lassen. Dass aber grade diese bedeutende Entfernung der Knospe von dem Blatt nur ein Moment von der untergeordnetsten Bedeutung sei, lehrt die Vergleichung von Exemplaren mit gestauchten Internodien, deren Knospen vorn und unten von den Blättern, wie bei Davallia pyxidata, entspringen.

Bei allen angeführten Beispielen entspricht einem jeden Blatt der ausgebildeten Pflanze eine Knospe und beginnt in der Regel die letztere nach der Ausbildung des Blatt's, dem sie angehört, ihre Entfaltung, so dass Haupt- und Seitenaxen ohne Schwierigkeit unterschieden werden können; nur in seltenen Fällen findet die Entfaltung des Seitensprosses und des Blatt's gleichzeitig statt, und kommt derselbe an Stärke der Hauptachse gleich, so dass diese eine dichotome Theilung erfahren zu haben scheint.

Täuschender ist eine solche scheinbare Dichotomie der Hauptachse bei Lygodium circinale, Dicksonia tenera, Microlepia trichosticha, Khasyana, Asplenium tomentosum, Thwaitesii, bei welchen gewöhnlich nur ein Theil der Blätter Knospen hervorbringt, diese letzteren aber normal frühzeitig eine bedeutende Ausbildung erreichen, im Uebrigen

---

getäuscht worden sei, so wäre doch immer bei den Hymenophylleen der Keimungsprozess noch zu verfolgen, worauf aufmerksam zu machen ich um so weniger unterlasse, als alle meine Aussaaten bisher fehlschlugen.

bald in geringerer bald in bedeutenderer Entfernung vorn und unten von den Blättern, denen sie angehören, entspringen.

Unter der Insertion eines jeden Blatt's tritt an dem Stamm eine Seitenknospe hervor bei Marsilea, Pilularia, Salvinia, den oben angeführten Hymenophylleen, ferner bei Polybotrya canaliculata, Chrysodium flagelliferum, diversifolium, bei welchen gewöhnlich nur wenige Blätter ihre Knospen entwickeln oder nur dann, wenn der Gipfel der Hauptachse zu Grunde gegangen ist, die Seitenknospen sämmtlicher Blätter vollzählig hervortreten.

Hinten und unten von der Insertion des Blatt's treten die Knospen auf und zwar unmittelbar hinter der Insertion des Blatt's bei Adiantum curvatum, Platycerium alcicorne;*) dieser bald mehr genähert, bald in bedeutenderer Entfernung von derselben, je nachdem die Internodien der Hauptachse eine geringere oder bedeutendere Dehnung erfahren, bei: Polypodium Paradiseae, Phyllitidis, taeniosum, Preslianum, Gardnerianum; um die halbe Länge des Internodium's nach hinten verschoben, der Art, dass aus der Mitte des Internodium's auf der dem nächst hinteren Blatt gegenüberliegenden Seite des Stammes eine Knospe entspringt bei: Gleichenia microphylla, Oleandra nodosa, Aspidium albopunctatum, Acrostichum (Leptochilus) axillare?, Feei, Lingua, Polybotrya peltata, Polypodium sphaerocephalum, Lingua, pertusum, caespitosum, nitidum, repens, sporadolepis, lepidotum, percussum, incurvatum, Phymatodes, lycopodioides, accedens, aurisetum, Billardierii, leiorhizum, subauriculatum, Nephrolepis trichomanoides; bald wie bei diesen, bald um die ganze Länge des Internodium's nach hinten gerückt, tritt eine Knospe auf gleicher Höhe mit dem nächst hintern Blatt auf der diesem gegenüberliegenden Seite des Stammes hervor, bei Polypodium vulgare, loriceum, fallax, Ecklonii, cayennense, latipes, pustulatum, sporadocarpum, geminatum, während normal auf gleicher Höhe mit dem nächst hinteren Blatt auf der demselben gegenüberliegenden Seite des Stamm's die Knospen entspringen bei: Polypodium aureum, pulvinatum, squamulosum, laetum, appendiculatum, Hasskarlii, fraxinifolium, decurrens, crassifolium.

An den Seitenaxen dieser Farne, soweit meine Beobachtungen an

*) Nur unterhalb der Insertion der aufgerichteten, fruchttragenden, sich abgliedernden Blätter; vergl. Hofm. l. c. 653, der aber abweichend von meinen Beobachtungen den Ursprung der Knospen auf den Grund der Rückseite des Blattes versetzt.

Polypodium loriceum, latipes, fraxinifolium, sporadocarpum, squamulosum, Lingua, rupestre, percussum reichen, wird niemals ein dem ersten Blatt derselben zuzutheilender Spross wahrgenommen, sondern es tritt der erste tertiäre Spross gewöhnlich auf der inneren Seite der secundären Achsen hinter dem zweiten Blatt derselben auf. Das Gleiche gilt von Oleandra articulata, deren Knospen nicht nur wie bei den genannten Arten von Polypodium unmittelbar hinter den Blättern, oder um die halbe oder ganze Länge ihres Internodium's von denselben entfernt entspringen, sondern selbst auf das nächst folgende Internodium, ja auf diesem bis vor das nächst hintere Blatt rücken, so dass es das Ansehen gewinnt, als gehöre die Knospe diesem letzteren Blatt an und erhebe sich vorn von demselben. Die genannte Oleandra*) ist zugleich dadurch ausgezeichnet, dass ihre beiden Knospenzeilen in höherem Grad, als bei einem der genannten Polypodien, der Mittellinie der unteren Stammseite sich nähern.

In grösserer Zahl als die Blätter treten die an dem Stamm sich entwickelnden Seitenknospen nur in seltnen Fällen auf und ist selbst in diesen, so weit meine Beobachtungen reichen, stets nur der kleinere Theil der Blätter mit zwei Seitenknospen versehen, während der grössere Theil derselben nur eine Seitenknospe nach Maassgabe der erörterten Verhältnisse entwickelt.

Polypodium grandidens ist das einzige Beispiel, bei welchem häufiger 2 Knospen einem Blatt angehören. Die eine derselben ist mehr oder

*) Bei Oleandra neriiformis mit aufgerichtetem klimmendem vielfach verzweigtem Stamm besitzen an manchen horizontalen Sprossen mit gleichmässig gedehnten Internodien Blätter und Zweige eine zweizeilige Anordnung und bilden die letzteren zwei unterhalb der ersteren liegende Reihen; häufiger hingegen ist die Streckung der Internodien eine sehr ungleiche und stehen die Blätter in bedeutenderen Entfernungen von einander, oder sind quirlartig genähert, und in 3, 5, 6 oder 8 Zeilen angeordnet und ist der Divergenzwinkel der nächst aufeinanderfolgenden von sehr verschiedener Grösse. An solchen Sprossen sind die Zweige nur selten in zwei, häufiger in 3 Zeilen angeordnet, stehen entweder quirlartig auf gleicher Höhe oder sind auseinander gerückt, oder treten ohne erkennbare Regel auf.

Ob die unregelmässigen complicirteren Blattstellungen dieser Pflanze auf einfachere zurückgeführt werden, und mit ihrer Aufklärung auch eine gesetzmässige Anordnung der anscheinend so unregelmässig vertheilten Knospen nachgewiesen werden kann, müssen zukünftige Forschungen entscheiden.

Unter den oben angeführten Arten fand ich nur bei Polypodium taeniosum und Chrysodium flagelliferum zuweilen die Blätter in 3 oder 4 Zeilen auf dem Rücken des Stamm's angeordnet. Doch waren in diesen Fällen stets nur die Blätter der beiden äussersten seitlichen Zeilen mit Knospen versehen.

minder nach vorn, die andere nach hinten gerückt und nähern sich bald die beiden zwischen zwei vor einander stehenden Blättern entspringenden Knospen, bald bleiben sie in bedeutender Entfernung von einander.

Bei Polypodium loriceum begegnete mir ferner einmal die nämliche Doppelzahl der Knospen.

Bei einer andern Reihe von Farnen treten die Seitenknospen nicht mehr oder nur zum geringeren Theil an dem Stamm, sondern gewöhnlich an dem Blattstiel auf.

Im Allgemeinen wird die Ursprungsstätte der Knospen nur bei Farnen wahrgenommen, deren Blattstiel continuirlich mit dem Stamm zusammenhängt*), allmählig verwittert und gewöhnlich bis zur Ursprungsstelle der Knospe, selten noch oberhalb derselben Adventivwurzeln hervorbringt, während Farne, deren Blätter abgegliedert werden, weder aus dem persistirenden Blattkissen, noch mit dem Blattstiel oberhalb des Gelenks, sondern stets nur aus dem Stamm Knospen und Wurzeln hervorzubringen vermögen.

Die Knospen der hier zu erörternden Farne treten stets nur an den Seiten des Blattstielgrund's und zwar entweder auf der vorderen oder der hinteren, oder im Fall, dass die Knospen an Zahl die Blätter um das Doppelte übertreffen, auf beiden Seiten auf; bei Farnen, deren Blattstiel mit zwei seitlichen Längsstreifen luftführenden Zellgeweb's versehen sind, liegt ihre Ursprungsstätte entweder in der Nähe dieser Streifen auf der oberen Seite des Blattstiels z. B. bei Dicksonia dissecta, rubiginosa, Zippelii oder es setzen sich diese Streifen unmittelbar von dem Blattstiel auf die an seiner Seite hervorbrechende Knospe fort, wie z. B. bei Pteris aquilina.

An der vorderen Seite des Blattstiels in geringer Entfernung von seiner Insertion treten die Knospen hervor bei den bereits oben namhaft gemachten Hymenophylleen, die uns die Uebergänge zu den axillären Knospen kennen lehrten; auf der hinteren Seite des Blattstiels entspringen die Knospen und zwar noch beinah aus dem Stamm bei Dicksonia Zippelii, etwas deutlicher auf dem Grunde des Blattstiels bei Adiantum hispidulum, Pteris scaberula, scalaris, aquilina, Dicksonia nitidula, dissecta, rubiginosa, ferner bei Pteris Vespertilio, aurita, Dicksonia punctilobula, Hypolepis repens, dicksonioides, amaurochachis, bei welchen

*) Dass dieses nicht von allen Farnen mit continuirlichem Blattstiel und zweizeiliger Blattstellung gilt, lehren die bereits oben mitgetheilten Beispiele.

gewöhnlich auf die erste dem hinteren Rand des Blattstiels entspriessende Knospe, weiter nach oben auf der entgegengesetzten vorderen Seite desselben, eine zweite, einem meist schwächeren Spross den Ursprung gebende, Knospe folgt.

Beginnt bei diesen Farnen die Entfaltung der Knospe erst nach der des Blatt's, so gewinnt es das Ansehen, als sei eine Adventivknospe an dem Blattstiel gebildet worden; beginnen dagegen Knospe und Blatt gleichzeitig ihre Entfaltung oder herrscht das Wachsthum der ersteren vor und erhält der Seitenspross die Stärke der Hauptachse, so scheint diese eine dichotome Theilung erfahren zu haben und das dem Seitenspross den Ursprung gebende Blatt auf der innern Seite von diesem befestigt zu sein, ein Verhältniss, welches Karsten*) bereits naturgemäss gedeutet hat.

In diesem Fall verlässt alsdann der Spross seine Richtung nach hinten gegen den Anfang der Hauptachse, die er da, wo seine Entfaltung in einer späteren Periode am Blattstiel beginnt, einschlägt, wendet sich nach vorn und bildet mit der Hauptachse einen zwischen 30 und 90° schwankenden Winkel und erfährt gewöhnlich gleichzeitig das diesem Spross den Ursprung gebende Blatt eine entsprechende Drehung.

Wiederholt sich endlich die frühzeitige Entfaltung der Seitenknospen aufeinander folgender Blätter und bleiben die Seitensprosse, nachdem sie zunächst in ihrer Ausbildung mit der Hauptachse gleichen Schritt hielten, in dem weiteren Wachsthum hinter dieser zurück, so erscheint die Hauptachse blattlos und mit alternirenden Zweigen versehen zu sein, von welchen ein jeder auf seiner inneren Seite ein Blatt trägt und solche Fälle sind es alsdann, die Hofmeister veranlassten anzunehmen, dass ältere Stämme von Pteris aquilina blattlos blieben und durch Dichotomie sich theilten,**) eine Annahme, die aber gerade bei Pteris aquilina und den andern genannten Arten, ebenso bei den Arten Dicksonia, Hypolepis widerlegt wird, sobald man bei Vergleichung zahlreicher Exemplare erkennt, dass in allen Fällen Blatt- und Zweigstellung auf das vollständigste übereinstimmen und nur in der zeitlichen Entwickelung und der

*) l. c 124.

**) Dass alsdann die weitere Folgerung Hofmeister's l. c. 630, dass die Anordnung der Gefässbündel in keiner Weise von den Blättern abhängen könne, da blattlose und beblätterte Stämme von Pteris die gleiche Anordnung ihrer Gefässbündel zeigten, in sich selbst zusammenfällt, da eben alle Sprosse von Pteris beblättert sind, wird keiner weiteren Ausführung bedürfen.

grösseren oder geringeren Entfernung der Knospen von dem Blattstielgrunde gradweise Verschiedenheiten existiren.

Bei Hypolepis amaurorhachis ist es endlich keine seltne Erscheinung, dass auf jeder Seite des Blattstiels 2 Knospen und zwar bald in geringer, bald in bedeutenderer Entfernung von einander entspringen.

Treten die beiden Knospen einer Seite dicht bei einander auf, so lässt sich wenigstens in manchen Fällen nachweisen, dass das erste Blatt der oberen gleichzeitig mit seiner Entfaltung einen Spross hervorgebracht hat, so dass der untere alsdann als ein tertiärer anzusehen ist; in anderen, wo ihre Entfernung eine bedeutendere war, wird diese allein wenigstens nicht hinreichen, eine gleiche Annahme zu widerlegen, und immerhin auch in diesem Fall wahrscheinlicher sein, dass es sich hier nur um eine Wiederholung derjenigen Erscheinung an den Seitenachsen, die wir an der Hauptachse deutlicher erkannt haben, als um die Entwickelung von Adventivknospen handle.

Während in allen diesen Fällen in der Regel die Knospe an der hinteren Seite des Blattstiels sich zuerst entfaltet und zu einem kräftigeren Spross auswächst, als die auf der vorderen Seite des Blattstiels oberhalb dieser angelegte Knospe, sehen wir endlich bei den nämlichen Farnen zuweilen das entgegengesetzte Verhältniss in der Stellung und Entwickelung dieser beiden Knospen auftreten, indem die Knospe auf der vorderen Seite des Blattstiel's tiefer am Grunde desselben entspringt als die seiner hinteren Seite und frühzeitig zu einem Spross aufwächst, der der Hauptachse an Stärke gleichkommt und auch bei dem weiteren Wachsthum diese Stärke behauptet. Ganz in's Besondere scheint dieser Knospe eine frühzeitigere und kräftigere Entwickelung bestimmt zu sein, wenn ihre Ursprungsstätte bis an den Grund des Blattstiels herabsinkt oder selbst auf dem Stamm vorn und unten von der Blattinsertion liegt. Dicksonia punctilobula bietet das geeignetste Beispiel zur Erläuterung dieses Falls; zugleich sehen wir bei ihr diese Knospe auf dem Stamm bald in geringerer, bald in bedeutenderer Entfernung von der Blattbasis entspringen, in der nämlichen Weise, wie es bei Dicksonia tenera und Microlepia trichosticha der Fall ist.

Schliesslich noch einige Bemerkungen über die Anordnung der Blätter an den Seitensprossen.

Bei allen Farnen mit zweizeiliger Blattstellung ist es Regel, dass die beblätterte Seite sämmtlicher Zweige im ausgebildeten Zustand mit

der der Hauptachse in einer Ebene liegt, dass die aus der Achse entspringenden Sprosse einer jeden Seite unter einander die gleiche, die der gegenüberliegenden aber eine symmetrische Blattstellung besitzen und entweder mit einem inneren der Abstammungsachse zugekehrten oder einem äusseren ihr abgewendeten Blatt beginnen.

Der Abstammungsachse zugekehrt ist das erste Blatt der axillären Sprosse von Trichomanes radicans, ferner an den unter den Insertionspunkten der Blätter entspringenden Seitensprossen von Pilularia und Marsilea, so wie den nach vorn und unten von den Blättern entspringenden Zweigen von Dicksonia tenera,*) Microlepia trichosticha, Khasyana, Lygodium scandens.

Der Hauptachse abgewendet ist das erste Blatt der vorn und unten von der Insertion der Blätter an der Hauptachse entspringenden Seitensprosse von Davallia bullata, stenocarpa, divaricata, Humata chaerophylla, Asplenium Thwaitesii, Polybotrya Meyeriana, und gehört bei allen diesen Arten auch dem ersten Blatt der Seitenaxen eine Knospe an. Die gleiche Stellung findet sich ferner bei den zahlreichen Farnen,**) deren Knospen nach hinten und unten von den Blättern verschoben sind, z. B. Polypodium loriceum, latipes, fraxinifolium, squamulosum, Lingua, Nephrolepis trichomanoides, Oleandra articulata, wobei jedoch nicht ausser Acht zu lassen ist, dass das erste Blatt der Seitensprosse häufig der Mitte ihres Rückens sich nähert und ferner, dass diesem ersten Blatt niemals eine Knospe angehört. Von den beiden Sprossen, welche bei Polypodium grandidens zwischen zwei hinter einander stehenden Blättern hervortreten, war nur einmal die hintere bis zur Ausbildung von Blättern vorgeschritten und zwar war das erste Blatt desselben auf seiner äusseren Seite befindlich.

Von den beiden Sprossen, welche an den Seiten des Blattstiel's, z. B. Pteris, Dicksonia, Hypolepis entspringen, trägt der vordere stets sein erstes Blatt auf der der Hauptachse zugekehrten, der hintere auf der ihr abgewendeten Seite und sind also beide Sprosse eines Blattes unter einander antidrom. Das gleiche gilt von diesen beiden Sprossen, wenn der vordere, wie bei Dicksonia punctilobula, auf die Achse herabrückt.

---

*) Bei diesem Farn wurde einmal das erste Blatt auf der der Hauptachse abgekehrten Seite des Sprosses wahrgenommen.

**) Die einzige Abweichung von diesen fand ich bei Polypodium Billardierii, bei welchem an 2 Zweigen das erste Blatt auf der inneren Seite stand.

Da nach diesen Thatsachen die der vorderen Seite des Blattstiel's entspriessende Knospe, oder die ihr entsprechende vorn und unten von der Blattbasis hervortretende Knospe entweder, wie bei der eben genannten Dicksonia mit einem innern Blatt, oder wie bei Humata, Davallia, Polybotrya Meyeriana mit einem äussern Blatt beginnt und diese letzteren in dieser Stellung ihres ersten Blattes mit den nach hinten und unten von den Blattbasen verschobenen Knospen, wie wir sie in den verschiedenen Entfernungen von denselben bei zahlreichen Arten von Polypodium wahrgenommen haben, übereinstimmen, so drängen sich vielleicht Manchem Zweifel auf über die Richtigkeit der Annahme, dass in den einen Fällen die Knospen nach hinten von den ihnen den Ursprung gebenden Blättern, in den anderen nach vorn von denselben gerückt seien. und dürfte vielleicht die Annahme naturgemäss erscheinen, dass alle mit einem innern Blatt beginnenden Knospen nach vorn von ihrem Tragblatt, alle mit einem äussern Blatt beginnenden hingegen nach hinten von denselben, und demgemäss die Knospen von z. B. Polybotrya Meyeriana, Davallia, Humata um die Länge von 1 ½ oder 2 Internodien nach hinten von ihrem Tragblatt verschoben seien. Oder man könnte annehmen, dass überhaupt alle Knospen nur in der Richtung nach vorn und unten von den Blättern sich entfernten und demgemäss bei Polypodium squamulosum, fraxinifolium, Lingua die Seitensprosse nicht um die Länge von ½ oder 1 Internodium nach hinten, sondern vielmehr um 1 oder 1 ½ Internodium nach vorn geschoben seien und die Stellung des ersten Blattes ein doppeltes Verhalten dieser in der gleichen Richtung verschobenen Knospen beurkunde. Solchen Betrachtungen gegenüber aber dürfte nicht nur an die allmähligen Uebergänge der axillären Knospen zu solchen Seitenknospen, die vorn oder hinten von der Blattachsel hervortreten, die wir oben aufgezählt haben, zu erinnern, sondern auch fest zu halten sein, dass die mit einem äusseren Blatt anhebenden Sprosse darin eine Verschiedenheit beurkunden, dass bei den einen und zwar denjenigen, welche unserer Annahme gemäss nach vorn von ihrem Tragblatt stehen, das erste Blatt eine Knospe producirt, bei den andern, die nach unserer Annahme nach hinten von ihrem Blatt stehen, das erste Blatt der Seitensprosse dem Rücken desselben sich mehr nähert und stets knospenlos ist, und dass ferner der erste tertiäre Spross bei diesen wie z. B. bei Polypodium Lingua, squamulosum stets nach der innern Seite des secundären hinter dem zweiten Blatt desselben auftritt.

Ob es möglich ist, diese Verschiedenheiten der Blattstellung auf den verschiedenen Grad oder die Richtung der Drehung, welche die Seitenachsen erfahren dürften, bis sie ihre beblätterte Fläche in eine Ebene mit der der Hauptachse bringen, zurückzuführen, mögen in die Entwickelungsgeschichte dieser Gewächse eingehende Untersuchungen in Zukunft entscheiden, da die Betrachtung ausgebildeter Exemplare nur da, wo die Seitensprosse auffallender auf der unteren Stammseite entspringen, wie z. B. bei Oleandra articulata Anhaltspunkte für eine solche Annahme findet.

Gehen wir zu den Farnen mit mehrzeiligen Blättern über, so bin ich zwar nicht im Stande, unter ihnen Beispiele von Knospen, welche die den höheren Pflanzen gewöhnliche axilläre Stellung behaupteten,*) namhaft zu machen, kann jedoch als Ausgangspunkt der Betrachtung zunächst solche Fälle anführen, bei welchen dieselbe nur eine unerhebliche Veränderung erfahren hat und die Knospen, anstatt aus der Blattachsel auf die Mitte der Oberseite des Blattstiel's in geringer Entfernung von dessen Insertion sich erheben und demnach der Grund des Blattstiel's und der Grund der achselständigen Knospen eine geringe Strecke mit einander vereinigt sind. Diese Stellung der Knospen ist die normale bei Trichomanes cristatum, crispum, Bankroftii, obscurum, Gueintzianum, rigidum, javanicum, und zwar entspricht bei den genannten Arten einem jeden Blatt eine Knospe in der angeführten Stellung. Ob bei den andern Arten von Trichomanes mit mehrzeiligen Blättern die Knospen in der gleichen Stellung auftreten, oder ob unter ihnen Beispiele von axillären Knospen, die keine Verwachsung mit dem Blattstiel eingehen, sich finden, muss die Untersuchung vollständigerer Exemplare, als sie mir dermalen zu Gebote stehen, entscheiden.

Auf der entgegengesetzten Seite des Blattstiel's, nämlich auf dem Rücken seines Grundes oder unmittelbar unter der Blattbasis aus dem Stamm entspringen die Knospen bei Alsophila pruinata und zwar entspricht bei diesem Baumfarn, wie zuerst von Karsten beobachtet wurde,

*) In Betreff der Sporangien der Lycopodiaceae erkenne ich die oben angeführte Deutung Brongniart's vollkommen an und sind demnach die fruchttragenden Blätter von Lycopodium und Selaginella in der nämlichen Weise, wie die der Ophioglosseae getheilt, die von Psilotum und Tmesipteris hingegen, wie diejenigen, welche ich bei einer Missbildung von Ophioglossum pedunculosum beschrieben habe. — Auch bei Lycopodium Selago sah ich nicht selten den sterilen Theil fruchttragender Blätter in 2 Abschnitte gespalten.

einem jeden Blatt eine Knospe, welche zunächst in der Form eines stumpfen Höckers auf dem Grund des Blattrückens sich erhebt, dann in die Länge sich streckend nach abwärts wächst und auf der oberen Seite ihr erstes Blatt entwickelt oder in seltneren Fällen eine bedeutende Strecke nach oben auf der unteren Seite des Blattstiel's hinaufrückt.

Auf dem Rücken des Blattgrundes oder häufiger unmittelbar unter der Blattbasis aus dem Stamm entwickeln sich ferner die Knospen von Cibotium Schiedei, einem Baumfarn, der auch in der Structur und Behaarung seines Stammes, sowie in der Theilung und Bereifung seiner Blattfläche mit Alsophila pruinata übereinstimmt. — Den gleichen Ursprung der Knospen beobachtete ferner Stenzel*) an einem Stamm von Alsophila aculeata, der seinen Gipfel eingebüsst hatte.

Unter Farnen, deren Stämme nur geringe Dimensionen erreichen, sind ferner hier namhaft zu machen Blechnum occidentale, australe, hastatum, alpinum. Bei diesen entspringen in der Regel die Knospen unmittelbar unter der Mittellinie der Basis der rosettenartig zusammengedrängten Blätter und wachsen zu ausläuferartigen Sprossen aus, die zunächst entfernt stehende rudimentäre Blätter, dann an ihrem sich aufrichtenden Ende wieder eine Rosette von Laubblättern entwickeln. Unter den genannten Arten ist Blechnum hastatum durch die Regelmässigkeit, mit welcher ein jedes Blatt eine Knospe entwickelt, ausgezeichnet, während bei den beiden andern die Knospen nur spärlicher auftreten.

Diese letzteren Beispiele zeigen uns aber zugleich den Uebergang zu der Mehrzahl der Farne mit mehrzeiligen Blättern, indem ihre Knospen, wie bei diesen, nicht mehr aus oder unter der Mitte der Blattbasen, sondern seitlich neben, oberhalb oder unterhalb von denselben entweder aus dem Stamm oder dem Rücken der Blattbasen seitlich von der Mittellinie derselben entspringen.

So z. B. wird bei Blechnum occidentale nicht selten wahrgenommen, dass ein Theil der Ausläufer neben den Blattbasen entspringt; das gleiche ist bei Nephrolepis exaltata der Fall, dessen aufrechte Stämme zwar in der Regel ihre Ausläufer unmittelbar unter den nach $^3/_8$ Divergenz angeordneten Blättern, nicht selten aber auch noch andere neben den Blattbasen entwickeln; und vielleicht bei Onoclea Struthio-

*) l. c. 84.

pteris, dessen Ausläufer nach Duval-Jouve*) und meinen eignen Untersuchungen aus dem Stamm seitlich von den Blattbasen, nach Hofmeister**) hingegen am Grund der Blattstiele entspringen.

Unter Farnen, deren Seitenachsen verkürzte Internodien besitzen, sind hier namhaft zu machen Asplenium lucidum, welches einen Theil seiner Knospen unmittelbar unter den Blattbasen, einen andern neben denselben ausbildet, ferner dürften nach den Untersuchungen Hofmeister's***) und Stenzel's†) Asplenium filix femina, alpestre, Aspidium spinulosum, cristatum, Blechnum boreale hieher gehören.

Unter den Farnen, deren Knospen stets seitlich von den Blattbasen aus dem Stamm entspringen, ist ein Beispiel, wo dieselben in der den Equisetaceis eigenthümlichen Regelmässigkeit angelegt werden, mir nicht bekannt geworden, ich traf vielmehr stets nur neben einem kleinen Theil der Blätter Knospen an, so z. B. bei Acrostichum Preslianum, Pteris hastata, Blechnum volubile, attenuatum, Asplenium Serra, bulbiferum, esculentum, Woodwardia caudata, Phegopteris divergens, vulgaris, Dryopteris, Aspidium decompositum, Cystopteris fragilis, Osmunda regalis. Ebenso ist da, wo die Knospen auf dem Rücken des Blattstiel's neben dessen Mittellinie entspringen, gewöhnlich nur der kleinere Theil der Blätter mit einer solchen versehen; so bei Aspidium filix mas††), dessen Blattstiele ohne Regel entweder auf der rechten oder der linken Hälfte ihres Rückens unterhalb der beiden seitlichen Längsstreifen luftführenden Zellgewebes eine Knospe entwickeln.

Beginnen diese Knospen erst an dem älteren Theil des Stammes ihre Entwickelung, so gewinnen sie das Ansehen von Adventivknospen, wachsen sie dagegen frühzeitig zu einem der Hauptachse an Stärke gleichkommenden Spross aus, wie es in der Regel bei Phegopteris vulgaris, Dryopteris, zuweilen bei Woodwardia caudata, Asplenium esculentum, Osmunda regalis, ebenso unter den bereits oben angeführten Arten bei Asplenium filix femina, alpestre†††) der Fall ist, so scheint die Hauptachse eine dichotome Theilung erfahren zu haben und kaum dürfte es einem Zweifel unterliegen, dass die Dichotomie der Stämme von Aspidium macrophyllum, Hemitelia spectabilis, integrifolia, Balan-

*) Etudes s. l. petiole des Fougères; suite 19.
) l. c. 651. *) l. c. 656. †) l. c. 84. Flora 1859. 173.
††) Vergl. Hofmeister l. c. 648 und Duval Jouve etud. s. le petiole de fougeres. 4.
†††) Vergl. Göppert. Sitz. d. schles. Gesellsch. 1858. 12. Nov.

tium antarcticum, Asplenium polypodioides, Phegopteris rudis u. a., die wir an cultivirten Exemplaren zu beobachten Gelegenheit haben, durch frühzeitige und kräftige Entwickelung eines Seitensprosses zu Stande kommen, der an andern Exemplaren z. B. von den beiden letztgenannten Arten erst in einer späteren Periode seine Entwickelung beginnt. Doch konnte ich auch an diesen letzteren wegen der dichten Stellung der Blätter und den zahlreichen Wurzeln, welche sämmtliche Blattbasen umhüllen, die Ursprungsstätte dieser Seitensprosse nicht erkennen und wäre zur Ermittelung derselben die Durchschneidung der Stämme erforderlich gewesen, die aber aus andern Rücksichten unterbleiben musste.

Neben der Basis der Blätter*) nehmen endlich die bulbillenartigen Zweige von Lycopodium Selago, lucidulum, reflexum ihren Ursprung. Bei L. Selago entwickelt die Bulbille zunächst 4 oder 5 decussirte Blattpaare, von welchen das erste nach rechts und links von einer die Basis der Bulbille berührenden Tangente fallen und zugleich durch ihre lanzettlich-pfriemenförmige Gestalt von den beiden Blättern des zweiten Paar's abweichen. Von diesen fällt das eine nach vorn und übertrifft an Grösse sämmtliche Blätter der 4 ersten Paare und scheint desshalb für das Tragblatt**) der Bulbille gehalten worden zu sein, das hintere ist dagegen um ein Bedeutendes kleiner; das 3. Paar besteht aus 2 seitlichen schmalen, gleichstark entwickelten Blättern, das 4. endlich aus einem vorderen kleineren und einem hinteren grösseren Blatt.

*) Dass diese Stellung der Knospen neben den Blattbasen auch bei den beblätterten Zellkryptogamen wiederkehre, lehren die Untersuchungen von Nees über gewisse Abtheilungen der Lebermoose (vergl. d. europäischen Lebermoose I 17), ferner die von Schimper über die Sphagnaceae (vergl. Monog. d. Torfmoose 17); ferner treffen wir diese Stellung an bei Fontinalis antipyretica, Neckera complanata, Hypnum triquetrum, splendens, cordifolium, Hedwigia ciliata, Racomitrium canescens, lanuginosum u. a., während andere wie z. B. Mnium undulatum axilläre Sprosse entwickeln.

**) Bischoff (krypt. Hft. II 102), Brongniart (hist. d. veg. foss. II 4 T. 7. 1), Döll, Flora Baden's (Heft I), Cramer (Pflanzenphys. Unters. v. Nägeli und Cramer, Heft 3. 18) sehen diese Bulbillen als achselständig an; der letztere nimmt an, dass das Tragblatt der Bulbille mit der Achse derselben verschmolzen sei und erst oberhalb des ersten seitlichen Blattpaares von dieser frei werde; bei der Verfolgung der Blattstellung vermisst er alsdann das vordere Blatt des zweiten Paares und trägt kein Bedenken, anzunehmen, dass dieses in Folge der Verwachsung des Tragblatts mit der Achse des Sprosses unterdrückt worden sei. Nach den Untersuchungen, welche ich an getrockneten Exemplaren angestellt habe, vermag ich nicht zu erkennen, dass das vermeintliche Tragblatt Cramer's in die Blattspirale der Hauptachse falle, und möchte daher beide Annahmen dieses Forschers als unbegründet ansehen.

NEUE BEITRÄGE

ZUR

KENNTNISS DER EMBRYOBILDUNG

DER

PHANEROGAMEN

VON

WILHELM HOFMEISTER.

II.

MONOKOTYLEDONEN.

Im Entwickelungsgange der Organe geschlechtlicher Fortpflanzung der Monokotyledonen herrscht eine grosse Uebereinstimmung im Allgemeinen. Abweichungen der Formen der wesentlichsten Theile des Generationsapparats, des Pollens und der Eychen, von denjenigen, welche der grossen Mehrzahl der Phanerogamen zukommend, als deren normale Typen bezeichnet werden können, sind um Vieles seltener, als unter den Dikotyledonen. Sie sind ungleich weniger oft, als dort, bestimmten Verwandtschaftsgruppen zugewiesen. Innerhalb der Formenkreise, welche man als Familien oder Ordnungen auffasst, ist meist die grosse Mehrzahl, in den an Abnormitäten reichen Gruppen mindestens eine Zahl von Ausnahmen in der erwähnten Beziehung dem bei Weitem grösseren Theile der Phanerogamen übereinstimmend beschaffen. Die Abweichungen von dem gewöhnlichen Baue, die unter den Monokotyledonen sich finden, lassen sich endlich ungleich leichter als blosse Hemmungs- oder Wucherungsbildungen erkennen, als die bei Dikotyledonen vorkommenden. Aus diesen Gründen ist eine zusammenhängende Darstellung der die Befruchtung begleitenden Erscheinungen, wie sie aus den vorliegenden Beobachtungen sich erschliessen lassen, leicht ausführbar im Vergleich mit der Darlegung derselben Verhältnisse bei Dikotyledonen, wo die grosse Mannichfaltigkeit der bekannten Thatsachen zu einer mehr ins Einzelne gehenden Behandlung des Stoffes, die zu vermuthenden nicht minder grossen Abweichungen des Entwickelungsganges bisher noch nicht untersuchter Formen zu ängstlicher Vorsicht in allgemeinen Schlüssen nöthigen.

Entwickelung des Pollens.

Die weit überwiegende Mehrzahl in Bezug auf den Bildungsgang der Pollenzellen untersuchter Monokotyledonen zeigt bis in die untergeordneten Einzelnheiten den für die Phanerogamen überhaupt typischen

Verlauf dieser Entwickelung. Es differenziren sich im Innern der Anthere vier dem Connectiv parallele Längsreihen von Zellen vom übrigen Gewebe dadurch, dass sie in der Vermehrung durch Theilung hinter den benachbarten zurück bleiben. Diese verhältnissmässig grossen, mit dickflüssigem Protoplasma sich anfüllenden Zellen sind die Urmutterzellen des Pollens*) (XX, 11 bei Crocus vernus). Die Zellen dieses Stranges mehren sich durch wiederholte Theilungen**) in allen Richtungen des Raumes. Haben sie die, dem pollenbildenden Gewebe zukommende Anzahl von Zellen erreicht, so hebt eine Verdickung der Zellenwände an, begleitet vom Beginn der Auflösung der äussersten Schicht der Haut jeder Zelle: die Zellen, Mutterzellen des Pollens, treten aus dem parenchymatischen Zusammenhange. Gleichzeitig erweitert sich jedes Antherenfach durch Dehnung der seine Wandungen bildenden Zellenmassen. In dem weiter gewordenen Raume schwellen die Pollenmutterzellen an, der Kugelform mehr oder weniger sich nähernd, nur selten sie erreichend (z. B. Tradescantia). Ihr primärer Kern ist noch vorhan-

---

*) Unter den Pflanzen, an welchen diese für die Entwickelungsgeschichte des Pollens hochwichtige Thatsache durch Nägeli entdeckt wurde, ist eine der charakteristischen Formen von Monokotyledonen: Lilium tigrinum (Nägeli, zur Entwickelungsgeschichte des Pollens, Zürich 1842, S. 9; Taf. I f. 2—4).

**) Der Zelltheilung geht, wie allerwärts in kernhaltigen Zellen, eine Verdoppelung des Zellkerns voraus. Dass vor dem Auftreten der zwei secundären Zellkerne auch bei der Vermehrung der Urmutterzellen der primäre aufgelöst wird, davon habe ich bei Lilium bulbiferum, Neottia ovata und bei Orchis Morio aufs Bestimmteste mich überzeugt. Man findet in Knospen einer und derselben Inflorescenz, in Knospen deren Stellung anzeigt, dass ihre Entwickelung die Mitte hält zwischen solchen, in denen der pollenbildende Zellstrang auf den Querschnitt nur sehr wenige, und solchen in denen er zahlreiche Zellen zeigt, sehr häufig Antheren, in deren pollenbildendem Zellstrange gar kein Kern zu finden ist, wohl aber im Centrum der Zelle eine klare Flüssigkeit, die auf Einwirkung von Wasser in ähnlicher Weise zu mehreren formlosen Klumpen gerinnt, wie ich dies für die zur Theilung sich anschickenden Pollenmutterzellen von Tradescantia virginica geschildert habe (Botan. Zeitung 1848, s. 427). Die Zustände, aus welchen Wimmel eine Theilung der Kerne bei der Vermehrung der Urmutterzellen wie der Mutterzellen des Pollens erschliesst, erklären sich seinen Abbildungen nach leicht als Coagulationen der Substanz der neugebildeten Zellkerne nach Wassereinwirkung. Zwei dicht an einander liegende neu entstandene secundäre Kerne werden bei Gerinnung der eyweissartigen Stoffe ihrer Substanz in der Regel zu feiner Masse zusammen zu fliessen scheinen. (Vergleiche u. A. meine Abbildungen in Vermehrung der Kerne begriffener Zellen von Staubfadenhaaren von Tradescantia virginica in meiner Entstehung des Embryo, Leipzig 1849 Taf. XIV f. 21. 28.)

den; jetzt unter allen Umständen central. Mit anderen Worten: die frei gewordene Pollenmutterzelle enthält keine Vacuole mehr in dem sie erfüllenden Protoplasma, während in den Urmutterzellen des Pollens in einigen Fällen (Arum maculatum, Iris florentina) noch während der ersten Zelltheilungen das Protoplasma, den Zellkern einhüllend, die Innenwand der Zelle als dicke Schleimschichte überzieht; der Mittelraum der Zelle aber mit von dieser Schicht scharf abgegränzter wässeriger Flüssigkeit erfüllt ist. Die Wand der frei gewordenen Mutterzelle nimmt bei den meisten Arten rasch und beträchtlich an Dicke zu; — am stärksten bei solchen Mutterzellen, deren Form sehr weit von der Kugel abweicht, z. B. an denen der meisten Arten von Iris (XX, 13). Die Wandverdickung ist dann ungleichmässig; überall dahin gerichtet den Zellraum zur Kugelgestalt abzurunden. Sobald als die Zellwand eine gewisse Dicke erreicht hat, zeigt sie Schichtung; bald mehr bald minder deutlich. Oft ist die Zahl erkennbarer Schichten sehr beträchtlich. Die Schichten sind da, wo sie weit ausspringende Ecken der Zelle ausfüllen, nur kappenförmig, sie bekleiden nicht die ganze Innenfläche der Zelle als zusammenhängende Membranen, sondern sie keilen sich da aus wo sie an dünnere Stellen der Zellhaut reichen.

Die inneren Lamellen der verdickten Haut der Pollenmutterzellen quellen bei reichlicher Wasserzufuhr stark auf; in weit höherem Maasse als die äusserste Schicht. Oft ist der Unterschied so beträchtlich, dass die Zellhaut berstet. Zwei Erscheinungen geben den Beweis, dass diese Sprengung der Zellhaut auf dem Anschwellen ihrer eigenen Substanz, nicht auf dem der Inhaltsflüssigkeit beruht. Wenn Mutterzellen vor der Theilung platzen, so wird, unmittelbar nach Entstehung des Risses in der Haut, ein Theil des Inhalts durch denselben ausgetrieben. Dann schliesst sich der Riss fest in Folge der Elasticität der Zellmembran. Aber nur auf kurze Zeit: indem ein weiteres Aufquellen der inneren Hautlamellen stattfindet, wird der Riss wieder geöffnet, und wiederum ein Theil des Inhalts hervorgetrieben.*) Der Vorgang kann sich noch zu mehreren Malen wiederholen. Ein noch schlagenderer Beweis ist das Hervortreten bereits von der Exine bekleideter Pollenzellen oder Tetraden aus den aufplatzenden Höhlen in Wasser gelegter älterer Mutterzellen. Hier findet man, in sehr vielen Fällen (Iris parisiensis, Neottia ovata z. B.), dass die

*) Bot. Zeit. 1848, 653.

entleerte Mutterzelle, oder das entleerte Fach derselben merklich grösser ist, als die ausgeschlüpfte Pollenzelle (V, 8. 9). Das Quellen der Mutterzellmembran erfolgte hier unzweifelhaft nach allen drei Richtungen des Raumes hin, überwiegend jedoch in radialer Richtung. Dieses Vorwiegen allein führte zur Sprengung der Zellhaut. Die Pollenzelle, oder die Pollentetrade hatte keinen Antheil daran; wie nicht allein aus ihrem hinter dem der Höhlung der entleerten Haut zurück bleibenden Volumen, sondern auch daraus hervor geht, dass schon vor dem Bersten der Mutterzelle die quellende Membran sich sichtlich erweitert. Zwischen ihrer Innenfläche und der Aussenfläche der Pollenzellen bildet sich ein ziemlich breiter, wassererfüllter Raum.

Bald nach dem Freiwerden der Pollenmutterzelle wird ihre bevorstehende Theilung durch Auflösung des Zellkerns eingeleitet. Die Grösse desselben nimmt zu, die Schärfe seiner Umrisse nimmt ab; seine Kernkörperchen verschwinden. Endlich ist der kugelige Mittelraum der Zelle nur von klarer, das Licht aber stark brechender Flüssigkeit erfüllt, die von der einer Vacuole schon dadurch sich unterscheidet, dass keine scharfe Abgränzung derselben von dem körnigen Protoplasma stattfindet, welches die peripherische Region des Zellraums einnimmt. Bei kurzer Einwirkung reinen Wassers gerinnt die klare Flüssigkeit der Zellenmitte zu mehreren Klumpen unbestimmter Gestalt. Diese Erscheinung, — leicht und sehr deutlich wahrzunehmen bei Tradescantia virginica, *) — ward allerwärts wiedergefunden wo eine genügende Zahl der von der Zelle sehr rasch durchlaufenen Entwickelungsstufen untersucht wurde, so bei Iris pumila, Lilium bulbiferum, Hemerocallis flava, Neottia ovata (einiger Abietineen und Dikotyledonen zu geschweigen). Sie ist ein unwiderleglicher Beweis der vollständigen Auflösung des primären Zellenkerns vor der Bildung der secundären. Der unbestreitbare Nachweis dieser Thatsache ist von Wichtigkeit für die Feststellung des Begriffes des Elementarorganes der Pflanze. Wenn bei jeder Vermehrung durch Theilung kernhaltiger Zellen die Theilung des Kerns der Theilung der Zelle vorauf ginge, so würde eben dieser selbstständig erscheinenden Vermehrung der Zellkerne eine ungleich grössere Bedeutung zugeschrieben werden müssen, als der Auflösung des primären Kernes und der Neubildung der secundären.

*) abgebildet von mir Botan. Zeit. 1848. Taf. IV f. 10—12.

Die neu entstandenen zwei Zellkerne erscheinen bei ihrem ersten Auftreten sofort in ihrer späteren Grösse, als ellipsoïdische, in seltenen Fällen als beinahe kugelige Tropfen einer kaum merklich durch feine Körnchen getrübten Flüssigkeit, welche das Licht nur wenig stärker bricht, als die sie umgebende Inhaltsflüssigkeit der Zelle. Kernkörperchen treten in dem secundären Zellkerne in der Regel erst späterhin auf. Die Gränzen der neuen Zellkerne sind oft nur schwierig zu erkennen; namentlich bei Anwendung minder vollkommener Instrumente treten sie erst bei beginnender Gerinnung der Substanz nach Wassereinwirkung deutlich hervor.*) Die Lage der neuen Zellkerne ist in Mutterzellen von nicht genau kugeliger Form stets so, dass eine durch sie gelegte Linie die grösste Achse der Zelle darstellt.**) Wo die Zelle die Form eines Ellipsoïd hat, fallen die Mittelpunkte der secundären Kerne mit den Brennpunkten des Ellipsoïds zusammen. Der Bildung secundärer Kerne folgt bald eine weitere Veränderung des Inhalts der in Theilung begriffenen Pollenmutterzelle. Die gröberen Körnchen des die Zelle füllenden Protoplasma ordnen sich zu einer plattenförmigen Anhäufung, welche senkrecht auf der, durch die beiden secundären Kerne gelegten Achse der Zelle steht.***) Bei der Kleinheit der in der Inhaltsflüssigkeit der Pollenmutterzellen von Monokotyledonen schwebenden festeren Theilchen erscheint die Körnerplatte in der Seitenansicht in der Regel nur als dunkle Linie,†) so bei Hemerocallis flava, Iris florentina, — deutlich aus gröberen Körnern zusammengesetzt bei Najas major (I, 4 a)††).

Dem Auftreten der Körnerplatte folgt entweder sofort deren Spal-

---

*) Hofmeister in Bot. Zeit. 1848, 671.

**) Auf die aus diesem Verhältniss folgende Stellung der später auftretenden ersten Scheidewand der Pollenmutterzelle hat zuerst Pringsheim aufmerksam gemacht (Bau u. Bildung der Pflanzenzelle, 52). Es ist ein allgemein zutreffendes, soweit meine Beobachtungen reichen. Wimmel nimmt an, dass die secundären Kerne, die er als Theilungsproducte des primären betrachtet, nach ihrer Entstehung mehr und mehr nach den Polen der Zelle hin rücken. Unter meinen zahlreichen Beobachtungen sind keine, welche auf eine solche Wanderung der secundären Kerne der Pollenmutterzellen zu schliessen gestatten. Mir scheint, dass auch zu diesen Folgerungen Wimmels die Nichtbeachtung des die Gerinnung der Zellflüssigkeit und der Zellkernsubstanz begleitenden Erscheinungen beigetragen hat.

***) Hofmeister, Botan. Zeit. 1848, 671.

†) Zuerst gesehen von Unger, über merismatische Zellbildung, 1844, f. 12.

††) Die römische Ziffer bezeichnet die Tafel, die arabische die Figur.

tung in zwei, und die Bildung einer planen Zellstoffhaut zwischen beiden, welche als Scheidewand den Raum der Zelle querdurchsetzt. Nach Wiederauflösung ihres Kerns, Bildung zweier neuer, Entstehung von Körnerplatten zwischen diesen theilt sich dann jede der secundären Zellen in zwei tertiäre. Oder aber die beiden secundären Zellkerne, sowie die sie trennende Körnerplatte, verschwinden wieder. An Statt jedes der ellipsoïdischen secundären Kerne treten zwei kugelige tertiäre auf; unter ganz den gleichen Erscheinungen wie die secundären. Die tertiären Kerne sind entweder so gestellt, dass sie alle vier in eine, die grösste, Durchschnittsebene der Zelle fallen, oder so, dass die zwei Kerne der einen Zellhälfte in einer Ebene, die beiden der anderen Zellhälfte in einer auf dieser Ebene rechtwinkligen Ebene liegen; — oder endlich so, dass die durch jeden der vier Kerne und den Mittelpunkt der Zelle gelegten Ebenen ein System von vier, im Mittelpunkt der Zelle mit ihren Spitzen zusammentreffenden, Tetraëdern darstellen: die Kerne stehen den Ecken eines Tetraëders entsprechend, dessen Mittelpunkt mit dem der Zelle zusammenfällt. Ihr erstes Sichtbarwerden erfolgt an den Stellen, welche sie später annehmen; eine Ortsveränderung vor der Theilung der Pollenmutterzelle ist auch an den tertiären Kernen nicht beobachtet.

Bei einzelnen Arten steigt die Zahl der in der Pollenmutterzelle vor ihrer Theilung auftretenden Zellkerne auf mehr als vier, indem auch die tertiären Zellkerne, einzelne oder sämmtliche, wieder aufgelöst werden, und an ihrer Stelle neue sich bilden; so bei den Arten von Iris mit gebarteten Perigonialblättern; bei mehreren Orchideen.*) — Nach der Ausbildung der vier (oder mehr) Zellkerne ordnen sich die Körner des Protoplasma der Mutterzelle aufs Neue zu plattenförmigen Anhäufungen; zwischen je zwei Zellkernen zu einer, die senkrecht steht auf der kürzesten, je zwei Zellkerne verbindenden Linie. An der Stelle der Körnerplatten findet man auf wenig weiter vorgerückten Entwickelungsstufen die Mutterzelle in Fächer theilende Scheidewände.

---

*) Lycaste aromatica und Deppei, Ornithidium coccineum, Leptotes bicolor, Epidendrum virgatum in der Candicula. (Reichenbach fil. de pollinis Orchidearum genesi, Lpzg. 1852, S. 36.) — In einigen dieser Fälle ist es noch zweifelhaft, ob nicht nachträgliche Theilungen einiger der vier Tochterzellen einer Pollenmutterzelle vorkommen. — Unter den Dikotyledonen ist Passiflora coerulea ein sicheres Beispiel des Auftretens von mehr als vier Zellkernen in der Pollenmutterzelle vor ihrer Theilung (Hofmeister, Botan. Zeitg. 1848, 655); unter den Gymnospermen Pinus Larix.

Die Theilung der Mutterzelle in successiv zwei mal zwei Tochterzellen ist unter den Monokotyledonen entschieden der häufigere Fall, derjenige der simultanen Theilung in vier Tochterzellen der seltnere. Der erste ist z. B. typisch für alle darauf untersuchten Liliaceen, für Tradescantia, für viele Gräser. Als sichere Beispiele des zweiten können Najas major und Iris florentina, parisiensis u. A. bärtige genannt werden. Uebrigens ist bei keiner Art, weder von Mono- noch von Dikotyledonen, einer der beiden Entwickelungsgänge der ausschliesslich herrschende. Man findet bei jeder Art, für die der erstere Regel ist, einzelne Ausnahmen: Pollenmutterzellen die nach der Weise des zweiten sich vermehren, *) und umgekehrt.

Die Scheidewände, welche die Pollenmutterzelle theilen, erscheinen bei allen von mir untersuchten Monokotyledonen beim ersten Sichtbarwerden schon als gleichmässig dünne, von der einen Innenfläche der Haut ohne Unterbrechung quer durch die Zelle zur anderen gespannte zarte Membranen. Das allmälige Wachsen der Scheidewand von der Innenfläche der Mutterzellmembran bis zu ihrem Mittelpunkt hin, wie es bei Dikotyledonen, namentlich bei Malvaceen **) unzweifelhaft festgestellt ist, vermochte ich bei keiner monokotyledonen Pflanze zu beobachten.

An den Mutterzellen des Pollens von Iris pumila, florentina, parisiensis u. A., die eben zur Theilung sich anschicken, tritt dagegen eine Erscheinung hervor, welche deutlich zeigt, dass hier die Bildung der Scheidewände in einer von der jener Dikotyledonen einigermaassen abweichenden Weise erfolgt. Lässt man die zur Untersuchung bestimmten Antheren, bevor man die in ihnen enthaltenen Pollenmutterzellen frei legt, etwas abwelken (etwa eine halbe Stunde lang), so erscheint der Inhalt der Mutterzellen, unmittelbar nachdem man sie in Wasser brachte,

*) So namentlich bei Tradescantia; Bot. Zeit. 1848, 430.

**) Mohl, die Pflanzenzelle in Wagners Handwörterb. d. Physiol. IV, 118. Nur dieser Beobachtung, in welcher der aus der zersprengten Mutterzelle ausgetretene vierlappige Primordialschlauch isolirt gesehen wurde, vermag ich Beweiskraft zuzuerkennen. Wenn man an eben getheilten Pollenmutterzellen, deren Inhalt zur Contraction gebracht wurde, die zarten Scheidewände nur bis an den zusammengezogenen Inhalt, innerhalb der wenig durchsichtigen Masse desselben aber nicht weiter verfolgen kann, so liegt darin kein Beweis, dass sie nicht bis zum Mittelpunkt der Zelle reichen. Vergl. Nägeli, Entwickelungsgesch. d. Pollens, 16.

schwach zusammen gezogen, von der Innenfläche der Zellhaut entfernt. Dieser contrahirte Inhalt zeigt in Mutterzellen, welche in Theilung begriffen sind, auf seiner Oberfläche seichte Furchen, deren Verlauf genau den künftigen Berührungskanten der Scheidewände mit der Innenfläche der Mutterzellhaut entspricht. Aber auch die besten Mikroskope lassen keine der Innenfläche der Mutterzellhaut aufgesetzten, in die Furchen des Zellinhalts hinein reichenden Leisten aus Membransubstanz erkennen (XX, 16). Es ist klar, dass hier die beginnende Abschnürung des Zellinhalts zu einer Anzahl secundärer Primordialzellen nicht von sofortiger Bildung von festen Zellhäuten an den Aussenflächen der sich abschnürenden Inhaltspartieen begleitet ist.

Wo die verdickte Haut der Mutterzelle Schichtung zeigt, da erscheinen die Scheidewände, welche die Mutterzelle in Fächer theilen, als unmittelbare Fortsetzungen der innersten, die Innenfläche der Mutterzellhaut gleichmässig auskleidenden Schichten; — sie gehen ohne sichtbare Unterbrechung in diese über. Bei dem gegenwärtigen Stande der Lehre vom Baue der Zellhaut ist es kaum nöthig, anzumerken, dass dieser Umstand, und das ihm ähnliche Verhältniss der Scheidewände getheilter dickwandiger vegetativer Zellen mit geschichteter Wand zur innersten Lamelle dieser Haut, ebensowenig die Einschachtelung geschlossener Zellhäute der Tochterzellen in die Membran der Mutterzelle entscheidend beweiset, als die Schichtung einer Zellmembran mit allen bekannten Nebenumständen (Tüpfelung u. s. w.) ein Beweis dafür ist, dass diese Schichten durch Anlagerung auf die Innenfläche einer primären, dünnen, äussersten Lamelle der Haut gebildet wurden. Sie können ebenso wahrscheinlich durch Differenzirung der durch Intussusception gewachsenen Haut in Lamellen verschiedener Dichtigkeit entstanden sein; und für viele Fälle hat diese Ansicht der Entstehungsweise einen höheren Grad von Wahrscheinlichkeit.*)

Eine so beträchtliche Verdickung der Häute der Specialmutterzellen, der in ihrer ganzen Dicke mikrochemisch gleichartig reagirenden Tochterzellwände der Pollenmutterzelle, wie sie bei vielen Dikotyledonen vorkommt (z. B. Malvaceen, Cucurbitaceen, Passiflora), ist bei Monokotyledonen nirgends beobachtet. Gewöhnlich wird sehr bald in jeder Specialmutterzelle eine, deren Innenfläche dicht anliegende, dünne

*) Vergleiche Nägeli, Pflanzenphysiol. Untersuch. II, Zürich 1858, 277 ff.

Haut sichtbar, deren Beschaffenheit von der der Wände der Specialmutterzellen abweicht. Sie haftet nur lose an der ihr nächsten Schicht der Specialmutterzellenmembran, obwohl sie dieser auf allen Punkten dicht anliegt. Ihre Elasticität übertrifft weit die jener. Wenn durch das Aufquellen der inneren Lamellen ihrer eigenen Haut eine oder mehrere Specialmutterzellen berstet, bleibt jene neu erschienene Haut ganz, und tritt aus dem Risse blasenförmig hervor. Unter Umständen wird sie als geschlossene Blase, den gesammten Inhalt der Zelle einschliessend, ausgetrieben (so bei Iris parisiensis, pumila; mit einer später zu erwähnenden Modification bei Neottia ovata). Diese neue Schicht der Zellhaut ist die Grundlage der künftigen bleibenden Membran der Pollenzelle. Die frühesten, der Beobachtung zugänglichen Zustände der ganz oder theilweise freigewordenen Membran zeigen in ihren mikrochemischen Reactionen keinen wesentlichen Unterschied von den geschichteten Häuten der Specialmutterzellen. Wie diese, färben sie sich bei Behandlung mit Jod und Schwefelsäure blau, meist aber reiner und intensiver (so bei Campelia Zanonia); anderwärts dunkler, aber mit einem Stich ins Grüne, während der Färbung der äusseren Schichten Roth beigemengt ist (Iris parisiensis, Neottia ovata). Gleich den äussersten Schichten wird auch die innerste Lamelle auf ihrer frühesten Entwickelungsstufe durch Einwirkung concentrirter Schwefelsäure vollständig zerstört, nur langsamer.

Diese gleichartige Cellulosereaction der neuen Lamelle der Membran in ihrer ganzen Dicke dauert nur sehr kurze Zeit. Sie erscheint, auf nur wenig weiter vorgerückterer Stufe, aus zwei optisch und chemisch verschiedenartig sich verhaltenden Schichten zusammen gesetzt. Die innere reagirt gleich einer gewöhnlichen Zellstoffhaut, die äussere gleich der Cuticula. Jene ist die Grundlage der Intine, diese die der Exine des Pollenkerns.

Die Exine wächst in der Mehrzahl der Fälle rasch in die Dicke. Sie bedeckt sich mit den für die Pollenkörner der verschiedenen Arten je nach den specifischen Unterschieden charakteristischen Hervorragungen: Wärzchen, Stacheln, netzlinig verlaufenden Leisten u. s. w., noch während des Bestehens der spröderen Häute der Mutter- und Specialmutterzellen. Die Ausbildung der Exine wird um so beträchtlicher, je dicker diese Häute sind. Dieses Verhältniss erweiset sich als überall zutreffend, nicht nur wenn man Arten mit sehr entwickelter Exine mit solchen vergleicht, deren Pollenkörner von nur dünner Exine bekleidet

sind, z. B. Iris, Hemerocallis, Allium einerseits mit Tradescantia, Campelia, Crocus andererseits. Sondern es pflegt auch an ein und demselben Pollenkern die Exine an der, im Complex der von der Mutterzelle noch umschlossenen vier Pollenzellen nach aussen gekehrt gewesenen Fläche, welche von Zellstoffschichten von grösserer Mächtigkeit bedeckt ward, um Vieles stärker ausgebildet zu sein, als an denjenigen Flächen des Pollenkerns, welche den Schwesterzellen zugekehrt waren.

Die Häute der Mutter- und Specialmutterzellen werden in der grossen Mehrzahl der Fälle von aussen her aufgelöst, so dass, nach der Entblössung der freien Aussenwände eines Complexes junger Pollenzellen, und nach dem Heraustreten der Pollenzellen aus den jetzt nach aussen hin offenen Fächern der Mutterzelle, die Scheidewände, welche die Specialmutterzellen trennten, noch eine Zeit lang im Zusammenhange kenntlich sind (z. B. bei Iris squalens, parisiensis, Cephalanthera rubra). Eine Ausnahme von dieser Regel scheint Maranta zebrina durch das Zerfallen der intacten Specialmutterzelle, nach Anlegung der Exine zu machen. Man findet jede junge, freie, sphärische Pollenmutterzelle von einer der Exine dicht anliegenden, ablösbaren Zellstoffhaut umschlossen, welche füglich nichts anderes sein kann, als die noch unversehrte Specialmutterzelle.

Die Intine verändert sich nach ihrer Differenzirung von der Exine in den meisten Fällen bis zur Reife des Pollenkerns bei Monokotyledonen nur wenig. Nur sehr selten lässt sie eine Schichtung erkennen.*) Ihr Dickewachsthum ist meist ebenso gering,**) als ihr Aufquellungsvermögen in Wasser. Der Pollen von Maranta zebrina macht auch in letzterer Beziehung eine Ausnahme. Wird das junge Pollenkorn ins Wasser gelegt, so quillt die dicke Intine rasch auf; zunächst das ganze Korn so weit ausdehnend, als die Elasticität der Exine es erlaubt. In Folge dieser Zunahme des Volumen wird die Haut der Specialmutterzelle gesprengt und abgestreift, welche — wie eben erwähnt — der Exine dicht anliegend das Pollenkorn umschliesst. Das weitere Aufquellen der Intine, welchem die Exine Widerstand leistet, versetzt den Inhalt der Pollen-

*) Zwei Schichten bei Tigridia Pavonia, Fritzsche in Mém. Acad. S. Petersbourg p. div. sav. III, 1837, 711.

**) Bei den Carices ist bekanntlich die Intine an mehreren Stellen stark verdickt; Fritzsche, ebend. 722.

zelle unter so hohen Druck, dass sehr bald Exine und Intine bersten, und der Inhalt aus dem Risse mit grosser Gewalt ausgetrieben wird. Das Aufquellen der Intine, nun ungehindert, dauert dann noch fort bis zur Ausfüllung des grössten Theils des Lumens der Pollenzelle (VI, 25—27).

So weit die Beobachtungen reichen, werden die Pollenzellen der Monokotyledonen verhältnissmässig früh frei; lange bevor sie ausgewachsen sind, zu einer Zeit, wo die Exine noch wenig ausgebildet ist, wo feinkörniges Protoplasma den Zellraum gleichmässig erfüllt, der Zellkern noch centrale Lage hat. Später erst, während des Heranwachsens der frei im Antherenfache liegenden Pollenzellen, tritt im Protoplasma eine grosse oder mehrere kleine Vacuolen auf, bilden sich Amylumkörnchen.*)

---

*) Ich habe in der vorstehenden Darlegung die Ansicht Nägeli's festgehalten, welcher das Auftreten der bleibenden Haut der Pollenzelle als die Bildung einer einzigen, die (Special-)Mutterzelle ausfüllenden Tochterzelle auffasst. Die Anschauung der Entstehung der Pollenzellhaut als einer blossen Modification des Verdickungsprocesses der Häute der Tochterzellen, welche Schacht neuerdings durchzuführen versuchte (Pringsheims Jahrbücher II, 1859, 109 ff.) halte ich für nicht berechtigt. Diese Anschauung setzt voraus, dass geschichtete Specialmutterzellhäute durch schichtenweise Anlagerung auf die Innenfläche in die Dicke gewachsen seien. Für diese Annahme fehlt jeder Beweis. Das Wachsthum der Mutter- und Specialmutterzellhäute kann eben so wahrscheinlich durch Intussusception, die Schichtenbildung durch nachträgliche Differenzirung der Substanz in concentrische Lamellen erfolgen. — Dagegen unterliegt es keinem Zweifel, dass die Haut der Pollenzelle durch Apposition eines neuen, von dem der Specialmutterzellhaut verschiedenen Stoffes auf die Innenfläche dieser Haut entsteht (wie ich bereits früher ausgesprochen, Bot. Zeit. 1848, 431). Einen entscheidenden Beweis werde ich weiterhin, bei Besprechung der Pollenentwickelung des Phajus variabilis, beibringen. In der Art dieser Anlagerung aber waltet ein wesentlicher Unterschied von der Verdickungsweise vegetativer Zellen ob. Bei letzterer ist kein Fall bekannt, in welchem die »neugebildete Verdickungsschicht« nicht der »nächstälteren Schicht« fest anhaftete; kein Fall, in welchem eine soeben neuaufgetretene, innerste Lamelle einer und derselben Zellhaut nicht mit der von aussen ihr zunächst angränzenden gleichartig reagirte. — Schacht nimmt an, dass das Dickerwerden der Pollenzellhaut lediglich durch in centripetaler Folge vor sich gehende schichtenweise Anlagerung erfolge (a. a. O. 153): eine völlig unhaltbare Ansicht. Der Nachweis auch centrifugalen Dickenwachsthums ist für kaum irgendeine pflanzliche Membran leichter zu führen, als für die der Pollenkörner, auf deren ursprünglich stets glatter Oberfläche mehr und mehr an Grösse zunehmende Hervorragungen sich bilden. Wenn Schacht die nach aussen mündenden Kanäle der Exine von Mirabilis Jalapa (Sch. schreibt Ipomaea Jalapa; es ist aber unzweifelhaft Mirabilis gemeint) mit den Tüpfelkanälen

Von diesem, dem typischen Entwickelungsgange der Pollenzellen finden sich unter den Monokotyledonen zweierlei Abweichungen; an sich geringfügig, in ihren Endergebnissen aber sehr auffällig. Die eine zeigen die unter Wasser blühenden Najadeen, von denen Najas major und Zostera untersucht sind.

Die Pollenmutterzellen von Najas major treten sehr früh aus dem parenchymatischen Zusammenhange, und erfüllen die geräumigen vier Fächer der grossen Anthere (I, 1) als ein lockerer Brei aus fast kugeligen Zellen. Den Antherenfächern fehlt die Auskleidung aus weichwandigen, locker vereinigten, radial gestreckten Zellen, welche bei der grossen Mehrzahl der Phanerogamen sich findet. Bis zur simultanen Theilung der Mutterzelle in vier, meist in einer Ebene liegende dünnwandige Tochterzellen bietet der Entwickelungsgang nichts Eigenthümliches (I, 2—6). Die Tochterzellen bleiben aber nur kurze Zeit im Zusammenhange. Sehr bald, und ohne dass eine merkliche Verdickung ihrer Wände voraufgegangen wäre, erscheinen die Zellen von einander getrennt, lose im Antherenfach liegend (I, 7 a. b). Jede der vereinzelten Zellen ist jetzt von einer, unmessbar dünnen, Cuticula umgeben. — Die Trennung der kurz zuvor fest vereinigt gewesenen Zellen ist nicht füglich anders denkbar, als durch Verflüssigung der äussersten Schicht der Häute der Tochterzellen und der sie umschliessenden Mutterzellhaut, wenn auch diese Hautlamellen verschwindend dünn sein mögen. Dies zugegeben, wird ein wesentlicher Unterschied zwischen der Entwickelung des Pollens von Najas und der des Pollens der Mehrzahl der Dikotyledonen nicht aufgestellt werden können. Die Häute der Specialmutterzellen von Najas bleiben äusserst dünn und werden sehr frühe wieder aufgelöst: dies ist Alles. Die Pollenzellen sind nach ihrer Vereinzelung nicht ganz von der halben Grösse der reifen. Sie enthalten jetzt meistens zwei Zellenkerne,

---

dickwandiger Zellen vergleicht, und die Ausmündung jener nach aussen aus der Auflösung der äussersten Lamellen der betreffenden Zellhaut erklärt, so vergisst er, dass die von Kanälen durchsetzte Schicht jener Exine erst nach dem Freiwerden der Pollenzellen entwickelt wird. — Der Ansicht, welche die Wände der Specialmutterzellen für durch Ausdehnung der Pollenzellen comprimirte Gallerte nimmt — vor einiger Zeit noch von Wimmel vertheidigt (Bot. Zeit. 1850, 269), und der Vermuthung Nägeli's von der Entstehung der Pollenzelle durch freie Zellbildung innerhalb der Specialmutterzelle (Ztschr. wiss. Bot. III u. IV [1846], 51), brauche ich, als wahrscheinlich allseitig aufgegeben, hier nur geschichtlich zu erwähnen.

wie dies auch anderwärts an jungen Pollenzellen öfters vorkommt*) (z. B. bei Cypripedium Calceolus, Narcissus poëticus), ohne dass eine Theilung der Pollenzellen erfolgt. Vielmehr verschwindet der eine Zellkern bald wieder; das der Reife nahe Pollenkorn besitzt nur noch einen (I, 9. 10). Erst in der einkernig gewordenen Pollenzelle bilden sich die spindelförmigen, theils geraden, theils schwach gebogenen Amylumkörnchen aus, welche dem Pollen von Najas ein so eigenthümliches Aussehen geben (I, 9—12). Der reife Pollen besitzt eine zwar sehr dünne, aber deutliche Exine, welche an schlauchtreibenden Pollenkörnern besonders scharf hervortritt (I, 11). Die Pollenzellen entwickeln sehr oft schon in den Fächern der aufgesprungenen Anthere lange Schläuche.

Die Anthere von Zostera marina**) und nana tritt als ein wenig erhabener, halbellipsoïdischer Zellhöcker auf der Oberseite der flachen, blattförmigen Achse des Blüthenstandes auf. Das Vorder- und Hinterende des zelligen Wärzchens entwickeln sich zu den beiden, je zweifächerigen Antherenhälften, dieses stets früher als jenes; die Mittelgegend wird zum Connectiv, welches, excessiv in die Breite wachsend, die beiden, Spindelform annehmenden Hälften des Staubkölbchens weit von einander entfernt. In jeder Hälfte des Staubkolbens unterscheiden sich schon früh zwei Längsreihen höherer als breiter und langer Zellen, deren je eine in die Achse einer der durch eine seichte Furche getrennten Hälften (Fächer) der Staubkolbenhälfte verläuft, von den benachbarten Zellen durch Grösse und reichen Gehalt an Protoplasma: die Urmutterzellen des Pollens. Sie theilen sich oft wiederholt durch Quer- und Längswände, welche sammt und sonders auf einer durch die Längsachsen beider Antherenfächer gelegten, der Vorderfläche der Achse der Inflorescenz parallelen Ebene senkrecht stehen. Das pollenbildende Gewebe, der Inhalt jedes Antherenfachs bleibt somit fortwährend eine einfache Schicht von Zellen, deren Form immer gestreckter prismatisch wird, je mehr das Antherenfach durch Wachsthum seiner Wände sich erweitert und je weiter die Theilungen in der aus Vermehrung der

*) S. a. Wimmel, Bot. Zeit. 1850, 290.

**) Die Entwickelung der Zostera ist von Grönland (Botan. Zeit. 1851, 185) und von mir insbesondere die des Pollens und der Eychen (dieselbe Zeitschrift 1852, 121ff.) erörtert worden. Ich wiederhole hier kurz die Ergebnisse jener meiner Untersuchung mit einigen Zusätzen. —

Pollen-Urmutterzellen hervorgegangenen Zellenmasse vorschreitet. Dabei bleiben diese Zellen fortwährend in innigem Zusammenhange; lassen sich ohne Verletzung nur schwer von einander trennen, und zeigen auch in der relativen Dicke ihrer Wände keine Unterschiede, welche es möglich machten irgendwelche Complexe von Zellen mit Sicherheit als die Nachkommenschaft einer Mutterzelle zu betrachten. Das Gewebe hat durchaus das Ansehen einer in stetiger Zweitheilung aller ihrer Zellen begriffenen Zellenmasse. Eine Andeutung der Entstehung von je vier Zellen letzter Generation in einer Mutterzelle kann nur darin gefunden werden, dass je vier der Zellen besonders fest an einander zu haften pflegen, wenn deren Länge die Höhe etwa um das Dreifache übertrifft. Doch findet in dieser Beziehung nichts weniger statt, als eine ausnahmslose Regelmässigkeit. Complexe von drei, von fünf und mehr Zellen bleiben nicht selten vereinigt, wenn der Inhalt einer aus einem Antherenfache durch zwei parallele Längsschnitte herausgenommenen Lamelle mit den Präparirnadeln aus einander gezupft wird.

Wenn die Länge jeder Zelle auf etwa das Achtfache der Höhe gestiegen ist, vereinzeln die Zellen sich leicht. Fortan findet aber keine weitere Zellvermehrung in ihnen statt; die Pollenzellen sind bereits gebildet: jetzt meist von Keulen-, seltner Spindelform, von körnigem Protoplasma erfüllt, in dessen Mitte eine Vacuole aufzutreten beginnt; des Zellkerns entbehrend, von einer dünnen Cuticula umhüllt, welche von dem Zeitpunkte an als die äusserste Lamelle der Haut jeder Pollenzelle sich zeigt, wo die leichtere Trennbarkeit der einzelnen Zellen anhebt. Die Lösung der Pollenzellen von einander scheint eben auch hier auf der Verflüssigung der verschwindend dünnen Specialmutterzellhaut nach dem Auftreten der Cuticula der Pollenzelle zu beruhen.

Die Länge der Pollenzellen nimmt im stetig sich erweiternden Antherenfach fortan noch sehr bedeutend zu. Die Ausdehnung der Wände jedes Antherenfaches, auf welcher die Erweiterung des Raumes beruht, erfolgt in der Hinterwand in der Richtung abwärts, in der Vorderwand in der Richtung aufwärts. Die Pollenzellen, deren grösster Längsdurchmesser in den früheren Entwickelungszuständen auf der Fläche der platten Achse der Inflorescenz senkrecht stand, erhalten in Folge der einander entgegengesetzten Wachsthumsrichtungen der beiden Antherenfachwände, welchen ihre Enden anhaften, mehr und mehr eine zur Vorderfläche der Blüthenstandachse geneigte Richtung; in der reifen Anthere liegen sie

dieser Fläche fast parallel. — Jetzt, beim Aufspringen der Anthere, übertrifft der Längsdurchmesser jeder der langcylindrischen Pollenzellen den Querdurchmesser um das Sechzig- bis Achtzigfache. Die Cuticula ist noch dünner worden, als sie beim ersten Auftreten war, aber leicht und deutlich nachweisbar. — In Wasser — süssem oder brackigem — untersucht, zeigt jede Pollenzelle eine lebhafte Strömung des Wandbelegs aus körnigem Protoplasma: der Strom, ein aus in sehr langgezogenen Schleifen anastomosirenden breiten Fäden zusammengesetztes Band, geht der Achse der Pollenzelle parallel die eine Hälfte ihrer Innenwand entlang, und biegt im Ende der Zelle um, um an der gegenüberliegenden Hälfte der Wand in entgegengesetzter Richtung zu verlaufen.

Eine zweite Reihe von Abweichungen im Bildungsgange des Pollens von dem gewöhnlichen Typus bietet die grosse Mehrzahl der Orchideen. Wie bei den Najadeen lassen sich auch hier diese Abweichungen auf eine ungewöhnliche Entwickelungszeit der Pollenhaut zurückführen. Während aber bei den Najadeen das Ungewöhnliche in der, unverzüglich nach Bildung der dünnhäutigen Specialmutterzellen eintretende Ausscheidung der von dünner Cuticula bekleideten Pollenzellhaut beruht, besteht es bei der Mehrzahl der Orchideen entweder in der Entwickelung einer von vollständiger oder die Zelle nur theilweis umgebender Cuticula umhüllten, oder der Exine ganz entbehrenden Pollenzellhaut, welche noch vor Theilung der Mutterzelle gleichsam als innerste oder zweitinnerste Lamelle der Haut derselben auftritt. — Neben der gewöhnlichen Entwickelungsweise des Pollens, wie sie z. B. bei Cypripedium*) unter den Orchideen sich findet, kommen in dieser Familie dreierlei Abweichungen von ihr vor.**)

Bei den Orchideen mit pulverigem, aus Tetraden bestehendem Pollen, unter den gemeineren Einheimischen namentlich bei Neottia ovata und Nidus aris, den Arten von Epipactis, bleiben die Mutterzellen des Pollens im parenchymatischen Verbande noch lange nachdem die Wände

*) Reichenbach fil., de pollinis orchidearum genesi. Lpzg. 1852. Taf. II. f. 117 — 134.

**) Die Bildung des Pollens der Orchideen ist von Reichenbach fil. in der eben angeführten Schrift ausführlich abgehandelt worden. Meine Beobachtungen stimmen mit den seinigen vollständig überein, einige untergeordnete Punkte abgerechnet. Ich gehe auf den Gegenstand hier nochmals ein, hauptsächlich um einige Angaben über das erste Auftreten der Exine beizubringen.

sich stark verdickten, der primäre Kern sich auflöste, zwei secundäre, nach deren Wiederverflüssigung vier tertiäre Kerne gebildet wurden; bis endlich auf der Innenwand der Mutterzelle vorspringende Leisten sich entwickeln, deren Lauf der künftigen Stellung der Scheidewände entspricht (V, 5—7). Wenn bis jetzt die Haut der Mutterzelle durch Aufquellen der inneren Schichten in Wasser barst, so wurde der Inhalt als formloser Brei hervorgetrieben. Von nun an, etwa gleichzeitig mit der beginnenden Vereinzelung der Mutterzellen, ändert sich dieses Verhältniss. Wenn die geschichtete Zellhaut platzt, tritt aus ihr die innerste Lamelle in Form einer ellipsoïdischen zartwandigen Zelle hervor, welche den gesammten Zellinhalt einschliesst. Der Zellraum ist jetzt noch nicht durch Scheidewände getheilt (V,8). Die Membran der ausgetretenen Zelle widersteht der Einwirkung von Schwefelsäure um Vieles länger, als die entleerten geschichteten Lamellen der Mutterzellhaut. Mit Jod und Schwefelsäure behandelt, nimmt sie blaugrüne Farbe an. — Wenig später erscheint die Membran aus zwei Lamellen zusammengesetzt, deren äussere, sehr dünne als ächte Cuticula, die innere als reiner Zellstoff reagirt. Ungefähr gleichzeitig zeigen sich auf der Innenfläche vorspringende Leisten, in ihrem Verlaufe genau dem der Leisten der aufgequollenen entleerten Schichten der Mutterzellhaut entsprechend (V, 8, *b*). Unmittelbar darauf, an Pollentetraden, die sich im nämlichen Antherenfach mit den eben beschriebenen untermengt finden, theilen durchgehende Scheidewände, Fortsetzungen jener Leisten, den Raum der Zelle in vier Fächer: die vier aus der einen Mutterzelle hervorgegangenen Pollenzellen, welche durch die allen vier gemeinsame Cuticula dauernd zusammengehalten, zu einer Tetrade vereinigt sind. — Auch die junge Tetrade wird aus den aufquellenden äusseren Schichten der Mutterzellhaut ausgetrieben, wenn sie in Wasser gebracht wird; selbst dann noch, wenn die von vorspringenden Leisten gefelderte Cuticula eine beträchtliche Entwickelung erreicht hat (V, 9). Der Innenraum der entleerten Schichten ist unter allen Umständen von beträchtlich grösserem Umfange, als die ausgetriebene Tetrade (V, 8. 9). Die des Aufquellens fähigen Schichten der Mutterzellhaut werden endlich aufgelöst; die fertigen Tetraden heften sich an einander und stellen beim Aufspringen des Antherenfaches die lose verbundenen Pollenmassen dar.*)

*) Die Entwickelung einiger der bei Phanerogamen vorkommenden Pollentetraden

Die Pollenentwickelung von Cephalanthera rubra und pallens, welche im Uebrigen von der den Phanerogamen gewöhnlichen nicht abweicht, nähert sich der von Neottia insofern, als auch bei Cephalanthera die Mutterzellen bis nach ihrer Theilung durch Scheidewände aus der verdickten Wand gleichartigem Stoffe, selbst bis nach der Theilung in je vier Specialmutterzellen in parenchymatischem Verband bleiben (VI, 8). Interessant ist bei Cephalanthera rubra*) das Verhalten der jungen bleibenden Wand der Pollenzelle gegen Reagentien. Zu der Zeit, da die Pollenmutterzellen sich leicht von einander trennen, wird auf der jungen Haut der Pollenzelle die Anlage der künftigen Zeichnung der Exine bereits sichtbar. Behandelt man Mutterzellen dieser Entwickelungsstufe mit Chlorzinkjodlösung von einer bestimmten Concentration, so färben sich die äusseren Schichten der Wände des Complexes von Mutter- und Tochterzellen weinroth (VI, 10, *a*); die dünne innerste Schicht der Wand jeder Specialmutterzelle (VI, 10, *b*) färbt sich blau; die junge Pollenzellhaut bleibt farblos, zieht sich aber, gleich dem Zelleninhalte, zusammen; nur minder stark als dieser (VI, 10, *c*).

Die Ophrydeen, und auch die grosse Mehrzahl der Ceriorchideen, unterscheiden sich in Bezug auf die Pollenentwickelung dadurch von Neottia, dass nur ein geringer Theil von Pollentetraden — diejenigen, welche die Aussenflächen der Massulae (bei Ceriorchideen die Aussenfläche der Pollenmassen) zusammen setzen — eine Exine erhalten, und zwar eine unvollständige, die nur die Aussen- und einen Theil der Seitenflächen der Tetraden bekleidet.**)

Jede Massula ist die aus der wiederholten Theilung einer einzigen Urmutterzelle des Pollens hervorgegangene Gruppe von Zellen, Dies geht sowohl aus der Untersuchung frühester Zustände hervor,***) als auch aus der der Hemmungsbildungen, wie sie sich bei den Orchisarten im Grunde jedes Antherenfaches, an der Anfangsstelle der Caudi-

---

(z. B. Pyrola rotundifolia und Periploca graeca) stimmt mit der von Neottia und Epipactis völlig überein.

*) Das Material zu dieser Untersuchung, wie zu mancher anderen, verdanke ich der Güte meines Freundes Prof. Irmisch, der von Sondershausen mir frische Pflanzen sandte.

**) Zuerst beobachtet von Fritzsche; Mém. Acad. St. Petersbourg p. divers savants (1837), 699.

***) Reichenbach fil. a. a. O. Taf. I f. 1. 2 (Orchis Morio) f. 21 (Physurus pictus).

cula zu finden pflegen (III, 8, *b*). Die den ganzen Zellcomplex einer Massula umschliessende Haut, ein Einschachtelungssystem der Membranen der Urmutterzelle und der einander folgenden Generationen von Tochterzellen, erscheint von Anfang an merklich dicker, als die das Innere in Fächer theilenden Scheidewände (III, 8, *b*. 8, *c*). Wenn durch wiederholte Theilung der Zellen, insbesondere der äussersten, die Wand des Antherenfachs berührenden, die Vollzahl der der Massula zukommenden Zellen erreicht ist, tritt noch eine weitere Verdickung der Aussenwände der Oberfläche-Zellen ein. Die verdickten Wandungen bestehen durch und durch aus Cellulose; mit Jod und Schwefelsäure behandelt färben sie sich unter Aufquellen hellblau (III, 9). Bald darauf wird der primäre, centrale Zellkern jeder Pollenmutterzelle aufgelöst; an seiner Stelle erscheinen zwei secundäre, nach deren Wiederverschwinden vier tertiäre gebildet werden. Mit diesen Vorgängen gleichzeitig wird eine, nur soweit sie die innerste Lamelle der verdickten Zellwände der Aussenflächen jeder Massula anliegt, aus zwei Schichten bestehende, Membran sichtbar, welche allseitig die Zelle auskleidet. Die äussere Schicht dieser Membran zeigt die Beschaffenheit einer Cuticula; die sehr dünne innerste Lamelle derselben die Eigenschaften einer Cellulose-Membran (VI, 1). Die Cuticula setzt sich auf seitliche, zwischen je zwei Pollenmutterzellen der Oberfläche der Massula, ein Stück weit fort (VI, 2), so dass das zur deutlichen Cuticula umgebildete Zellhautstück die Form einer Kappe hat, welche die nach aussen gewendete Extremität der zur Theilung sich vorbereitenden Pollenmutterzelle bedeckt. Von den Stellen an, an welchen die Bekleidung der neuen Membran durch die kappenförmige Exine aufhört, ist jene von der sehr dünnen ursprünglichen Haut der Mutterzelle kaum zu unterscheiden. Gleich darauf erfolgt die Theilung, begleitet von der Verflüssigung der die Cuticula bedeckenden Schichten der Mutterzellhäute (III, 13). In Folge dieser Auflösung der Mutterzellhaut werden die Massulae frei von einander und von der äusseren Wand des Antherenfaches, fortan nur noch mit ihren Innenenden an der Längsscheidewand der Antherenhälfte haftend (IV, 5). Werden dünne Durchschnitte einer Massula mit Jod und concentrirter Schwefelsäure behandelt, so quellen alle Zellstoffwandungen auf, blaue Färbung annehmend, während die Cuticula-Kappen der Zellen der Aussenfläche ihre Form nicht ändern und sich gelb färben (IV, 10). Nach längerer Maceration einer durchschnittenen Massula in Schwefelsäure bleiben nur

die leicht an einander haftenden Cuticula-Kappen der Tetraden der Oberfläche übrig; alle Zellstoffwandungen werden zerstört (IV, 15). — Mässiger Druck auf das Deckglas genügt, die Tetraden einer Massula von einander zu trennen. An so vereinzelten Tetraden überzeugt man sich bei Behandlung mit Jod und Schwefelsäure, dass die Tetraden nicht völlig nackt sind. Eine äusserst dünne, nur bei vorsichtiger Behandlung des Objects, und nur mit sehr guten Instrumenten wahrnehmbare Schicht einer bräunlichen, der Schwefelsäure länger widerstehenden Substanz umschliesst die aufquellende, sich bläuende Celluloseliaut; bald mehr bald minder deutlich sichtbar (V, 11. 12). Dieser Umstand, verbunden mit der leichten Trennbarkeit der Tetraden, berechtigt zu der Annahme, dass die Pollenentwickelung auch der Ophrydeen durch Bildung einer die Mutterzelle völlig ausfüllenden Tochterzelle erfolge, deren Wand die bleibende Membran der Pollentetrade darstellt: ein Verhältniss, das hier, wie bei Najas und Zostera, nur wegen der verschwindenden Dünne des grössten Theiles der Mutterzellmembranen minder deutlich hervortritt. Dass dem so sei, dafür spricht aufs Entschiedenste der Entwickelungsgang des Pollens von Phajus Wallichii.

Diese Entwickelung hält die Mitte zwischen der von Neottia und der von Orchis. Die Wände der ursprünglich sehr dünnhäutigen Mutterzellen (VI, 3) werden beträchtlich verdickt, noch bevor der primäre Kern jeder Zelle verschwindet. Die Verdickung überwiegt bedeutend an den nach aussen gekehrten Wänden der die Oberfläche jeder Pollenmasse zusammensetzenden Zellen; von da nach innen nimmt sie rasch und beträchtlich ab. Zu der Zeit, da in jeder Mutterzelle die vier tertiären, für die Pollenzelle bestimmten Kerne eben gebildet sind, erscheint die äussere Wand jeder Mutterzelle der Aussenfläche der Pollinarien aus drei Lamellen zusammen gesetzt: einer sehr dünnen äussersten, je zwei benachbarten Zellen gemeinsamen; einer dickeren mittleren, und einer noch etwas breiteren innersten (VI, 4). Jede dieser Schichten ist völlig durchsichtig; die äusserste ist am stärksten, die innerste am schwächsten lichtbrechend. Bei etwas längerer Einwirkung von Wasser zieht sich öfters der körnige Zelleninhalt, scharf begränzt, von der innersten Lamelle der Haut eine kurze Strecke zurück (VI, 4, *b*). An Zellen, welche durch den Schnitt geöffnet wurden, erkennt man, dass die innerste Schicht nur von sehr geringer Festigkeit, gallertartig weich ist (VI, 4, *b*), und dass ihre Substanz, bei längerem

Liegen in Wasser, in diesem sich vertheilt. Wird ein frisches solches Präparat mit Chlorzinkjodlösung behandelt, so färben sich die beiden äusseren Lamellen der Zellhäute blassblau, die innere blassgelb, indem sie zugleich ein körniges Aussehen annimmt (VI, 4, *c*); der von der Innenfläche der Wand mit scharfer Begränzung sich zurück ziehende Zelleninhalt wird dunkel braungelb. — In den nächst älteren, nur sehr wenig weiter entwickelten Knospen der nämlichen Inflorescenzen findet sich, an Statt jener breiten, auf Jodzusatz ein körniges Aussehen annehmenden innersten Schicht der Haut, eine viel schmälere, aus zwei verschiedenen Lagen bestehende (VI, 5), die innerste Lage glatt, mit Jod und Schwefelsäure sich bläuend; die äussere körnig, der Schwefelsäure widerstehend, mit Jod eine gelbe Färbung annehmend: die letztere die Exine, die erstere die Intine der noch nicht in vier Zellen getheilten Pollentetrade. Mittelstufen zwischen diesen beiden Zuständen vermochte ich bei oft wiederholter Untersuchung reichlichen Materials durchaus keine aufzufinden, so dass ich die Ueberzeugung gewonnen habe, jene weiche, dicke innerste Schicht verwandle sich plötzlich, unter beträchtlicher Abnahme ihres Volumen, in eine feste, gleich bei der Erhärtung aus zwei chemisch verschiedenen Lamellen bestehende Membran. — An den Seiten- und inneren Flächen der äusseren Mutterzellen ist die halbfeste Schicht weit minder mächtig entwickelt. Noch schwächer ist sie es in den Zellen des Inneren jeder Pollenmasse. Damit stimmt überein, dass die Exine an der nach aussen gewendeten Extremität jeder oberflächlichen Tetradenanlage um Vieles schärfer markirt auftritt, als im übrigen Theile. Dort ist sie zu einer Zeit bereits deutlich sichtbar, wo hier die Aussenfläche der künftigen Tetrade noch glatt erscheint (VI, 6); — ferner dass die Exine der inneren Tetraden jedes Pollinarium überhaupt nur eine sehr geringe Ausbildung erhält.

Die Theilung jeder Mutterzelle in vier Pollenzellen erfolgt erst einige Zeit nach dem Auftreten der Exine (VI, 6); etwa vier bis sechs Knospen abwärts am Blüthenstande. Noch später löset sich der parenchymatische Zusammenhang der Pollenmutterzellen unter einander. Nach der Vereinzelung in Wasser gebracht, stossen sie die eingeschlossenen Tetraden durch denselben Mechanismus aus, wie Neottia ovata. Nach dem Freiwerden der Mutterzellen von einander werden die Zellhäute derselben, bis auf die Exine der Tetrade herab, rasch aufgelöst.

Bei einigen, vielleicht bei zahlreichen Cerіorchideen findet eine Modification der den Ophrydeen zukommenden Entwickelungsweise des Pollens statt, welche darin besteht, dass jede stärkere Verdickung der Mutterzellhäute und jede deutliche Cuticularbildung an den Pollentetraden unterbleibt. Der ganze Inhalt eines Pollenfachs bleibt bis zur Reife in parenchymatischem Zusammenhange, der nur durch starke Quetschung der Pollenmasse gelöst werden kann. Dann vereinzeln sich die Tetraden, sämmtlich, auch die der Aussenfläche nur von einer so undeutlich entwickelten Cuticula umschlossen, wie die des Inneren der Massulae von Orchis. Solche Verhältnisse finden sich bei Lycaste aromatica, Corallorhiza innata. Die Fälle schwacher Entwickelung der Exinekappen der oberflächlichen Pollentetraden mehrerer Maxillaren stellen Uebergänge von dieser Entwickelungsweise des Pollens zu der unmittelbar vorher geschilderten dar.

Einige Bemerkungen über den Entwickelungsgang einiger der, bei vielen Orchideen vorkommenden, zur Uebertragung des Pollens auf die Narbe behülflichen Organe, der Caudiculae und Retinaculae, mögen hier Platz finden.

Wir verdanken J. D. Hooker eine eingehende Untersuchung der Heranbildung des hintersten Segmentes des Griffels — des sogenannten Rostellum — von Neottia ovata zu dem, zwei Viscintropfen, sogenannte Drüsen, tragenden plattenförmigen Organ, dessen Viscinmassen die aus der aufspringenden Anthere hervortretenden Pollenmassen sich anzuheften pflegen.*) J. D. Hooker schildert das Rostellum als zusammengesetzt aus einer Anzahl in einer Fläche liegender langprismatischer Fächer, deren Inhalt auf früheren Zuständen eine zellige Structur zeige. Der Inhalt tritt zur Zeit der Pollenreife aus den Fächern aus, und bildet die Drüsen. Diese Darstellung bedarf einiger Ergänzungen.

In der halb entwickelten Blüthenknospe der Neottia ovata, deren Pollenmutterzellen noch ungetheilt sind, erscheint das Rostellum als eine Platte aus Zellgewebe von der halben Länge der Anthere, kurz spatelförmigem Umriss, am Vorderrande in eine wenig vortretende Spitze auslaufend (V, 1. 3. 4). Seine der Anthere zugekehrte Seite (morphologisch Unterseite, thatsächlich Oberseite) wird fast vollständig eingenommen von einer Gruppe in einer Ebene liegender langgestreckter Zel-

*) Philos. Transact. 1854, 259; übersetzt in Ann. sc. nat. IV S. III, 84.

len, 16 bis 20 an der Zahl, die etwa zwanzigmal so lang als breit und hoch sind. Diese Zellen enthalten jede einen, verhältnissmässig nicht grossen Zellkern; ihr übriger Innenraum ist erfüllt von dicht gedrängten, bläschenähnlichen Kügelchen einer gegen die stärksten Säuren und Alkalien sehr indifferent sich verhaltenden Substanz. In ihrem Aussehen ähneln diese Kügelchen sehr denen des Milchsaftes der Siphonia elastica. Die zahlreichen übrigen Zellen des Rostellum, an dessen Grunde in sechs Schichten geordnet, die nach dem Vorderrande zu an Zahl allmälig abnehmen, zeigen in Form und Inhalt nichts Besonderes (V, 2). — Bis zur Blüthezeit erleidet das Rostellum nur die eine Veränderung, dass jene grossen Zellen seiner Oberseite an ihren Vorderenden nach vorn gerichtete papillöse Ausstülpungen treiben, welche schliesslich bis an den Vorderrand des Rostellum reichen, und mit einer in langgezogenen Massen gefelderten Cuticula sich bedecken (V, 4). Zur Blüthezeit bersten die stark turgescirenden Zellen dicht hinter den von dieser Cuticula überzogenen Stellen rechts und links von der Spitze des Rostellum; ein grosser Theil des Inhalts tritt aus und fliesst jederseits zu einem Tropfen aus zäher, fadenziehender Substanz zusammen, der häufig, aber nicht immer, der Inhalt eines Antherenfachs sich anheftet (V, 11). — Mit Neottia ovata im Bau des Rostellum völlig übereinstimmend verhält sich ihre Gattungsgenossin Neottia nidus avis, während der vor der Anthere stehende Narbenabschnitt der nahe verwandten Epipactis rubiginosa sich ganz anders beschaffen zeigt: aus gleichartigem Zellgewebe zusammengesetzt, am Vorderrande etwas umgeschlagen, die Oberseite papillös. Nur die Oberhautzellen des umgeschlagenen Randtheiles enthalten viscinähnliche Substanz, aber in viel kleineren Klümpchen, als Neottia, — die zur Oeffnungszeit der Anthere austritt (V, 15. 16). Aehnlich bei Cephelanthera rubra und pallens (VI, 11. 12).

Die Bildung der Caudicula und Retinacula der Ophrydeen erfolgt in wesentlich verschiedener Weise: durch Verflüssigung der Wände von Zellengruppen, in deren Innerem ein viscinähnlicher Stoff sich angehäuft hatte, und durch Zusammentreten dieser Substanz zu Massen, welche nach den Hohlräumen im Zellgewebe sich formen, die sie ausfüllen. — Führt man bei Orchis Morio, zur Zeit da die Pollenzellen eben gebildet sind, einen Längsschnitt durch den unteren Theil einer Antherenhälfte, so findet man vom Grunde der Antherenfächer bis in das stumpfe, von einem der Seitenflügel des Rostellum umschlossene Ende der Antheren-

hälfte einen Strang verhältnissmässig grosser, dickwandiger Zellen verlaufen, die leicht aus dem parenchymatischen Zusammenhange sich lösen und von kleinen Tropfen jener viscinähnlichen Substanz erfüllt sind (III, 16 *a*, *b*. 17). — Zwei Gruppen ähnlicher Zellen finden sich im Innern des Rostellum, jederseits eine genau unter der Endigung jeder Antherenhälfte. Bei weiter rückender Ausbildung der Knospe werden die Zellen beider Gruppen immer reicher an Viscin, ihre parenchymatische Verbindung wird immer lockerer durch allmälige Auflösung der Wände von aussen nach innen; endlich verschwinden die Wände ganz; das Viscin des Inhalts fliesst zusammen und verändert sich, bis zum Aufblühen der Knospe, in eine immer noch weiche Substanz von einer Elasticität, wie sie in lebenden Pflanzen bei gleich geringer Härte nirgends anders vorkommen dürfte.

Entwickelung der Eychen.

Der Typus der Eychen der Monokotyledonen, der Phanerogamen überhaupt, tritt auf besonders übersichtliche Weise in den einfach gebauten, aus verhältnissmässig wenigen Zellen zusammengesetzten Eychen der Orchideen hervor.*) Im jugendlichen Fruchtknoten treten die Placenten auf als von den Innenwänden schwach vorspringende Längsleisten, welche in den Verlängerungen der verwachsenden Seitenränder der, Anfangs schuppenförmigen, drei Carpellarblätter liegen: die eine unter der Mittellinie des Labellum (III, 6. 7), die beiden anderen um 120° von ihr entfernt. Jede Placenta nimmt zunächst die Form der Hälfte eines abgeplatteten Cylinders an, bald darauf wird sie, durch ihren Seitenrändern entlang vorwiegend lebhafte Zellvermehrung zu einem schildförmigen, mit einer relativ kleinen Stelle der convexen Rückenfläche der Innenwand der Fruchtknotenhöhle ansitzenden platten Zellenkörper mit convexer Vorderfläche (III, 21). Zu beiden Seiten der medianen Längsfurche dieser Vorderfläche beginnt an, jederseits in eine

*) Schon vor längerer Zeit (Entstehung des Embryo S. 1 ff.) habe ich die Entwickelungsgeschichte der Orchideen-Eychen gegeben. Die Wichtigkeit des Gegenstandes veranlasste mich zur Wiederholung der einschlagenden Untersuchungen. Das Ergebniss derselben stimmt in allen Punkten mit den der früheren überein. Ich lege es hier aufs Neue dar, in bündigerer Form und von Abbildungen begleitet, welche anschaulicher zu liefern durch optische Hülfsmittel besonderer Güte (Amici'sche Objective und Oculare) mir verstattet ist.

Längsreihe geordneten, in den beiden Reihen mit einander alternirenden Stellen diejenige Vermehrung von Zellen der Oberfläche der Placenta, welche die Bildung der Eychen zum Endergebniss hat.

Die in Folge dieser Zellvermehrung über die Fläche der Placenta halbkugelig sich erhebenden Gewebsmassen treten zunächst in deren Mittelgegend hervor; von hier aus schreitet ihre Bildung nach dem oberen wie dem unteren Ende der Placenta hin fort (III, 21). Von oben gesehen zeigt jede Erhebung deutlich eine Scheitelzelle, umgeben von einem Kranze von 5—6, selten bis 8 Zellen (III, 20. 21). In der an zarten Längsdurchschnitten gewonnenen Seitenansicht stellt jede Erhebung in der Art sich dar, wie der Durchschnitt des Vegetationspunktes einer vegetativen Achse: die Scheitelzelle tritt meistens sehr deutlich hervor; die ihr benachbarten Zellen zeigen eine Anordnung, welche auf ihre Abstammung von, durch in der Scheitelzelle nach verschiedenen Richtungen geneigt entstandene, Scheidewände gebildeten Tochterzellen schliessen lässt (III, 19).

Diese Erhebungen sind die Anlagen, jede einer der Gruppen von Eychen, welche in zwei Längsreihen auf der Placenta der Orchideen stehen. Eine grössere Zahl von Eychen sprosst ziemlich gleichzeitig aus der Oberfläche jeder Erhebung hervor. Das gipfelständige ist auf den frühesten Zuständen vor den übrigen in der Entwickelung etwas voraus: es ist zweifelsohne das zuerst hervortretende, dem die anderen folgen. In welcher Ordnung ist schwer zu ermitteln: das wirre Bild, welches die Ansicht von oben der betreffenden Zustände bietet, ist nicht mit Sicherheit zu deuten. Doch glaube ich kaum zu irren, wenn ich die Stellung der Eychen jeder Gruppe für eine schraubenlinige halte.

Dagegen unterliegt die Ermittelung der Regeln, nach welchen die Zellen der sich entwickelnden Eychen sich vermehren, keiner besonderen Schwierigkeit.*) Auf zur Fläche der Placenten senkrechten Durchschnitten sowohl (III, 23), als bei Betrachtung von Abschnitten derselben von aussen erkennt man, dass bestimmte Zellen der Oberfläche der Hervorragungen — nach jeder Richtung je die zweite — an Grösse beträchtlich zunehmen. In der grösser gewordenen Zelle, deren freie Aussenfläche nach aussen sich wölbt, tritt eine Querwand auf, welche

*) Hier schliessen die gegenwärtigen Mittheilungen an die vorerwähnten früheren sich an.

die Seitenwandungen der Zelle schneidet. In der äusseren der beiden Tochterzellen findet eine Reihenfolge von Theilungen durch von der Längsachse des werdenden Eychens hinweg geneigte Scheidewände statt, welche die freie gewölbte Aussenwand der Zelle, und die von der inneren Schwesterzelle sie trennende Querwand schneiden. Die so entstandenen Tochterzellen, von veränderlicher Zahl, meist fünf, sind so geordnet, dass eine als Scheitelzelle des Organs erscheinende von den übrigen, die einen Gürtel darstellen, eingefasst wird (IV, 2). Jede der letzteren theilt sich nochmals durch eine der von der Scheitelzelle sie trennenden Wand parallele Scheidewand (III, 22); oft auch eine, zwei oder mehrere derselben durch gleichfalls auf der freien Aussenfläche des jungen Eychens rechtwinklige Längswände. Gleichzeitig erfolgt eine Längsdehnung der eingeschlossenen Schwesterzelle der Mutterzelle aller dieser; die Zellschicht, welche aus der Vermehrung der äusseren der beiden Anfangszellen des Eychens entstand, nimmt die Form des Mantels eines Paraboloïds an, dessen Innenraum von der sich streckenden inneren Zelle ausgefüllt wird. In dieser treten jetzt zwei neue Zellkerne an Statt des verschwundenen primären auf (III, 23); wenig später erscheint eine diese Kerne trennende Scheidewand. Das Eychen besteht jetzt aus einer axilen, von zwei Zellen gebildeten Längsreihe, die von einer einfachen, aus superponirten Gürteln von meist je 6 Zellen, mit einer einzigen, vier- bis sechsseitigen Scheitelzelle endigend, zusammengesetzten Zellschicht umrindet wird.

In der Scheitelzelle, und in der zunächst unter ihr gelegenen obersten der Zellen des axilen Stranges wiederholen sich die nämlichen Theilungen stetig bis zur Vollendung der Längenentwickelung des Eychens (III, 1—10). Nach etwa sieben derartigen Wiederholungen, an den terminalen Eychen einer Gruppe wohl auch früher, beginnt der Endtheil des jungen Organs sich seitlich zu krümmen. Die Krümmung erfolgt zunächst nur durch einseitige Dehnung der Zellwände der convex werdenden Seite; eine Theilung der Zellen derselben durch Querwandungen findet nur ausnahmsweise statt (IV, 11). Gleichzeitig mit der Krümmung hebt die Entwickelung der Integumente an. Die Zellen des von der Spitze zu viert- oder fünft-rückwärts gelegenen Gürtels der Rindenschicht wölben ihre freie Wand nach aussen, so dass eine den Grund des Endtheils umfassende vorspringende Leiste aus diesen zusammenhängenden Auftreibungen von Zellwänden entsteht. Die gedehnten Zellen theilen sich,

rasch wiederholt, durch zur Längsachse der Auftreibung quere, oder auch durch wechselnd gegen den Endtheil des Eychens hin und von ihm hinweg geneigte Wände; Theilungen die im Ringe fort und fort in die Länge wachsender Endzellen der so entstehenden röhrenförmigen, den Endtheil des Eychens umscheidenden Sprossung sich bis zum Aufhören des Längenwachsthums wiederholen. — Der unter jenem Gürtel peripherischer Zellen des Eychens gelegene nächste Gürtel folgt ihm in der gleichen Entwickelungsweise. So bildet sich die zweite, äussere, jener ersten dicht angeschmiegte Hülle des Eychens. Die Stelle stärkster Krümmung des Eys fällt mit der Insertion des äusseren Integuments, der Eintritt jener Krümmung mit dem Hervorsprossen dieses zusammen. In den Zellen des peripherischen, das äussere Integument entwickelnden Zellgürtels, welche den Innenwinkel der Krümmung einnehmen, unterbleibt die zur Entstehung der äusseren Eyhülle führende Tochterzellbildung. Das äussere Integument, der Anlage nach an der dem umgewendeten Endtheile des Eys entgegengesetzt gerichteten, zum Funiculus werdenden unteren Theile desselben offen, wie eines der Carpelle einer Nymphaea gegen das Ende der Blüthenachse hin es ist, wächst gleich beim Hervorsprossen mit seinen Seitenrändern an den Funiculus an. Die Zahl der Zellen des Funiculus im Querdurchmesser ist nach Vollendung der Entwickelung der Integumente nicht gesteigert, abgesehen von der weiterhin zu erwähnenden Längstheilung seines axilen Zellstranges (III, 11. 16*). Der Theil des Eychens, welchen die heran-

*) Diese Entwickelungsweise des äusseren Integuments anatroper (und hemitroper) Eychen ist die ganz allgemeine. Die Nichtberechtigung der früher allseitig geltenden Voraussetzung, dass das äussere Integument, im ganzen Umfange des Eyes sich entwickelnd, an seiner dem Funiculus zugekehrten Seite mit diesem verwachse, ist zuerst von Pringsheim für Mercurialis und einige Pflanzen ähnlichen Eybaues dargethan worden (Bot. Zeit. 1851, 115). Mir ist kein Fall bekannt worden, welcher gegen die Allgemeingültigkeit der von Pringsheim für Mercurialis aufgestellten Sätze spräche. Einen Beweis gegen dieselben finde ich ebenso wenig in dem Umstande, dass von nahe verwandten Pflanzen mit ähnlich gebauten, aber verschieden gekrümmten Eychen diejenige mit nicht oder wenig gekrümmtem Eye das einzige oder äussere Integument im ganzen Umfange des Eyes entwickelt zeigt, die andere die Ausbildung dieses Integuments an der Berührungsstelle des Funiculus mit dem inneren Integumente oder dem Eykern unterlässt, — als in der bekannten Erscheinung, dass an abnorm atrop entwickelten Eychen von Pflanzen mit normal anatropen oder hemitropen Eyern das äussere Integument im ganzen Umfange jener abnormen Eyer entwickelt ist (z. B. Berberis, Morus, Mesembryanthemum). Die Vermehrung der Zellen des zum äusseren oder ein-

wachsenden Integumente, in ihre Höhlung ihn einschliessend, als Eykern von den übrigen Theilen des Eychens sondern, enthält nur die eine oberste Zelle des axilen Stranges. Diese Zelle begann schon vor dem Hervorsprossen der Integumente auf Kosten der sie umhüllenden zu wachsen. Während der Ausbildung der Integumente setzt sie dieses Wachsthum fort. Nachdem die Mündung des inneren Integuments bis auf den engen Kanal des Endostoms sich schloss, ist die jene axile Zelle (den werdenden Embryosack) umhüllende Zellschicht bis auf geringe Reste der den Scheitel des Eykerns einnehmenden Zellen völlig verdrängt (IV, 11). Auch diese abgeplattet zusammengedrückten Reste der Scheitelzellen entschwinden bald darauf der Beobachtung. Die Haut des Embryosacks liegt der aus den bleibenden freien Aussenwänden der Rindenzellen des Eykerns zusammengesetzten Hüllhaut desselben auf allen Punkten dicht an (IV, 12—14).

Die Entwickelung aller darauf untersuchten Eychen von Monokotyledonen entspricht in den Hauptzügen der der Orchis Morio. Allen ist gemeinsam, dass die Anlage des Eyes ein aus peripherischen Zellschichten und einem axilen Zellstrange aufgebauter Zellkörper ist; dass eine der Zellen des axilen Stranges, Nachbarzellen zusammendrückend, auflockernd und verdrängend, zum Embryosacke heranwächst. Die Verschiedenheiten des Entwickelungsganges anderer Formen von dem der Orchideen beschränken sich auf abweichende Krümmungen; auf Verminderung oder Vermehrung der Zahl und Aenderung der Einfügung der Integumente; auf das Auftreten einer in bestimmten Richtungen erfolgenden Zellvermehrung im äusseren Integumente, oder in gewissen Gruppen der peripherischen Zellen der Anlage des Eychens, oder der axilen und der peripherischen Zellen der Anlage des Funiculus; auf die Entfernung der zum Embryosack heranwachsenden Zelle des Eykerns von dessen Scheitel, endlich auf die minder vollständige Verdrängung der peripherischen Zellen des Eykerns durch den Embryosack.

Dreierlei Krümmungen der Eychen sind überhaupt beobachtet: solche des freien Theiles des Funiculus, solche der Region, in welcher die Eyhüllen eingefügt sind, endlich solche des Eykerns selbst. Die ersteren, mannichfaltiger Art, in mehrsaamigen Fruchtknoten an ver-

zigen Integument sich entwickelnden Gürtels von Oberhautzellen unterbleibt eben nur in der tiefsten Stelle der Krümmung des jungen Eyes; sie findet aber allseitig statt, wenn die Krümmung unterbleibt.

schiedenen Eychen oft verschiedenartig, durch besondere Benennungen zu bezeichnen, erscheint überflüssig: die Angabe der Richtung, die ungefähre Bezeichnung des Grades der Beugung wird in allen Fällen ausreichen. Das völlige Unterbleiben derselben ist, wie überhaupt, auch unter den Monokotyledonen nicht häufig. Als Beispiele seien, ausser den Orchideen, die Gattungen Arum, Pistia, Calla, Carex, die einsaamigen Arten von Pontederia genannt. Beugung des Funiculus um nahezu 90° nach einwärts ist der grossen Mehrzahl der Monokotyledonen mit parietalen, in der Längsachse des Fruchtknotens sich berührenden Placenten und zahlreichen horizontalen, an jedem der rückwärts geschlagenen Seitenränder in zwei Längsreihen stehenden Eychen eigen: den Liliaceen im weitesten Sinne, mit Einschluss der Irideen und Amaryllideen. Die Beugung ist meist eine sehr scharfe, auf eine kurze Stelle des Funiculus beschränkte, knieförmig. Eine ähnliche Beugung seitwärts zeigt der sehr kurze, dem Grunde des Fruchtknotens eingefügte, freie Funiculus von Najas major (I, 14), eine halb so grosse abwärts der Funiculus des ursprünglich schräg gestellten, später senkrecht abwärts gerichteten Eychens von Symplocarpus foetida (VIII, 4); eine von 45 bis 90° steigende, von den oberen Eychen jeder Placenta zu den unteren hin zunehmende der lange Funiculus von Merendera caucasica (XV, 2. 3); eine noch grössere, bis zu 180° gehende der von Bulbocodium vernum (XVIII, 11. 14. 15). Bei wenigsaamigen Liliaceen mit gestrecktem Eychen (z. B. bei Veltheimia, Gagea), ferner bei den Arten von Pothos findet eine Torsion des Funiculus um beiläufig 45° statt.

Krümmungen der Längsachse des Eychens in der Einfügungsebene des äusseren oder einzigen Integuments sind es ausschliesslich, auf denen die Ablenkung des Laufes von dem geradlinigen der ganz oder halb umgewendeten Eychen beruht. Wenn diese Beugung 180° beträgt und das Längenwachsthum der Integumente nicht oder nur wenig über die Krümmungsstelle des freien Theiles des Funiculus hinausgeht, so wird das Eychen anatrop, hemianatrop aber, wenn die Integumente, oder doch das äussere, über jene Stelle des Funiculus hinauswachsen: so bei Colchicum autumnale (XVII, 1), Pothos. Die anatropen Eychen bilden auch unter denen der Monokotyledonen die Mehrzahl: sie finden sich u. A. bei Triglochin, Rhodea, Calla, Carex, Veltheimia, Gagea, Funkia, Gloriosa, Bonapartea, Puschkinia, Scilla, Merendera, Bulbocodium, Iris, Crocus, Ixia; mit einer leichten Modification, insofern die Längsachse

des Eychens in der Einfügungsgegend der Integumente ausser der vollständigen Umwendung auch noch eine Beugung nach aussen zeigt, bei Hippeastrum aulicum (XIII, 1). Eine Andeutung dieses Verhältnisses kommt auch bei Leucojum vernum (XIII, 13. 25) und noch einigen anderen Amaryllideen vor.

In geringerem Maasse gebogen ist die Längsachse des Eychens in der Einfügungsstelle des äusseren Integuments bei Tradescantia, um etwa 30° (XXIV, 17); bei Triteleia uniflora um etwa 90° (XX, 1), bei Lemna um 30°, bei Asphodelus etwa 45°, bei Philodendron Imbe um 90° in einer der gleich starken Beugung des Funiculus genau entgegengesetzten Richtung, so dass die Längsachse des Eykerns derjenigen des unteren Theiles des Funiculus parallel ist (VIII, 3). — Bei geringer Längsentwickelung des Funiculus hält es schwer, derartige Krümmungsformen von Beugungen des Funiculus scharf zu sondern; wie denn z. B. Zostera und Symplocarpus fast mit ebenso gutem Rechte als dorthin hieher gezogen werden könnten.

In allen den bisher erwähnten Fällen nahm der Eykern selbst an den Krümmungen des Eychens keinen Theil. Seine Längsachse ist eine gerade Linie. Krümmungen auch des Eykerns aber kommen unter den Monokotyledonen relativ häufiger vor, als unter den Dikotyledonen. Der Eykern aller Gräser, der Mehrzahl der Fluvialen, — beide grosse Abtheilungen mit Eychen, deren Chalaza-Gegend unmittelbar der Fruchtknotenwand ansitzt, ohne dass ein als Funiculus unterscheidbarer Theil des Eysprosses unterhalb der Ursprungsstelle der Integumente vorhanden ist — zeigt Beugungen: bei den Triticeen (Secale, Elymus, Triticum, Hordeum XI, 13) und bei Ruppia, Zannichellia, Potamogeton (II, 2. 3. 8) eine Sförmige, im Chalaza-Ende des hängenden Eychens nach der Fruchtknotenwand unter der Anheftungsstelle des Eychens hinwärts, mit der Spitze des Eykerns in entgegengesetzter Richtung gebogen. Diese Krümmung wird bei Zannichellia, Potamogeton, und ganz besonders bei Ruppia erst nach erfolgter Befruchtung vollständig (II, 1—6). Bei den Paniceen (Sorghum, Zea, Coix) ist die Krümmung einfach, Cförmig, mit der Concavität des 180° betragenden Bogens der Anheftungsfläche zugewendet; ebenso bei Allium. In den ersteren Fällen überwiegt die Längsentwickelung der concav werdenden Seite des Eychens die der entgegengesetzten so bedeutend, dass diese gegen jene fast verschwindet; in letzterem ist das Missverhältniss minder grell. Den Eychen der Paniceen gleichartig,

aber minder stark gekrümmt sind die von Crinum; der Bogen beträgt nur 90° bei Crinum variabile, etwa 120° bei Cr. capense (XIV, 1—3. 9. 11). Eine Cförmige Krümmung nach dem Funiculus hin zeigt der Kern der der Anlage nach anatropen Eychen von Alisma Plantago (II, 20), von Czackia Liliastrum (XIX, 2), von Canna, hier mit übermässiger Entwickelung der Chalaza-Region;*) eine ebensolche, erst nach der Befruchtung vor sich gehende Beugung der Kern des anatropen Eychens von Najas major (I, 17, *a*).

Einen so einfachen Bau beider Integumente des Eychens aus nur einer bis zweien Zellschichten, wie die Orchideen, besitzt keine andere der genauer untersuchten Monokotyledonen. Das innere Integument, in der Regel minder entwickelt als das äussere, besteht überall anderwärts aus mindestens zwei, in der Umgegend des Endostoms meist aus drei bis vier Zellschichten. Dass auch am Endostom die Zahl der Zellschichten nicht über zwei beträgt; dass die Verengung des vom inneren Integumente umschlossenen Raumes über der Kernwarze zum Mikropylekanal nur durch quere Streckung der inneren Zellschicht des Integuments bewirkt wird, ist ein nicht häufiger Fall; beobachtet bei Hippeastrum aulicum (XIII, 7), Hymenocallis ovata (XXV, 2), Triglochin maritimum (I, 27).

Eine stärkere Entwickelung des inneren Integuments ist nur bei dem, aus drei bis vier Zellschichten bestehenden einiger Arten von Allium, z. B. A. odorans mir vorgekommen.

Das äussere Integument ist bei den Monokotyledonen allerwärts massiger, als das innere; oft sehr auffällig durch beträchtliche Dicke von ihm unterschieden. So u. v. A. bei Arum, Lilium, Hippeastrum (bei letzterem und anderen Liliaceen auch durch reichlichen Chlorophyllgehalt von dem inneren ausgezeichnet). Bei Hippeastrum aulicum ist das äussere Integument in der der Raphe abgewendeten Seite weit überwiegend entwickelt, so dass diese seine Wucherung fast ausschliesslich die eigenthümliche Form des Eys hervorbringt (XIII, 1. 2). Am mindesten unterscheidet sich das äüssere Integument vom inneren bei den Gramineen, einigen Aroïdeen (Pothos pentaphylla, Philodendron).

Dass die Mündung des äusseren Integumentes an der Bildung des Mikropylekanals sich betheiligt; dass das Endostom gleich dem Exostom

*) Schleiden, N.A.A.C.L.XIX, I Taf. III f.29.

bis auf einen engen Kanal sich schliesst, kommt unter den Monokotyledonen nur selten vor. Pistia Stratiotes (VII, 18. 19. 22), Pothos pentaphylla (IX, 3) sind die einzigen mir bekannt gewordenen derartigen Fälle. Wenn anderwärts das Längenwachsthum des äusseren Integuments dasjenige des inneren übersteigt, so bleibt doch das Exostom weit offen: so bei Orchis (IV, 15—17), Najas major (I, 17, *a*), Ruppia maritima (II, 3), Philodendron Imbe (VIII, 1), Arum ternatum (VII, 5), Caladium bicolor (VIII, 8), Calla palustris (VIII, 13), Secale cereale (XI, 1), Merendera caucasica (XV, 2. 7), Uvularia grandiflora (VII, 9), Crzackia Liliastrum (XX, 2), Allium odorans (XX, 8), Hymenocallis ovata (XXV, 1). Bei den meisten Monokotyledonen aber ragt zur Blüthezeit das Endostom frei aus dem Exostom hervor: so bei der grossen Mehrzahl der Liliaceen und Gräser, den Carices, bei Arum maculatum, orientale, divaricatum (VII, 1. 8), bei Zostera. Das Zurückbleiben der Längsentwickelung des äusseren Integuments hinter der des inneren ist in mehreren Fällen sehr bedeutend: so bei Symplocarpus foetida, wo die äussere Eyhülle nur als ein niedriger, den Grund der inneren umgebender Ringwulst erscheint (VIII, 4—6; der Saum des innern Integuments ist in vier dreieckige, zusammen neigende Lappen getheilt [f. 6], eine bei keiner anderen Pflanze bis jetzt beobachtete Beschaffenheit des Eymundes). In ähnlicher Weise unentwickelt ist das äussere Integument bei Epipactis,*) ferner bei Zea und Sorghum: der an der convexen Seite stärkeren Entwickelung des gebogenen Eyes widersprechend reicht das äussere Integument nur an der concaven Seite des Eys bis an den Saum des inneren; an der convexen Seite bedeckt es kaum die Hälfte des inneren.**) Dasselbe Verhältniss findet sich bei Triticum vulgare wieder, bis aufs Aeusserste gesteigert, insofern hier das äussere Integument nur an der concaven Seite des Eychens als kurze Schuppe entwickelt ist, auf der convexen Seite desselben aber völlig fehlt (XI, 13).

Abweichungen von der Zweizahl der Eyhüllen sind unter den Monokotyledonen höchst selten. Ein drittes, äusserstes Integument, schon

*) Meyen Pflanzenphysiol. III. Taf. XV f. 23; Schacht, Entw. Gesch. d. Pflanzenembryon Taf. V f. 19—21.

**) Schleiden N. A. A. C. L. Taf. XIX,I f. 19. 20; Hofmeister, Entst. d. Embryo Taf. XI f. 1. 21.

vor der Befruchtung beträchtlich entwickelt, aber erst während des Reifens des Saamens diesen vollständig überziehend (einen Arillus) besitzen die Eychen des Asphodelus luteus*) und creticus;**) einen langsamer sich entwickelnden, zur Blüthezeit nur eine niedrige Krause bildenden Arillus Aloë subtuberculata.***) — Als von nur einem Integument bekleidet betrachte ich die Eychen der Arten der Gattung Crinum. Der Embryosack von Crinum capense und Cr. asiaticum ist von einer aus 3—4 Zellenlagen bestehenden Gewebsschicht umhüllt, durch welche am Scheitelpunkte des gekrümmten Eyes ein enger Kanal auf das obere, die Keimbläschen einschliessende Ende des Embryosackes zuführt (XIV, 3. 4). Ich halte diesen engen Gang für den Mikropyle-Kanal, die den Embryosack umhüllende Gewebschicht für das einzige Integument des Eychens.†)

Das äussere Integument ist in der Regel der Chalaza-Region dicht unter dem inneren eingefügt. Die einzige unter den Monokotyledonen mir bekannt gewordene Abweichung bietet Allium, wo bei Allium odorans z. B. eine nach der Anlegung der Integumente, während der Beugung des Eykerns eintretende intercalare Vermehrung der in der Horizontalebene der Einfügung des inneren Integuments gelegenen Zellen die Vereinigungsstelle des Grundes dieses Integuments mit dem Eykern weit über die Ursprungsstelle des äusseren Integuments empor hebt (XIX, 7. 8).

Die Einfachheit des Baues von Eykern und Chalaza aus so wenigen Zellen, wie bei Orchis, erhält sich bei keiner der untersuchten anderen

---

*) Hofmeister Entst. d. Embryo Taf. VI f. 6. 7; Brongniart Ann. sc. nat. IV S. 2, Taf. I f. 6—8.

**) Payer Organogénie Taf. 136 f. 19; 19^{b}.

***) Brongniart a. a. O. Taf. I f. 12. 13.

†) Prillieux nimmt das Ey von Crinum für einen nackten, jeder Hülle entbehrenden Eykern (Ann. sc. nat. IV S. IX, 101.) Die frühesten Zustände, welche allein entscheidenden Aufschluss über den Bau dieser Eychen geben können, haben mir nicht zu Gebote gestanden. Eine Amaryllidee, die ich 1856 untersucht, deren Bestimmung ich damals versäumte und welche später zu Grunde ging (vermuthlich Brunswigia minor) hat anatrope Eychen, bei denen kein Zweifel über das Vorhandensein eines einzigen, sehr dicken, grün gefärbten Integuments, dessen Höhlung vom Embryosack völlig ausgefüllt wird, obwalten kann. — Aehnlich Amaryllis Belladonna, nur dass hier das einzige Integument dicht unter dem Scheitel des Eykerns entspringt (nach mündlicher Mittheilung Prof. A. Braun's); — ein Verhältniss, welches vielleicht als Uebergang zu dem bei Crinum obwaltenden zu betrachten ist.

monokotyledonen Pflanzen auf die Dauer. Aber überall, wo die frühesten Zustände untersucht wurden, erwies sich der junge Eykern zusammengesetzt aus einer axilen, kürzeren oder längeren Längsreihe von Zellen und einer (in einigen Fällen aus zweien, augenscheinlich aber durch Theilung der Zellen einer einfachen Zellschicht entstandenen) peripherischen Lage von Zellen. So bei Zostera marina;*) Canna Sellowii, Arum maculatum (VII, 11. 12); Pistia Stratiotes (VII, 18, *b*); Allium odorans (XIX, 7) Funkia coerulea, Crocus vernus (XXI, 12); Iris pumila (XXI, 2.3); Paris quadrifolia (XXV, 9). In der weiteren Entwickelung wird der Bau des Eykerns zusammengesetzter, zunächst durch die Theilung der peripherischen Zellen desselben, dann auch derer des axilen Stranges mit Ausnahme der einen, welche zum Embryosack sich zu entwickeln bestimmt ist, durch Längs- und Querwände. Der axile Zellstrang wird in zwei bis vier parallele Längsreihen von Zellen umgewandelt, indem die in seinen Zellen auftretenden Längswände der Achse des Eykerns parallel, die Querwände zu ihr rechtwinklig sind. Die Theilungswände der peripherischen Zellen sind um so stärker gegen die Achse des Eykerns geneigt, je weiter abwärts vom Scheitel und je weiter nach aussen die betreffenden Zellen sich befinden.

Die Theilungen der peripherischen Zellen wiederholen sich öfters; am lebhaftesten ist meistens die Zellvermehrung in einer, nahe über der Chalaza gelegenen Zone des Eykerns: von da gegen das Mikropyle-Ende hin nimmt ihre Intensität rasch, gegen die Chalaza hin langsamer ab. Der Eykern erhält so eine ausgeprägte Ey- oder Keulenform: so in der grossen Mehrzahl der Fälle. Cylinder- oder Kegelform desselben ist selten; bei Zostera, Arum (VII, 4. 6). Bei diesen schlanken Formen von Eykernen ist die Zellenvermehrung absolut am geringsten. Die Zahl der den axilen Strang umschliessenden peripherischen Schichten steigt nicht über zwei bei Zostera, Alisma Plantago (II, 26), Arum (VII, 6), Pistia (VII, 18), Pothos longifolia (IX. 7. 8), Bulbocodium vernum. Sie wächst im dicksten Theile des Eykerns auf vier bis sechs bei der Mehrzahl der Lilienartigen Gewächse (im weitesten Sinne), so bei Iris, Crocus (XXI, 4—6, 12—15), Triteleia uniflora (XX, 1), Gagea (XX, 2), Lilium, Tulipa, Fritillaria, Hippeastrum u. v. A. Am höchsten steigt sie bei den Gräsern.

*) Bot. Zeit. 1852, Taf. III, f. 19.

Die von allen diesen Theilungen ausgenommene Zelle des axilen Stranges, welche bestimmt ist zum Embryosacke heran zu wachsen, ist in allen beobachteten Fällen die oberste dieses Stranges. Ihre Lage wird aber häufig durch Vermehrungen der Zellen der sie umrindenden Schicht beträchtlich verschoben. Grosse Verschiedenheiten walten in dieser Beziehung selbst zwischen nahe verwandten Formen ob. Der Embryosack bleibt, wie bei den Orchideen, wenigstens vorerst unmittelbar unter der den Scheitel des Eykerns bildenden einfachen Schicht von Zellen seiner Aussenfläche gelegen, bei Zostera, Pistia Stratiotes (VII, 18, *b*), Arum maculatum (VII, 12), Allium odorans (XIX, 7). Er wird von zwei Zellschichten bedeckt bei Iris pumila (XXI, 3. 4), Veltheimia (XVIII, 1), Canna, Funkia, und wohl der Mehrzahl der Liliaceen; von dreien bei Crocus (XXI, 12), Hyacinthus,*) Najas major (I, 14. 19), Symplocarpus foetida (VIII, 5,*b*). Noch tiefer in das Gewebe des Eykerns versenkt wird er bei Ruppia maritima (II, 1, *b*), bei Potamogeton, Zannichellia, Calla palustris (VIII, 15), Triglochin maritimum (I, 26), bei den Gräsern, den Caricineen.

Diese Zellvermehrung in dem den Embryosack umhüllenden Gewebe hält eine Zeit lang Schritt mit dem Wachsthum desselben. Aber nicht auf die Dauer. In sehr vielen Fällen greift der Embryosack durch sein Ausdehnungsstreben schon geraume Zeit vor der Befruchtung zerstörend ein in das ihn einschliessende Parenchym des Eykerns; und auch bei denjenigen Monokotyledonen, wo bis zur Befruchtung eine solche theilweise oder vollständige Zerstörung des Zellgewebes des Eykerns nicht nachweislich ist, erfolgt sie während der Ausbildung des Embryo.

Die Massenzunahme des den Embryosack umhüllenden Gewebes giebt diesem den bis zur Befruchtung zu seiner Entwickelung nöthigen Raum vollständig bei Gräsern und Riedgräsern. Hier wird keine Erscheinung beobachtet, welche auf das Verdrängtwerden dem Embryosacke benachbarter Zellen hindeutete. Dasselbe gilt von Najas, Ruppia, Potamogeton, und von Paris quadrifolia. Im jungen Ey der letzteren ist der Embryosack seitlich und oben nur von einer einfachen Zellschicht umhüllt (XVII, 9. 10); diese Schicht wird während der Blüthezeit eine doppelte, endlich eine dreifache (XVII, 11—13). Dagegen verdrängt der

*) Hofmeister Entst. d. Embryo Taf. IV f. 1; VII, 1; XIV, 12.

Embryosack anderer Monokotyledonen, aufwärts, oder seitlich, oder in beiden Richtungen zugleich stärker sich entwickelnd, die ihn umhüllenden, aus der Vermehrung der ursprünglich einfachen Rindenschicht des Eykerns hervorgegangenen Zellen meist schon sehr früh. — Das untere Ende des Embryosacks bleibt allerwärts an diesen Wachsthumserscheinungen unbetheiligt. Wo Veränderungen seiner Lage zu anderen Theilen des Eyes vorkommen, sind sie passive; hervorgerufen durch die, gleichzeitig mit dem raschen Wachsthum des oberen Theiles des Embryosackes eintretende lebhafte Zellvermehrung nach allen drei Richtungen des Raumes hin, welche im unteren Theile des Eykerns der meisten Irideen (Iris, Gladiolus), vieler Liliaceen und Verwandten statt findet. Diese Zellvermehrung verwandelt die untere Hälfte des Eykerns zu einem Gewebe aus verhältnissmässig kleinen nahezu würfeligen Zellen, mit protoplasmareichem, in durchfallendem Lichte gelblich erscheinendem Inhalte. — Das Gewebe des Eykerns, welches das untere Ende des Embryosacks zunächst umgiebt, ist, wie bei vielen Dikotyledonen, auch bei den meisten Monokotyledonen durch bei durchscheinendem Lichte dunklere Färbung auffällig gekennzeichnet: eine Färbung, welche durch die Anwesenheit sehr zahlreicher, äusserst kleiner, mikroskopisch kaum unterscheidbarer, lufterfüllter Intercellularräume bedingt wird.

Die gewöhnlichste Form des Wachsthums des Embryosackes ist die, dass derselbe in die Länge und in seinem oberen Theile auch in die Breite sich dehnend, bis an die Innenseite der oberflächlichen Zellschicht des Eykerns vordringt. Der Scheitel des Sackes ist dann nur von einer einfachen Zellschicht bedeckt. Dieses Verhältniss darf als das typische bezeichnet werden für die Tulipeen, Asphodeleen, Bromeliaceen, Amaryllideen, Narcissineen, Irideen, Pontederiaceen, Commelyneen, Zingiberaceen. So ist z. B. im jungen, noch nicht völlig von den Integumenten überzogenen Eykern von Iris pumila der Embryosack, der noch früher die Terminalzelle der axilen Reihe darstellte (XXI, 2) von zwei Zellschichten bedeckt und umgeben (XXI, 3. 4), deren innere sein oberer Theil schon wieder verdrängt hat, wenn der Rand des inneren Integuments zum Endostom sich zusammen schliesst (XXI, 5). Aehnliche Beobachtungen liegen vor an Veltheimia (XVIII, 1. 3), Canna,*) Funkia.**) Der

*) Hofmeister Entst. d. Embryo Taf. IV f. 1—4.

**) Hofmeister ebend. Taf. VII f. 1—4.

Embryosack erhält in der Regel keulenförmige Gestalt. Nur in vereinzelten Fällen überwiegt sein Längenwachsthum so beträchtlich das in die Dicke, dass er Cylinderform erhält; und in diesen Fällen ist auch seine ganze Seitenfläche von nur einer einfachen Zellschicht bekleidet. Ein Beispiel ist Leucojum vernum (XIII, 13—15); annähernd ähnlich verhält sich der obere Theil des Embryosacks von Veltheimia viridiflora (XVIII, 3—9), insofern er wenigstens einseitig auch seitlich die inneren Zellschichten des Eykerns völlig verdrängt. Dieselbe Pflanze zeigt eine, unter den Monokotyledonen bisher nirgend weiter beobachtete, Wucherung des Embryosackes. Dieser treibt, dicht neben seinem Chalaza-Ende, einen tief in das Gewebe des Eykerns, parallel der Achse desselben eindringenden, blinddarmartigen Fortsatz, der bis zur Zeit der Befruchtung etwa zur Hälfte der Länge des Eykerns herabwächst (XVIII, 3, 3,*b*). — Anderwärts steigert sich jenes Wachsthum des Embryosackes bis zur völligen Verdrängung der ihn deckenden Zellschicht: so bei Hemerocallis (XXI, 1); ferner bei Crocus, Gladiolus und verwandten Formen, wie Montrichardia, Tritonia, Ixia u. A. Der Embryosack, bis dahin in derselben Weise wie bei Iris, Lilium u. v. A. im Gewebe des Eykerns eingeschlossen (XXI, 2—16), durchbricht die ihn umhüllende Zellenlage zunächst auf dem Scheitelpunkt der Kernwarze (XXI, 26, 26, *b*). Weiterhin werden auch die seitlich der Durchbruchstelle angränzenden Zellen durch den Druck des Embryosackes mehr und mehr abgeplattet (XXI, 22). Auf gelungenen Durchschnitten erkennt man deutlich, dass die Aussenwände dieser Zellschicht an der vom hervorwachsenden Embryosack durchbohrten Stelle zerrissen und zurück gekrümmt sind. Der Vorgang ist ähnlich dem Hervorbrechen des Embryosackes aus dem Gewebe des Eykerns vieler Gamopetalen.*) — Endlich verschwinden die comprimirten Zellen völlig der Beobachtung, die Embryosackhaut liegt der Innenfläche des inneren Integuments unmittelbar und dicht an (XXI, 21). Die Scheitelgegend des Embryosacks ist schliesslich dem Mikropylekanal fest eingepresst, weit in denselben hinaufreichend (XXI, 27. 28, XXII, 1); bei Ixia (XXIV, 10. 11), und nach Schachts Angaben zu schliessen bei Watsonia, selbst aus der Aussenmündung der Mikropyle noch hervorragend.

Die zweite, ziemlich verbreitete Wachsthumsform des Embryo-

*) Diese Abhandlungen, VI, 611.

sackes ist die Beschränkung der Ausdehnung seiner Haut auf die Seitenflächen. Diese verdrängen das ihnen angränzende Gewebe, wachsen dabei auch beträchtlich in die Länge. Das Parenchym der Kernwarze aber bleibt erhalten. Häufig vermehrt sich die Zahl dieser Zellen noch während der Verflüssigung der verschwindenden. Solche Embryosäcke haben meist eine sehr gestreckte, in vielen Fällen rein cylindrische Form, oder die eines schlanken, gestutzten Kegels. Die Verdrängung der seitlich dem Sacke angränzenden Zellen bleibt unvollständig, so dass eine Doppelschicht von Zellen seitlich den Sack umschliesst, während die Kernwarze ein massiges Gewebe bleibt bei Triglochin maritimum (I, 26), Symplocarpus foetida (VIII, 5, *b*), Rhodea japonica (VIII, 9). Die letztere Pflanze ist ausgezeichnet durch geringes Längenwachsthum der Seitenflächen des auch nach der Befruchtung noch breiteren als hohen Embryosackes. — Die seitliche Verdrängung ist nur am unteren Theile des Sackes vollständig; eine haubenförmige, convex-concave Zellgewebsmasse deckt dessen Scheitel bei Calla palustris (VIII, 13—16), Caladium bicolor (VIII, 8). Ganz vollständig dagegen wird sie, so dass nur über der nahezu oder völlig planen Scheitelfläche des Embryosackes das Gewebe der Kernwarze erhalten bleibt, bei der Mehrzahl der Aroïdeen: Lemna minor (II, 22), Pistia Stratiotes (VII, 20. 21), Arum maculatum (einer der Fälle, in welchen nachweislich eine bedeutende Vermehrung der Zellen der Kernwarze während des Verschwindens der seitlich dem Embryosack angränzenden Zellen des Eykerns vor sich geht [VII, 11. 12. 13]), Arum orientale, divaricatum und ternatum (VII, 3. 6—10), Philodendron Imbe (VIII, 3), Pothos pentaphylla und longifolia (VII, 3. 6—9). Ferner bei den Melanthaceen Merendera caucasica (XVII, 4—10), Bulbocodium vernum (XVII, 16. 17), Colchicum autumnale (XVII, 1—10), Uvularia grandiflora (XVI, 11—13); — endlich auch bei Allium: A. odorans (XIX, 8. 9). — Für Allium gilt, in Bezug auf die Vermehrung der Zellen der Kernwarze, das von Arum maculatum Gesagte (man vergleiche XIX, 7 mit 8). Während der Verdrängung der Nachbarzellen des Embryosackes durch diesen erscheinen die Zellmembranen des Sackes und der im Verschwinden begriffenen Zellen gelockert, von gallertartiger Weichheit mit Ausnahme der ihre volle Festigkeit behaltenden, die Oberfläche des Eykerns bildenden freien Aussenwände. In dem Zeitpunkte, zu welchem der Inhalt der Nachbarzellen unkenntlich geworden ist, füllt eine durchsichtige, ziemlich dünnflüssige, auf Zusatz

von Jodtinctur gelb und feinkörnig werdende Substanz den Raum zwischen jenen zu einer einfachen Membran verwandelten Aussenwänden, und der Umgränzung des Embryosackes: beobachtet bei Zostera marina, *) Pothos longifolia (IX, 7. 8), Merendera caucasica (XVI, 5. 6). Weiterhin legt sich die Haut des Embryosacks fest an die Aussenmembran des Eykerns, und verwächst erhärtend mit dieser, so dass auf etwas späteren Zuständen die mehr oder minder vollständige Trennung der Kernwarze von der Scheitelfläche des Embryosackes möglich ist (IX, 11. 13. 17; X, 4; XVI, 5).

Der Verdrängung des seitlich den Embryosack umhüllenden Gewebes des Eykernes folgt bei Zostera schliesslich auch die des Parenchyms der Kernwarze, so dass hier die Haut des oberen Theiles des Embryosackes, ähnlich wie bei Crocus, der Innenfläche des inneren Integuments auf allen Punkten unmittelbar anliegt. Der Hergang ist bei Zostera aber insofern ein anderer, als hier der Embryosack nicht aus der oberflächlichen Zellschicht des Eykerns hervorwuchs; seine Membran hat vielmehr einen doppelten Ursprung: die äussere Schicht besteht aus den erhaltenen freien Aussenwänden der im Uebrigen aufgelösten Epidermiszellen des Eykerns; nur die innere Schicht, die häufig noch unmittelbar vor, bisweilen selbst noch nach der Befruchtung mit der äusseren nur in der Scheitelgegend des Sackes verschmolzen erscheint, ist die eigene Membran desselben. Die sehr oft zu beobachtende Trennung beider Schichten auf weite Strecken hat zweifelsohne ihren Grund in dem beschleunigten Längenwachsthum der Mittelgegend der Inneren. — Es steht mit diesem Ursprung der äusseren Schicht in ursächlichem Zusammenhange, dass bei Betrachtung derselben von der Fläche die Gränzen der einst sie zusammensetzenden Epidermiszellen deutlich erkannt werden können.

Bildung von Tochterzellen (der Keimbläschen und ihren Gegenfüsslerinnen) im unbefruchteten Embryosacke.

Gleich allen Zellen von Gefässpflanzen besitzt der Embryosack einen primären, schon vor der Entstehung der Zelle gebildeten Kern, auf den jüngeren Entwickelungsstufen von im Verhältniss zum Zellraume sehr

*) Botan. Zeit. 1852, Taf. III f. 21—25.

beträchtlicher Grösse. Weit später als in anderen Zellen des Eychens tritt im Embryosacke die Sonderung des den Kern einschliessenden feinkörnigen Protoplasma, innerhalb dessen der Kern bei durchfallendem Lichte als hellere Kugel erscheint, in Wandbeleg und Vacuolen hervor. Die Anhäufung dickflüssigen Protoplasmas ist im jungen Embryosack sichtlich um Vieles beträchtlicher, als in seinen Nachbarzellen. Jene Sonderung wird in allen den beobachteten Fällen erst während der letzten, bedeutenden Grössenzunahme des Embryosackes deutlich: so bei Zostera, Orchis (III, 11), Arum (VII, 5—7), Allium (XIX, 7. 8), Iris (XXI, 5), Crocus (XXI, 12—15), Paris (XXV, 8—10). Soweit die Beobachtung reicht, tritt nur eine einzige Vacuole auf, die bei ihrem Sichtbarwerden etwa ein Drittel bis die Hälfte des Zellraumes einnehmend, während des ferneren Wachsthums des Sackes schneller und relativ bedeutender als dieser an Grösse zunimmt: der Wandbeleg aus Protoplasma wird immer dünner. Am mächtigsten bleibt er in der nächsten Umgebung des von ihm umhüllten und der Wand angedrückten, mehr und mehr linsenform annehmenden Zellkerns, und im oberen und unteren Ende des Sackes. Von diesen stärkeren Anhäufungen von Protoplasma aus verlaufen bandförmige dickere Plasmalagen über den Wandbeleg hin. In vielen, vielleicht allen Fällen ist zunächst nur ein einziger, aber breiter und dicker solcher Streifen vorhanden, welcher von dem, im oder nahe dem Aequator des Sackes der Wand anliegenden Zellkern und dessen beiden Enden hin sich erstreckt: Najas (I, 13), Arum (VII, 5. 7), Merendera (XV, 6), Bulbocodium (XVII, 16), Allium (XIX, 8, *b*), Crocus (XXI, 15), Paris (XXV, 9). Auf späteren Entwickelungsstufen erscheint dieser Protoplasmastreifen in mehrere, anastomosirende Aeste gespalten, die bei gewissen Arten, bei Aroïdeen z. B., fortwährend der Wand anliegen, in Formen mit stark erweiterten Embryosäcken aber von dem Wandbelege getrennt, in oder nahe der Längsachse des Embryosackes verlaufen: so u. A. bei Hyppeastrum aulicum (XIII, 3), Leucojum vernum (XIII, 17), Crocus vernus (XXI, 21), Veltheimia viridiflora (XVIII, 3. 5, *b*). Strömungserscheinungen werden an diesen Protoplasmabändern oder Strängen nur selten und vereinzelt beobachtet. Das nach der Präparation der Objecte rasch eindringende Wasser scheint diese Lebenserscheinungen schnell aufzuheben. Die deutlichsten, am längsten dauernden Bewegungen an den Protoplasmabändern hingleitender Körner sah ich bei Merendera caucasica und bei Arum maculatum.

Die Lage des primären Kernes ist im grösser gewachsenen Embryosacke auch bei der nämlichen Art keine bestimmte. Am häufigsten in der Aequatorialgegend des Sackes gelegen, ist er doch auch nicht selten einer der Extremitäten desselben, bald der oberen, bald der unteren, sehr genähert. So bei Orchis, Arum, Pothos, Crinum, Merendera, Crocus, Paris u. A.

Bald nach der Zeit, zu welcher die Hauptmasse des Protoplasma des Embryosackes zu vom Kerne ausstrahlenden Fäden sich zu ordnen begann, tritt die Bildung von Tochterzellen im Embryosacke ein. In der Ansammlung von Protoplasma, welche in der Scheitelwölbung des Embryosackes sich sammelt, bei vielen Arten auch in einer eben solchen Anhäufung im entgegengesetzten Ende, wird eine Anzahl, zwei bis drei, sehr selten mehrere, freier Zellkerne sichtbar; bei ihrem ersten Erscheinen abgeplattet kugelige, bläschenförmige Massen, deren Substanz in durchfallendem Lichte durchscheinender ist als das sie umschliessende Protoplasma; — fester Inhaltskörper (der Kernkörperchen) zunächst entbehrend. Ich beobachtete diese jüngsten Zustände der Kerne der Keimbläschen (ausser bei mehreren Dikotyledonen) bei Zostera marina, Orchis Morio (IV, 11, *a* *), Canna Sellowii, **) Iris pumila (XXI, 7. 8), Paris quadrifolia (XXV, 9), Funkia coerulea, Fritillaria imperialis, ***) Tulipa Gesneriana. Auf wenig weiter vorgerückten Entwickelungsstufen erscheint jeder solcher Kern von einer sphärischen, zunächst undeutlich (IV, 11, *b* Orchis Morio), bald aber schärfer begränzten Ansammlung dichteren Protoplasmas umgeben, deren äusserste Schicht, eine dünne Lage eines glasartig durchsichtigen, von eingemengten Körnchen völlig freien Stoffes, das Ansehen einer Membran erhält; der Wassereinwirkung aber nicht widersteht, sich aufbläht, endlich zerfliesst. Die Widerstandsfähigkeit dieser Aussenschicht gegen den Einfluss von Wasser nimmt mit vorrückendem Alter rasch zu. Die groben Körnchen der von ihr umschlossenen Protoplasmamasse verschwinden; im Innern dieser Masse tritt eine Vacuole auf, welche schnell an Umfang zunehmend das immer homogener werdende Protoplasma als einen dünnen, nur an der Stelle, wo der Zellenkern ihm eingebettet ist, mächtigeren Wandbeleg erscheinen lässt. Die Lagerung des Zellenkernes ist ziemlich ausnahmslos sehr

*) Entst. d. Embryo Taf. I f. 31. **) Ebend. Taf. IV f. 3. ***) Ebend. Taf. VII f. 3, Taf. VIII f. 4.

nahe dem zugerundeten unteren, in den Raum des Embryosacks herein ragenden Ende der inzwischen gestreckten, birnförmig gewordenen Zellen. Das obere, verjüngte Ende haftet, je nach den Arten verschieden, bald fester, bald loser, an der Innenfläche der Scheitelwölbung des Embryosackes. Diese Stufe der Entwickelung erreichen die Keimbläschen aller Monokotyledonen, wie der angiospermen Dikotyledonen überhaupt, noch vor dem Zeitpunkte der Befruchtung. In einigen Fällen geht aber die Ausbildung noch einen Schritt weiter, insofern die Hautschicht der Keimbläschen alle Eigenschaften einer festen Zellstoffhaut erhält. Unter den Monokotyledonen findet sich diese Erscheinung vorzugsweise bei den Formen, deren Keimbläschen schon im Spätherbste angelegt, im Zustande weit vorgerückter Ausbildung überwintern: Leucojum vernum, Crocus vernus; bei verschiedenen Individuen derselben Art indess in sehr verschiedenem Grade. Bei Crocus vernus beginnt die Bildung der Keimbläschen in dem noch ringsum, auch am Scheitel, vom Gewebe des Kerns eingeschlossenen Embryosacke Anfang Novembers vor der Blüthe. Sie ist Ende Decembers vollendet, lange bevor die Scheitelgegend des Embryosackes aus der Kernwarze hervorbricht. Die Keimbläschen erscheinen jetzt als völlig ausgebildete Zellen, in der Regel mit fester, meist zarter, bisweilen aber auch recht dicker Haut (XXI, 16—27), von welcher der Inhalt durch ihn zusammenziehende Reagentien abgelöst werden kann (XXI, 17—19. 23. 24). Bei Verletzung und Entleerung der Keimbläschen wirft deren Zellhaut nicht selten deutliche Falten (XXI, 16, 16.*b*). Zur Blüthezeit, unmittelbar vor der Befruchtung, ist die Membran der Keimbläschen von Crocus in der Regel wieder erweicht, gegen in den angeschnittenen Embryosack eindringendes Wasser minder widerstandsfähig, bisweilen völlig in demselben zerfliessend. Doch sind die Fälle nicht selten, in welchen sie auch noch zu dieser Zeit als elastische, von dem contrahirten Inhalt scharf unterschiedene Haut nachgewiesen werden kann (XXI, 27).*)

*) Es wird kaum der Bemerkung bedürfen, dass es bei Freilegung der Spitze des unbefruchteten Embryosackes einer grossen Zartheit der Manipulation bedarf, um die immerhin dünne Haut der Keimbläschen nicht zu zerreissen und zu zerstören; die grosse Dünne der Haut macht zu ihrer Erkennung die besten optischen Hülfsmittel nothwendig. Die negativen Resultate, zu welchen Schacht bei seinen Untersuchungen über die Existenz der schon früher (Pringsheims Jahrbb. I, 162) von mir angegebenen

Schon die Unstetigkeit des Grades der Festigkeit der Keimbläschenmembranen von Crocus ist ein Beweis gegen die Ansicht, welche der Abwesenheit oder dem Dasein einer elastischen Haut der zu befruchtenden Zelle eine entscheidende Rolle beim Befruchtungsakt einräumen will.

Die Keimbläschen mit derber, elastischer Haut haften fest an der Innenfläche der Scheitelwölbung des Embryosackes: so namentlich die von Crocus. Anders die, deren Membran dem Wasser minder widersteht. Bei solchen ereignet es sich sehr häufig, dass das Keimbläschen, durch Einsaugen während der Präparation in den Embryosack eingedrungenen Wassers sich vergrössernd und der Kugelform sich nähernd, ihre Ansatzflächen an die Innenwand des Embryosackes in die Kugelform hineinziehen, dadurch von der Haut des Sackes sich lösen und frei in dessen Innenraum hineintreten, wo sie dann völlige Kugelform annehmen. Beobachtet unter Monokotyledonen bei Zostera marina, Coïx Lacryma (XII, 12, *b. c*), Arum ternatum, divaricatum, Calla palustris, Canna Sellowii,*) Hippeastrum aulicum, Hyacinthus orientalis,**) Asphodelus luteus, ***) Funkia coerulea,†) Allium odorans (XIX, 8, *b. c. d*), Paris quadrifolia, Scheuchzeria palustris, Iris pumila††) u. A.

Wie meine neueren Untersuchungen die Zweizahl der Keimbläschen als den unter den Phanerogamen überhaupt häufigeren Fall herausgestellt haben, so ist sie es auch bei den Monokotyledonen. Unter den Najadeen, Gräsern, Cyperaceen, Aroïdeen, Melanthaceen wird sie nur selten überschritten. Die Dreizahl der Keimbläschen kommt etwas häufiger vor bei Orchideen (doch waltet auch bei Orchis Morio z. B. die Zweizahl entschieden vor; man vergleiche Taf. VI); bei Liliaceen und Amaryllideen. Die Eychen ein und desselben Fruchtknotens oder Blüthenstandes verhalten sich hierin verschieden; immer aber ist die Mehrzahl mit nur zwei Keimbläschen versehen. Mehr als drei Keimbläschen sind bis jetzt unter den Monokotyledonen von mir nur bei polyembryonen Arten beobachtet: bei Funkia coerulea und Hymenocallis caribaea. Und auch von der Letzteren gilt, was ich früher von der ersteren erwähnte: †††)

elastischen Haut der Keimbläschen von Crocus gelangte (Flora 1858, 565) mögen aus dem eben Erwähnten sich erklären.

*) Entst. d. Embryo Taf. IV f. 5, 6. **) Ebend. Taf. VI f. 2. ***) Ebend. Taf. VI f. 8—10.

†) Ebend. Taf. VII f. 6. ††) Ebend. Taf. X f. 5. 5, *b*. †††) Entst. d. Embryo S. 16.

in der Mehrzahl unbefruchteter Eychen werden nur zwei bis drei Keimbläschen gefunden.*)

Soweit meine Beobachtungen reichen, nimmt stets nur eines der Keimbläschen den Scheitelpunkt der obern Wölbung des Embryosackes ein. Das zweite, oder das zweite und dritte sind zwar dicht neben diesem, aber doch etwas tiefer mit ihren oberen Enden der Innenwand des Sackes angeschmiegt. Das oberste, den Scheitelpunkt des Embryosackes berührende Keimbläschen entwickelt sich niemals (polyembryone Formen ausgenommen) nach der Befruchtung zu einem Embryo.**)

Die vor dem Hervorbrechen des Embryosackscheitels angelegten Keimbläschen von Crocus nehmen an dem Spitzenwachsthum der Embryosackhaut, an deren Eindringen in den Mikropylekanal (S. 666) insoweit Theil, als ihre Ansatzfläche an der Innenwand des Sackes mit der Innenöffnung des Mikropylekanals correspondirt. Gewöhnlich ist es demnach nur das oberste, oder wenn drei Keimbläschen vorhanden, die beiden obersten Keimbläschen, deren obere, von der Embryosackhaut überzogene Enden in den Mikropylekanal eine Strecke weit hineinwachsen. Sie modelliren sich dabei nach dessen zusammengedrückter Form, von vorn und hinten her sich abplattend (XXI, 21. 25. 27, XXII, 15 *a. b*). Selten nimmt auch das unterste, zur Hervorbringung eines Embryo bestimmte Keimbläschen an diesem Wachsthume Theil (XXI, 24, XXII, 28). Die Haut der Scheitelgegend des Embryosackes, welche die in den Mikropylekanal hineinragenden oberen Enden der Keimbläschen bekleidet, ist auf den frühesten Entwickelungsstufen dieses Wachsthums sehr deutlich als Fortsetzung des derben mittleren Theiles der Membran des Sackes kenntlich (XXI, 17—20. 22. 23); späterhin, bei mit zunehmender Flächenausdehnung abnehmender Dicke der Haut des Embryosackes sowohl als der in den Mikropylekanal hinein sich streckenden Keimbläschen wird das Verhältniss minder klar. — Bei dem Längenwachsthum des Embryosackscheitels und der innen ihm anhaftenden Keimbläschen findet die Ausdehnung der Membran, übereinstimmend mit allen anderwärts

*) Tulasne beobachtete bis zu fünf Keimbläschen bei polyembryonischen dem Nothos cordon fragrans (Ann. sc. nat. IV S. IV, 994).

**) Dieser, schon vor Jahren von mir ausgesprochene Satz (Flora 1855, 259) hat auch seither durch die späteren Untersuchungen meiner selbst sowohl, als auch durch die Radlkofers nur Bestätigung erhalten (Radlkofer Befruchtung der Phanerog., Lpz. 1856, 17 ff.).

bekannten Erscheinungen, nur an den Stellen statt, welchen von innen her Zelleninhalt angränzt; nicht aber da, wo eine zur Embryosackhaut rechtwinklige oder spitzwinklige Zellwand an die Innenfläche jener stösst. Die Zunahme der Fläche der Embryosackmembran unterbleibt an den Berührungskanten derselben mit den Seitenwandungen des Keimbläschen. Wo die oberen Enden zweier Keimbläschen gleichzeitig dem Wachsthum des Embryosackscheitels in den Mikropylekanal hinein folgen, da füllt jedes Keimbläschen eine besondere Ausstülpung der dünnen Embryosackhaut (XXI, 24. 26, *b*).

Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass in ähnlicher Weise wie bei Crocus die Entwickelung des Embryosackscheitels und der oberen Keimbläschen nicht allein von Gladiolus, Tritonia und Verwandten, sondern auch die von Watsonia und Ixia erfolgt. Bei diesen letzteren Gattungen ist jenes Längenwachsthum (wie Schacht zuerst für Watsonia gezeigt hat*) so sehr gesteigert, dass die oberen Enden der Keimbläschen eine Strecke weit aus der Mikropyle hervorragen (XXIV, 10. 11).

Es trägt sich oft zu, dass noch vor der Ankunft des Pollenschlauchendes am Embryosacke die Keimbläschen bis auf Eines wieder aufgelöst werden. Das sich erhaltende ist stets das unterste, neben und über dem die verschrumpften Reste der zu Grunde gegangenen als grumöse, meist der Kugelform genäherte Massen, selten formlos wolkig sich finden. Diese Erscheinung ist bei vielen Arten häufig, doch nie ausnahmslose Regel. Beobachtet wurde sie bei Zostera marina (nur selten), Ruppia maritima (II, 2, *b*), Arum divaricatum, maculatum (VII, 9. 13), Calla palustris (VIII, 14), Secale cereale (XI, 3), Hordeum vulgare (XII, 1), Sorghum halepense (nur ganz ausnahmsweise XII, 8), Canna Sellowii,**) Hyacinthus orientalis,***) Asphodelus luteus,†) Funkia coerulea,††) Uvularia grandiflora (XVI, 11—13), Allium odorans (XIX, 8), Gagea lutea (XX, 2), Iris sibirica.†††) Anderwärts erhalten sich das oder

*) Pringsheims Jahrbücher I, 193. Schacht nimmt an, der Scheitel des Embryosacks sei durchbohrt, und die Keimbläschen ragten aus der Oeffnung hervor. Selbst bei Ixia, geschweige denn bei Gladiolus und Crocus, finde ich keine Erscheinungen, die auf ein solches Verhältniss hindeuteten. Die Unmöglichkeit des allgemeinen Vorkommens desselben geht aus der oben (S. 672) erwähnten Ablösbarkeit vieler Keimbläschen von der Innenfläche des Embryosackes schlagend hervor.

) Entst. d. Embryo Taf. IV f. 6. *) Ebend. VI, 2.

†) Ebend. VI, 10. ††) Ebend. VII, 6. 9. †††) Ebend. X, 25.

die oberen Keimbläschen ausnahmslos bis zu der Befruchtung: so bei Crocus vernus (XXI, 16—28), Leucojum vernum (XIII, 14. 15), Merendera caucasica (XV, 4—9), Bulbocodium vernum (XVII, 46. 47), Veltheimia viridiflora (XVIII, 2—4), Puschkinia scilloïdes (XX, 10. 11). Aber auch in diesen Fällen pflegt der Inhalt des zum Fehlschlagen bestimmten, oberen Keimbläschens eine abweichende Beschaffenheit anzunehmen. Die Sonderung in protoplasmatischen Wandbeleg und grosse centrale Vacuole wird aufgehoben; der Zellenkern verschwindet; zahlreiche, unregelmässig gestaltete Körnchen sind durch den ganzen Innenraum der Zelle, oder doch des erweiterten, zugerundeten unteren Endes vertheilt (z. B. XIII, 14—19; XV, 5. 8; XVII, 2; XX, 11; XXI, 27; XXII, 1 ff.; XXIII, 1 ff.)

Die mit ungewöhnlichem Längenwachsthum begabten jungfräulichen Keimbläschen mehrerer Monokotyledonen erhalten in dem der Befruchtung kurz vorhergehenden Zeitraume eine eigenthümliche Beschaffenheit des Inhalts ihres oberen Theiles. Am Extremsten ausgebildet die von Watsonia: das Innere des cylindrischen, durch den Mikropylekanal sich erstreckenden und aus diesem hervorragenden Theiles ist, wie Schacht darlegte,*) »mit faserig-körnigem Inhalt erfüllt, in welchem eine ganz bestimmte Anordnung vom Umkreis abwärts zur Mitte verlaufender Stränge unverkennbar ist. Dieser Inhalt zieht sich bei Behandlung mit Chlorcalcium nicht, wie das Protoplasma im Allgemeinen, unregelmässig zusammen; er behält vielmehr seine faserige Structur; auch wird die Anordnung der scheinbaren Fäden dadurch nicht verändert, wobei nur selten eine dieselben umgebende Membran deutlich sich abhebt. Jod und Schwefelsäure färben die dunkeln körnigen Streifen braungelb, die helleren Fäden zwischen ihnen hellblau.« — Sehr ähnliche Verhältnisse zeigt der aus der Mikropyle hervorragende Theil der Keimbläschen von Ixia rosea. Glashelle Fäden, welche durch Quetschung sich breit drücken lassen, strahlen anastomosirend von der Längsachse der Keimbläschen-Fortsätze aufwärts und auswärts nach der ziemlich dicken Zellhaut. Mit Jod und Schwefelsäure färben sich diese Fäden blassblau, das ihre Zwischenräume erfüllende Protoplasma braungelb. Bei Zusatz von Chlorcalcium- oder Glycerinlösung zieht sich der ganze Inhalt der Hervorragungen, die Fäden eingeschlossen, von der innerseits glatten Zellhaut

*) Pringsheim's Jahrbücher I, 194 ff.

einseitig oder allseitig zurück (XXIV, 11). — Anderwärts finde ich kaum mehr als Andeutungen einer ähnlichen Anordnung des Inhalts. Bei Puschkinia scilloïdes (XX, 10), Leucojum vernum (XIII, 18) zeigt der Inhalt des oberen Endes des eben befruchteten Keimbläschens einen längsstreifigen Bau, aber nur nach Contraction des Zelleninhaltes; nie während der unveränderten Anordnung desselben. Ebenso verhält sich Gladiolus communis. Bei Crocus vernus ist nur selten, und nur in abortirenden Keimbläschen eine Spur davon wahrzunehmen. Die Aehnlichkeit dieses Vorkommens in seiner grössten Ausbildung, bei Watsonia und Ixia, mit den von Schacht in den Ausstülpungen des Embryosackes von Pedicularis aufgefundenen Netzwerk von Zellstoffbalken liegt offen zu Tage.*) Wie dort, sind es auch bei den Monokotyledonen unwesentliche, weiterer Entwickelung nicht fähige Theile der Zelle, in welchen die Bildung auftritt.**)

Die Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen, in der nämlichen Weise wie diese durch Zellbildung um Kerne entstanden, welche frei in der Anhäufung von Protoplasma des Chalaza-Endes des Embryosackes auftraten, werden — wenn überhaupt — früher ausgebildet, als die Keimbläschen. Sie sind bereits völlig entwickelte Zellen zu einer Zeit, wo die Keimbläschen nur als schlecht begränzte Ballen von Protoplasma erscheinen, wo selbst um die Kerne derselben noch kein Protoplasma sich geballt hat; so bei Zostera marina; Crocus vernus, Iris pumila. Häufig sind sie zur Zeit der Befruchtung von einer messbar dicken sehr festen Zellstoffhaut umschlossen, während die Membran der Keimbläschen um Vieles zarter und weicher ist: so bei Crocus vernus; in minderem Grade bei Leucojum vernum, Crinum capense und anderwärts. Ihre Anzahl, selbst ihr Dasein sind unstät; Abweichungen finden sich nicht nur bei nahe verwandten Arten, sondern auch bei Individuen einer und derselben Art. Die Einzahl kann als Regel bezeichnet werden für Najas major (I, 13. 14. 16.

*) Beiträge zur Anatomie etc. Berlin 1854, 259. Aehnliche Bildungen, zum Theil verschieden, habe ich auch bei Veronica und bei Plantago nachgewiesen (diese Abhandlungen VI, 620, 623).

**) Indem Schacht die mit Jod sich bläulich färbenden Fäden im oberen Theile der gestreckten Keimbläschen von Watsonia mit dem Gebilde zusammenstellt, welches er bei Gladiolus, Crocus und anderwärts mit dem Namen der Befruchtungsfäden, späterhin mit dem des Fadenapparats belegte, vermengt er zwei wesentlich verschiedene Dinge, wie das Nachfolgende darthun wird.

18. 19), Hippeastrum aulicum (X, 3), Bonapartea juncea (XX, 8); die Dreizahl für Leucojum vernum (XII, 14. 15). Allium odorans (XX, 8.9.), Gloriosa superba (XX, 5), Crocus vernus (XXI, 15. 21), Ixia rosea (XXIV, 10), Narcissus poëticus und Jonquilla (XXV, 14). Drei, bisweilen aber auch nur zwei Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen zeigen ferner Crinum variabile und capense (XIV, 1. 3. 11), Tradescantia virginica (XXIV, 18), Symplocarpus foetida (VIII, 5), Pothos longifolia (IX, 6—8), Puja chilensis (XXV, 22), Uvularia grandiflora (XVI, 12. 13), Bulbocodium vernum (XVII, 16. 17). Ihre Zahl ist höher, sechs bis zwölf, bei den Triticeen: Secale cereale (XI, 2. 3), Elymus arenarius (XI, 17), Hordeum vulgare (XII, 1). Die Gegenfüsslerzellen, meist zu zweien oder dreien vorhanden, werden in einzelnen Fällen völlig vermisst bei Merendera caucasica (XV, 4—8), Zostera marina, Paris quadrifolia (XXV, 10. 11), Arum orientale, maculatum, divaricatum, ternatum (VII, 6—9. 13. 14), Carex arenaria, panicea (XII, 13. 15. 16). Sie fehlen in der Regel, sind nur ausnahmsweise vorhanden bei den Orchideen: z. B. Orchis Morio (IV, 11—14). Bei nachgenannten wurden sie in keinem der zahlreichen untersuchten Embryosäcke bemerkt: Ruppia maritima (II, 1—3), Potamogeton crispus (II, 18), Alisma Plantago (II, 20. 21), Zea Mays, Sorghum halepense (XII, 7—10), Coix Lacryma (XII, 12), Veltheimia viridiflora (XVIII, 3), Hymenocallis caribaea (XXV, 1), Scheuchzeria palustris (XXV, 18. 19). — In der grossen Mehrzahl der Fälle sind sie dem Chalaza-Ende des Embryosackes fest angezwängt. Nur in einzelnen Eychen des Narcissus Jonquilla sah ich sie seitwärts von dieser Extremität des Sackes der Wand des flachen unteren Theiles desselben anhaften (XXV, 14).

Bei einigen Monokotyledonen findet sich, kurze Zeit nach Ausbildung der Keimbläschen, an der Lagerstätte des primären Kerns des Embryosackes ein ziemlich grosses, oft den Mittelraum des Sackes völlig ausfüllendes, bläschenförmiges Gebilde, mit mehr oder minder fester Haut; bald mit wasserhellem Inhalt, bald einen Körper einschliessend, welcher völlig das Aussehen des primären Kernes des Sackes hat, bald mehrere Zellkerne enthaltend. Man wird die Erscheinung kaum anders deuten können, denn als die Bildung einer freien Zelle um den primären Kern. Beobachtet ist sie bei Asphodelus luteus, unbeständig,*) Funkia coerulea,**)

*) Entst. d. Embryo Taf. VI f. 11. **) Ebend. Taf. VII f. 8—10.

Fritillaria imperialis,*) Tulipa Gesneriana, Gagea lutea,**) Iris pumila,***) Scheuchzeria palustris (XXV, 17. 19). Insofern bei mehreren der Genannten, namentlich bei Fritillaria und Tulipa, die Umgränzung des blasenförmigen Gebildes schon geraume Zeit vor der Befruchtung undeutlich, seine Membran weich und zerfliesslich wird, schliesst sich an dieses Vorkommen die unter den Monokotyledonen häufige, an Dikotyledonen noch nirgends mit Sicherheit beobachtete Erscheinung der Auflösung des primären Kerns noch vor der Befruchtung an, der das Auftreten kleinerer, secundärer Kerne zu folgen pflegt: Zostera marina, Pothos longifolia (IX, 7. 9), Sorghum halepense (XII, 8), Allium odorans (XIX, 8,*b*), Gagea lutea (XX, 2), Gloriosa superba (XX, 5), Tradescantia virginica (XXIV, 18), Asphodelus luteus,†) Hemerocallis flava,††) Zea Mays.†††)

Das Vorhandensein anderer bestimmt geformter Inhaltsgebilde des unbefruchteten Embryosackes von Monokotyledonen ist selten; es beschränkt sich auf das Auftreten von Amylum. Beobachtet bei Merendera caucasica, wo dem Protoplasma des, auch die Keimbläschen überziehenden, Wandbeleges und der vom Kern ausgehenden Plasmastränge anfangs wenige grössere, später sehr zahlreiche, fast unmessbar kleine Amylumkörnchen in grosser Zahl eingelagert sind, welche diesen Theilen, im auffallenden Lichte betrachtet, das Aussehen geben als wären sie aus Silber ciselirt (XV, 5—8); ferner bei Pothos longifolia (IX, 7.8), Iris pumila (nur auf den früheren Zuständen des Embryosackes ist Amylum vorhanden, später verschwunden XX, 6. 8). Die den Genannten nahe verwandten Bulbocodium vernum, Pothos pentaphylla, Crocus vernus zeigen auf keiner Entwickelungsstufe des Embryosackes Amylum in dessen Innern. Dagegen ist das Vorkommen von Amylum in den Nachbarzellen des jungen Embryosackes sehr häufig, fast Regel: so z. B. bei Crocus vernus (XXI, 13). In den Zellen der Kernwarze erhält es sich bis nach der Befruchtung bei Merendera caucasica, doch mit abnehmender Zahl der Körnchen, bis nach der Befruchtung (XVI, 8—19). Ebenso bei Colchicum autumnale (XVIII, 1—8), während es bei Pothos longifolia auch hier schon vor der Befruchtung verschwindet (IX, 9), bei Bulbocodium vernum noch früher vermisst wird (XVII, 16. 17).

*) Entst. d. Embryo Taf. VIII f. 4—9. **) Ebend. IX, 4. 5. ***) Ebend. X, 3.
†) Ebend. VI, 10. ††) Ebend. VI, 16. †††) Ebend. XI, 4. 6.

Die Membran des Embryosackscheitels erhält bei mehreren Monokotyledonen nach Ausbildung der Keimbläschen eine eigenthümliche Beschaffenheit: sie erscheint durch nach aussen vorspringende, schwach wellige Leisten verdickt. Diese Leisten sind Längsleisten bei Sorghum halepense (XII, 7. 9. 10), Crocus vernus (XXI, 24. 26. 27; XXI u. XXIII), Gladiolus communis (XXIV, 9), Tritonia crocata (XXIV, 12); — Querleisten bei Ixia rosea (XXIV, 11). Bei letzterer Pflanze erscheinen die kurzen Leisten sehr deutlich als örtliche Verdickungen der äussersten, fein gekörnelten Schicht der Haut; bei den anderen Genannten ist dieses Verhältniss minder hervortretend, bei Crocus vernus in einzelnen Fällen indess ebenfalls sehr kenntlich, namentlich in denjenigen, wo das Mikropyle-Ende des Embryosackes besonders steil keilförmig zugeschärft ist, und in Folge dieses Umstandes die äussere Schicht der Haut auf der Schneide die innere eine Strecke weit überragt (XXIII, 15), oder wo es gelang, die äusserste, gestreifte und gekörnelte Schicht in grösseren, unzerrissenen Fetzen von der darunterliegenden abzulösen (XXI, 27). Die untere Schicht erscheint dann an ihrer Aussenfläche völlig glatt. Die Anordnung der Längsstreifen ist stets eine gegen den höchsten Punkt des Embryosackscheitels convergirende. Hat dieser, wie bei Crocus und Gladiolus nicht selten, zwei gipfelständige Hervorragungen, deren jede vom oberen Theile eines Keimbläschens ausgefüllt wird, so trägt jede dieser Hervorragungen ein System von Streifen (XXI, 24. 26, *b*, XXIV, 10. 28. 32). Wo dagegen das Mikropyle-Ende des Embryosackes in eine einzige Spitze ausgeht, da ist keine Beziehung in der Anordnung der Längsstreifen zu den, innen der Embryosackhaut anhaftenden Keimbläschen zu erkennen. Die Streifen verlaufen, ununterbrochen, über die Ansatzflächen beider Keimbläschen bei Sorghum halepense (XII, 7. 9. 10); sie reichen sehr häufig, fast in der Regel, nicht bis zur Ansatzfläche des unteren, zum Befruchtetwerden bestimmten herab bei Crocus vernus (Mehrzahl der Abbildungen der Tafeln XXI, XXII u. XXIII), Gladiolus communis (XXIV, 9), Tritonia crocata (XXIV, 12). Ihre Entwickelung ist in verschiedenen Eychen derselben Art, oft desselben Fruchtknotens, eine sehr verschiedene. (Man vergleiche z. B. XXI, 8. 17; XXIV, 3 mit XXII, 28. 32; XXIII, 24). Gegen Reagentien und gegen polarisirtes Licht verhält sich die streifenförmige Leisten tragende Membran wie eine Cuticula. In Chlorzinkjodlösung färbt sie sich entschieden braungelb, während bei Crocus vernus häufig, nicht immer, die unter ihr liegende Mem-

branschicht eine bläulich-rothe Farbe annimmt. Stärker noch tritt dieser Unterschied bei Behandlung mit Jod und Schwefelsäure hervor, welch letztere auch bei bedeutender Concentration die gestreifte Schicht kaum angreift. Nach Einschaltung einer Gypsplatte in den Polarisationsapparat erscheint der optische Querschnitt der gestreiften Schicht der Embryosackhaut (ebenso wie der des Pollenschlauches) in der complementären Färbung von den, in der Lage ihnen entsprechenden übrigen Theilen der Membranen des Embryosackes und der Keimbläschen. Eine schlagende Aehnlichkeit mit der Cuticula der Narbenpapillen zeigt die streifige Schicht ferner in ihrem, weiterhin zu besprechenden, Verhalten zum Pollenschlauche. Sie ist also als Cuticula des Embryosackes zu betrachten, als schwache Andeutung des Gebildes, welches bei Coniferen als körnige, äussere Schicht der Membran den Embryosack vollständig überkleidet, und bei den, dem Embryosack morphologisch gleichwerthigen Sporen der höheren Kryptogamen in stärkster Entwickelung auftritt.*)

Vielen Phanerogamen, auch vielen Monokotyledonen, fehlt jede Andeutung derartiger Bildung. Der Gipfel des freigelegten Embryosackes von Zostera marina, Veltheimia viridiflora, Puschkinia scilloïdes (XIX, 2. 3. 6. 10. 11; XX, 10. 11) erscheint auch bei Anwendung der besten Mikroskope als völlig homogene Membran. Bei Orchideen ist keine Spur jener Organisation wahrzunehmen, während doch unsere optischen Hülfsmittel die Erkennung anderer fernerer Einzelnheiten der Embryosackspitze gestatten (IV, 12—14).

Diese Cuticula des Embryosackscheitels von Gladiolus, Crocus, Zea u. A. ist es, welche Schacht als einen integrirenden Theil der aus einer Scheitelöffnung des Embryosackes hervorragenden Keimbläschen auffasst, und mit dem Namen des Fadenapparates belegt.**) Dass der »Fadenapparat« den Keimbläschen angehöre, widerlegt sich sofort durch die Ablöslichkeit der unbefruchteten von der Innenwand des Embryo-

*) Aus einem bisweilen eintretenden Lagenverhältniss dieser Schicht zum Pollenschlauchende glaubte ich früher die Vermuthung folgern zu müssen, dass sie von den Zellen der Innenfläche des inneren Integuments secernirt werde (Pringsheim Jahrb. 1. 162). Ich übersah dabei, dass schon damals die analoge Bildung am Embryosacke von Sorghum mir bekannt war (a. a. O. 154), der im Parenchym des Eykerns eingeschlossen ist.

**) Bot. Zeit. 1858, 21; Pringsheim Jahrb. 1, 196 ff.; Flora 1858, 563. Eine frühere Ansicht Schachts, welche in einigen Punkten von seiner letzten abwich (Monatsb. berliner Akad. 1856, Mai) übergehe ich, als von ihrem Urheber modifizirt.

sackes (oben S. 672). Von einer Oeffnung des Embryosack-Gipfels ist in der Natur nirgends, und auch in Schachts eigenen Abbildungen kaum irgendwo etwas zu sehen. Die Behauptung, dass die Keimbläschen aus dem Embryosack hervorragten, entbehrt der Grundlage. Dass der obere Theil der Keimbläschen nicht aus Fäden besteht, wie Schacht behauptet, sondern dass nur die Aussenseite der für die oberen Enden der Keimbläschen und Embryosackspitze anscheinend gemeinsamen Membran-Leisten in Form von Längsstreifen trägt, kann keinen Augenblick zweifelhaft sein, wenn die Beobachtung den Inhalt und die Membran streng sondert. Dass dies von Schacht nicht geschah, erwähnte ich bereits (S. 676). Er begreift unter seinen »Fadenapparat« *auch* die fadenförmigen Stränge *im Innern* der Keimbläschen von Gladiolus, Watsonia; wesentlich von der Cuticula verschiedene Dinge, die bei Ixia, und wie mir scheint auch bei Watsonia, zugleich mit einer, der von Crocus und Gladiolus analogen, wenn auch etwas anders gebildeten Cuticula vorkommen.

Schachts Ansicht von der Bedeutung seines »Fadenapparats« für den Befruchtungsakt richtet sich selbst. Schacht hat dafür, dass dieser »Apparat« bei der Befruchtung überhaupt irgendwelche Rolle spiele, nichts anzuführen, als sein häufiges Vorkommen. Die schlagendsten Thatsachen, zum Theil eigene Beobachtungen Schachts sprechen aber *gegen* seine Hypothese. Der befruchtende Pollenschlauch braucht nicht mit den Ansatzflächen der Keimbläschen in Berührung zu kommen, um die Entwickelung des Embryo anzuregen. Die Berührungsstelle des Pollenschlauchendes fällt sogar in der Regel *nicht* mit der Ansatzfläche eines der Keimbläschen zusammen. Das ist eine durch meine, Tulasne's und Radlkofer's übereinstimmenden zahlreichen Beobachtungen ausser allem Zweifel gestellte Thatsache. Dagegen darf behauptet werden, dass die Berührung des Pollenschlauches mit dem Fadenapparate Schachts, also mit dem von einer Cuticularschicht bekleideten Ende des Embryosackes sowohl, als mit dem Theile desselben, welcher durch den von fadenförmigen Strängen durchzogenen Theil der Keimbläschen von Watsonia ausgefüllt wird, *nicht* genügt um die Befruchtung zu bewirken. Warum hält bei Watsonia der befruchtende Pollenschlauch in seinem Wachsthum nicht inne, wenn er das obere Ende des Embryosackes und der Keimbläschen erreicht hat? Warum drängt er sich durch den langen Mikropylekanal bis zu der Stelle herab, wo der Embryosack plötzlich sich

erweitert?*) Ebenso bei Crocus, Gladiolus ohne Ausnahme. Der »Fadenapparat« fehlt endlich so gut wie in der Regel bei Crocus der Stelle des Embryosackes, an welcher innen das zu befruchtende Keimbläschen schon vor der Befruchtung haftet. Schacht bestreitet das;**) die Taf. XX, f. 21. 25—27 abgebildeten Präparate (die Herstellung ähnlicher hat keine besondere Schwierigkeiten) mögen zu seiner Widerlegung genügen. Um das auch von Schacht erkannte, ganz sicher stehende Faktum zu erklären, dass nach der Ankunft des Pollenschlauches am Embryosacke eines der Keimbläschen, und zwar das zum Embryo sich entwickelnde, tiefer an der Innenwand des Embryosackes hafte, als das oder die anderen, bedarf Jener der, leitender Thatsachen völlig baren Hypothese, dass eines der Keimbläschen nach der Befruchtung tiefer herabtrete, vom Fadenapparat sich trennend, der kaum noch kenntlich sei. Kaum noch kenntlich! Weder in der Natur, noch an Schachts eigenen Abbildungen ist der »Fadenapparat« des »herabgetretenen« Keimbläschens irgendwo zu bemerken.

Eintreffen des Pollenschlauchendes am Embryosacke; sein Verhalten daselbst.

So beträchtliche, zwischen wenigen Stunden und mehreren Monaten schwankende Unterschiede der Zeit, in welcher die Pollenschläuche den Weg von der Narbe bis zu den Mikropylen der Eychen zurücklegen, wie sie unter den Dikotyledonen sich finden, kommen unter den Monokotyledonen nicht vor. Bei Gräsern und Riedgräsern werden Pollenschläuche schon 5—7 Stunden nach künstlicher Bestäubung der jungfräulichen Narben im Eymund gefunden; bei Zostera marina nach 10 Stunden.***) Bei der Mehrzahl der Monokotyledonen, namentlich bei Liliaceen und Aroïdeen, ist das Wachsthum der Pollenschläuche träger. Die von Crocus vernus brauchen unter den günstigsten Umständen, bei warmer feuchter Luft und hellem Sonnenschein während der Tagesstunden, 24 Stunden zum Herabsteigen bis in die Mikropylen; bei trockenerer kühlerer Luft 48 bis 72 Stunden. Aehnlich ist das Verhältniss bei Iris pumila, bei Arten von Lilium, bei Leucojum vernum, Colchicum autumnale, Merendera caucasica (Minimum der nöthigen Zeit bei meinen

*) Schacht in Pringsheims Jahrb. I, Taf. XI, f. 4—7.

**) Flora 1858, 567.

***) Bot. Zeit. 1852, 138. Anmerk.

Beobachtungen 16 Stunden, Maximum 7 Tage), Puschkinia scilloïdes u. v. A. — Bei Arum maculatum brauchen die Pollenschläuche zur Erreichung ihres Zieles mindestens 5 Tage; bei Pothos longifolia eine noch längere Zeit; die längste — mindestens 10 Tage von der Uebertragung des Pollens auf die Narbe an — bei den Orchideen.*)

Die Entwickelung von Schläuchen aus den Pollenkörnern beginnt auch bei denjenigen Monokotyledonen, deren Pollenschläuche nur langsam weiter wachsen, sehr bald nach Bestäubung der Narben: bei Crocus vernus schon nach 3—4, bei Arum maculatum nach 5—7 Stunden. Bei Najas major, sowie bei Exemplaren von Orchis Morio die in sehr feuchter Luft (unter Glasglocken) vegetirten, sah ich öfters den Pollen schon in der, eben geöffneten, Anthere massenhaft Schläuche treiben. Diese Schläuche fanden bei Orchis Morio den Weg bis in die Ovarien: sie traten aus den Antherenspalten vielfach verschlungen und gekrümmt als ein dichter Filz hervor, folgten aber beim Weiterwachsen, wenn auch unter mannigfachen wellenförmigen Beugungen beiderseits der Vorderfläche der Anthere, am Rostellum vorbeigehend, bis sie die feuchte Narbenfläche erreichten.

Dieser Fall zeigt noch deutlicher, als das Verhalten der fortwachsenden Pollenschlauchenden in weiten Fruchtknoten (— in denen von Orchideen z. B.) das Bestreben derselben, sich der Oberfläche des Pflanzentheiles anzuschmiegen, mit welchem sie in Berührung kommen. Der nächste Grund der Erscheinung ist vermuthlich derselbe allgemeine Vorgang, vermittelst dessen das Winden von Ranken und Schlingpflanzen, das feste Anschmiegen mancher Kletterpflanzen (Ficus stipulata, Hedera Helix) an ihre Stützen erfolgt: die Verminderung des Flächenwachsthums der in Dehnung begriffenen pflanzlichen Zellhaut an den Stellen, in welchen ein fremder Körper sie berührt. — Die Bahn der Pollenschläuche ist nur da eine gradlinige, wo sie zahlreich in engem Raume zusammengedrängt, durch gegenseitigen Druck die Richtung ihres Wachsthums regeln. Wo die Schläuche grössere Freiheit der Bewegung finden, da zeigt ihr Verlauf im Einzelnen keine erkennbare Regel: sie sind wellenlinig, kniebogig, nicht selten rückwärts abgelenkt, verschlungen, und besonders häufig zu zweien, seltener zu mehreren, um einander gewunden, wie die Stränge einer Schnur. So auf den Placenten von Gagea, von

*) R. Brown in Transact. Linn. Soc. XVI, 705 ff.

Orchideen, in der schleimerfüllten Fruchtknotenhöhle von Pothos longifolia, und — wie ich weiterhin zeigen werde — innerhalb der erweiterten Höhle, welche die Integumente der Eychen von Colchicum und Bulbocodium umschliessen. Nur im Grossen und Ganzen folgt der Verlauf der Schläuche im Fruchtknoten der Orchideen und Liliaceen den durch papillöse Beschaffenheit der oberflächlichen Zellen gekennzeichneten secernirenden Flächen. Dass die Enden der Schläuche, an der Oberfläche der Eychen hinkriechend, endlich einzeln, wenn auch oft spät, bis in die Mikropyle gelangen, hat bei der Zahl der Pollenschläuche, welche in allen bekannten Fällen die der Eychen weit überwiegt, nach dem Vorausgeschickten nichts Wunderbares; um so weniger als in den Fällen, wo die Richtung der Mikropyle den Eintritt der Pollenschläuche nicht besonders begünstigt, dieser Eintritt auffallend spät zu erfolgen pflegt. So namentlich bei den atropen Eychen von Arum, deren Vorderenden in den lufterfüllten Hohlraum des Fruchtknotens hinein reichen.

Verästelungen der Pollenschläuche im Staubwege scheinen bei Monokotyledonen noch seltener vorzukommen, als bei Dikotyledonen. Nur bei Gagea sylvatica habe ich deren bemerkt. Dagegen verzweigt sich der Pollenschlauch nicht selten beim Eintritt in die Mikropyle. Bei Crocus vernus ist es fast Regel, dass der Pollenschlauch im Mikropylekanal eine seitliche Abzweigung bildet, die bisweilen ein nicht unbeträchtliches Längenwachsthum erreicht (XXII, 2. 4. 9. 11. 14. 18. 21. 25—28; XXIII, 2—4, 7. 12. 18). Aehnliches kommt vor bei Leucojum vernum (XIII, 22), Crinum capense (XIV, 8). Einmal sah ich bei Crocus vernus den Pollenschlauch, von der Eintrittsstelle ins Exostom an, in zwei ziemlich gleichlange Gabeläste ausgewachsen (XXII, 31), die beide in den engen Mikropylekanal hinabstiegen. — Mannigfaltigere Verzweigungen, Seitenäste von verschiedenartigster Gestalt und Länge, entwickelt der Pollenschlauch von Hippeastrum aulicum im weiten Kanale des Endostoms (XIII, 4—7). Nicht selten treffen zwei solcher Fortsätze mit den Spitzen auf einander (XIII, 5). Zuverlässig ist es nur eine Weiterentwickelung solcher Zustände, wenn der Pollenschlauch im Mikropylekanale eine geschlossene Masche bildet, ähnlich wie Fäden des Hypothallus mancher Flechten (XIII, 7): die Spitze eines langen Seitenastes mag auf den Hauptstamm des Pollenschlauches getroffen haben; die Membranen beider mögen an der Berührungsstelle verflüssigt worden, und so die Verbindung der Lu-

mina hergestellt worden sein. Besonders häufig ist vielfache Verästelung des äussersten Endes des Pollenschlauches (XIII, 6). Bei Funkia coerulea kommt sie in ganz ähnlicher Weise vor (XXII, 6). Noch bunter verästelt sind die Verzweigungen, welche bei Pothos longifolia die Pollenschläuche, vor und bei dem Eintritt in die Mikropyle, in den die Fruchtknotenhöhle erfüllenden gallertähnlichen Schleim entsenden (X, 1. 2). Mit ihren geschwollenen Enden ähneln sie Pilzfäden.

Der Inhalt des schlauchtreibenden Pollenkerns wandert in sich verlängernden Schlauche herab, in dessen unterem Ende sich anhäufend, während die am weitesten rückwärts gelegenen Theile nur wässerige Flüssigkeit enthalten. Sie sterben endlich von hinten her ab, bei Monokotyledonen, wie es scheint, sehr allgemein, bevor noch die Pollenschlauchspitze in die Mikropyle eintritt. Jene Wanderung ist besonders augenfällig bei Najas major, wo das Pollenschlauchende, auch nach seinem Zusammentreffen mit dem Embryosacke, mit den im Pollenkorn enthalten gewesenen spindelförmigen Amylumkörnern vollgestopft erscheint (I, 11. 14. 15). Aber auch anderwärts macht die Anhäufung fester Inhaltsgebilde im unteren Ende des Pollenschlauches sich bemerklich: bei Orchis Morio (IV, 15—19), Canna Sellowii (VI, 23—26), Pothos longifolia (IX, 12—17, X, 3. 5), Crinum capense (XIV, 5—8), Merendera caucasica (XV, 16. 19. 21, XV, 3. 5), Colchicum autumnale (XVIII, 1. 2. 4—7), Crocus vernus (XXIV, 24. 29. XXIII, 1. 4). Die Inhaltskörper sehr verlängerter Pollenschläuche sind häufig, sämmtlich oder zum Theil von gestreckter, spindelförmiger Gestalt, übereinstimmend mit der Form des Chlorophylls langgestreckter Zellen, z. B. denen sehr verlängerter Auszweigungen von Moosvorkeimen. So bei Pothos longifolia (X, 3, *b*), Crinum capense (XIV, 5), Merendera caucasica (XV, 14. 18, XVI, 4), Crocus vernus (XXII, 10. XXIII, 1. 15). Bewegungen konnten an diesen Inhaltskörpern, den rundlichen ebenso wenig als den gestreckten, nirgends beobachtet werden; selbst nicht moleculare.

Die Beobachtung ergiebt ausnahmslos, dass in allen Fällen, in denen Folgen der Befruchtung — Weiterentwickelung eines der Keimbläschen, beginnende Endospermbildung — im Embryosacke sichtbar werden, das Ende eines Pollenschlauches mindestens bis zur Aussenfläche des Sackes vorgedrungen ist. Die Berührung des Pollenschlauchendes mit der Aussenwand des Embryosackes erscheint demnach als nothwendige Bedingung der Befruchtung. Bei den Pflanzen mit allseitig vom

Parenchym des Eykerns umschlossenem Embryosacke bahnt sich der Schlauch seinen Weg zum Scheitel des Sackes durch das Gewebe der Kernwarze, dessen Zellen auseinander drängend. Der Verlauf des Schlauches innerhalb dieses Parenchyms ist meist ziemlich geradlinig; auch da wo er mehrere Zellschichten zu durchbohren hat, z. B. bei Najas major (I, 14—17. 19), Calla palustris (VIII, 15. 16). Auch bei einigen der Monokotyledonen, bei denen vom Eykern nur das Gewebe der Kernwarze sich erhalten hat, durchbohrt der Pollenschlauch dieses Gewebe: so bei Arum maculatum und orientale (VII, 13. 15. 17); bisweilen auch bei Pothos longifolia (IX, 12. 15, X, 3). Häufiger geschieht es jedoch bei letzterer Pflanze, und noch regelmässiger bei Merendera caucasica, Colchicum autumnale, Allium odorans, Hymenocallis caribaea, dass das Ende eines oder mehrerer Pollenschläuche zwischen dem inneren Integument und der Kernwarze hinabwächst, bis es die Aussenfläche des Embryosackes berührt (IX, 10—13. 14. 16, X, 5—8, XVI, 12—21, XVI, 2—7, XVII, 1—4. 6—9, XIX, 1. 7, XXV, 5). Das Herabwachsen des Pollenschlauchendes wird bei Pothos und den Colchicaceen dadurch sehr erleichtert, dass nach dem Eintritte des Schlauches in den Mikropylekanal sofort eine beträchtliche Dehnung der Eyhüllen nach allen Richtungen eintritt, welcher Eykern und Embryosack nicht sofort folgen. Es bildet sich zwischen diesen und der Innenfläche des inneren Integuments eine oft ziemlich geräumige Höhlung, in welche man bisweilen das Pollenschlauchende frei herein hängen sieht (XV, 12, XVII, 1. 2). Später füllt der Embryosack durch plötzlich eintretende Ausdehnung den Hohlraum wieder völlig aus, und drängt das Pollenschlauchende dicht an das innere Integument an. — Diese Formen zeigen das stärkste, nach dem Zusammentreffen des Pollenschlauches mit dem Embryosacke noch fortdauernde Längenwachsthum des Schlauches. Bei Pothos longifolia biegt der Pollenschlauch öfters knieförmig um, und wächst zwischen Kernwarze und innerm Integument eine Strecke weit gegen die Innenöffnung der Mikropyle hin (IX, 14; X, 3. 5). Oder er treibt Seitenäste, deren Wuchs verschiedenartige Richtungen einschlägt (X, 7. 9). Oder er wächst eine Strecke weit auf der Aussenfläche des Embryosackes hin (X, 6). Das letztere Verhältniss kommt auch bei Merendera caucasica häufig vor (XV, 16. 20. 21; XVI, 3); in einem Falle soweit gesteigert, dass der Pollenschlauch bis gegen das Chalaza-Ende des Embryosackes an dessen Aussenfläche herab gewachsen war, hier um-

bog, unter seinem älteren Theile sich durchdrängte, und zweimal in links gewundener Schraubenlinie denselben umschlingend, rückwärts nach dem Mikropyle-Ende des Sackes hin kroch, nahe welchem er mit einer stark abgeplatteten Erweiterung endete (XVI, 1. 1, *b*).

Eine zweite Form des nach dem Auftreffen des Pollenschlauchs auf den Embryosack noch fortdauernden Längenwachsthums des ersteren ist die Einstülpung des Sackes durch das Ende des Pollenschlauches: beobachtet bei Canna*) (VI, 19—23), Najas major (I, 14—18), Narcissus poëticus**) und Jonquilla (XXV, 15), Tillandsia sp.***). Der Vorgang ist bei den beobachteten Monokotyledonen stets mit beträchtlicher Erweichung der Membran des Embryosackscheitels verbunden, die dann vom Pollenschlauch bis zu unkenntlicher Dünne gedehnt wird. Er ist nur für Canna und Tillandsia Regel; bei den anderen Genannten häufigen Ausnahmen unterworfen (man vergleiche I, 14. 17. 18. 19 mit I, 15. 16). Bei Canna steigert sich die Einstülpung endlich bis zu unzweifelhafter Durchbrechung der Membran des Sackes namentlich in der häufigen, Individuen verschiedener Arten zukommenden Erscheinung geschlängelten, selbst Schleifen und Knoten bildenden, Längenwachsthums des Pollenschlauches innerhalb des Embryosackes (VI. 20. 21). Die Fälle besonderer Steigerung derartigen Pollenschlauchwachsthums (wie f. 20. 21) scheinen abnorme: die Keimbläschen der Embryosäcke, aus denen solche Schlauchenden hervorgezogen wurden, liessen kein Zeichen der Weiterentwickelung erkennen.†)

Bei dem Zusammentreffen des Pollenschlauchendes mit der Scheitelgegend solcher Embryosäcke, welche auf der Aussenfläche des Mikropyle-Endes vorspringende Längsleisten aus einer, vom Zellhautstoffe verschieden reagirender Substanz in hohem Grade ausgebildet zeigen, geschieht es sehr häufig, dass der Pollenschlauch sich zwischen die ächte Zellstoffhaut des Embryosackes, und die jene Leisten tragende

*) Zuerst durch Schleiden: N. A. A. C. L. XIX, 1 Taf. III, f. 30. 31.

**) Hofmeister Entst. d. Embryo Taf. IX f. 39. 40.

***) Crüger, Bot. Zeit. 1856, 8. 15; Taf. XV f. 3 ff.

†) Die Krümmungen des Pollenschlauchendes im Embryosacke von Canna sind zuerst von de Bary beobachtet worden, der die Erscheinung irriger Weise für den Beginn der Bildung durch Abschnürung vom Schlauche sich trennender Tochterzellen hielt, deren eine zum Embryo sich entwickele (Verhandl. d. Vers. deutsch. Naturf. zu Tübingen, 1853).

äusserste Schicht der Membran desselben einschiebt, diese von jener auf kürzere oder längere Strecke ablösend. So namentlich bei Crocus vernus (XXII, 5. 16. 27; XXIII, 6. 8, *b*). Die Aehnlichkeit dieses Verhaltens des Pollenschlauchendes zur leistentragenden Schicht mit denen des Pollenschlauches zur Cuticula der Narbenpapillen ist nicht zu verkennen.*) Bei gewaltsamer Lostrennung des Schlauchendes vom Sacke geschieht es sehr häufig, dass ein Theil der Cuticula am Pollenschlauchende hängen bleibt (XXII, 18. 25. 26. 30; XXIII, 8, *a*. 15. 17) — ein weiterer Beweis für die klebrige Beschaffenheit der in Rede stehenden Schicht, wie für die geringe Innigkeit ihrer Verbindung mit der Zellstoffschicht der Embryosackhaut, welcher sie aufgelagert ist. An den abgetrennten Cuticulafetzen ist oft die zwischen den Längsleisten verlaufende, feinkörnige Haut deutlich zu erkennen. In vielen Fällen aber machen die Enden der Leisten unter dem Mikroskop den Eindruck isolirter Fasern (XXII, 25. 26) — eine Erscheinung, für welche die nämlichen Erwägungen gelten, welche in Bezug auf die faserige Structur unter dem Dissections-Mikroskop zerfaserter Zellhautlamellen Platz greifen.**)

In anderen Fällen dagegen lässt sich das Pollenschlauchende auch bei Crocus vernus vom Embryosacke ohne alle Verletzung des einen oder des anderen Theiles ablösen (XXII, 7. 8. 24); — die geringe Entwickelung der Keimbläschen ergiebt, dass diese Embryosäcke vor ganz kurzer Zeit erst vom Pollenschlauche erreicht worden waren. Das gleiche Verhältniss, leichte Abtrennbarkeit des Schlauchendes vom Sacke kurz nach dem Zusammentreffen beider; festes Haften derselben an einander nach längerer Berührung, findet sich, wie bei vielen Dikotyle-

*) Ich habe früher geglaubt (Pringsheim's Jahrbücher I, 162), aus dem Vorkommen von Theilen der aus welligen Leisten und kleinen Klumpen zusammengesetzten Masse auf der dem Embryosack abgewendeten Seite des Pollenschlauchendes von Crocus den Schluss ziehen zu müssen, dass die Entwickelung dieser Masse nach Ankunft des Pollenschlauches am Embryosacke noch fortdauere, und deshalb diese Masse für ein Secret der nächstbenachbarten Gewebe — hier der Innenfläche des inneren Integuments — erklären zu sollen. Weitere Untersuchungen des Gegenstandes haben mir gelehrt, dass die häufig beobachtete, völlige Trennung des auf der Aussenseite des Pollenschlauches zu findenden Theiles jener Masse von dem übrigen, auf dem Embryosacke gelagerten Theile desselben nur eine Folge der bei der künstlichen Freilegung des Embryosackscheitels nur selten zu vermeidenden Zerreissung der dem klebrigen, auch der Innenfläche des inneren Integuments etwas anhaftenden Schicht ist.

**) v. Mohl, Botan. Zeit. 1853, 761.

donen*) auch bei mehreren Monokotyledonen wieder: bei Pothos longifolia (IX, 10. 11), Triticum vulgare, Hordeum vulgare, Crinum capense (XIV, 7), Merendera caucasica (XV, 11. 12. 14 einerseits; XV, 13. 45, XVI, 1—6 andererseits). Bei Puschkinia scilloïdes, Veltheimia viridiflora, Hyacinthus orientalis erwies sich die Verbindung beider Theile auch auf späteren Zuständen in allen beobachteten Fällen als eine nur lose.

Die Membran des Pollenschlauches erscheint auch bei Monokotyledonen häufig beträchtlich verdickt, soweit er innerhalb des Eyes verläuft. Die Verdickung ist am stärksten am Pollenschlauchende; nach rückwärts nimmt sie allmälig ab. Am deutlichsten zeigt sich dieses Verhältniss bei den grossen Liliaceen (im weitesten Sinne): bei Crinum capense (XVI, 5. 6. 8), Hippeastrum aulicum (XIII, 4—8), Crocus vernus. Bei Letzterem wird in der verdickten Wandstelle oft deutlich Schichtenbildung erkannt (XXII, 1. 2. 3, XXIII, 3. 5). Nicht selten findet sich bei Crocus in dem äussersten Ende des Schlauches, rings umschlossen von der stärksten Verdickung der Wand, ein eng umschriebener dünnhäutiger Raum, ein ächter Tüpfel. Die ihn verschliessende Membran erscheint als unmittelbare Fortsetzung der äussersten Lamelle der verdickten Wand (XXII, 18, *b*. 31, XXIII, 3, *c*. 8, *b*. 18, *b*. *c*). Wirkliche Oeffnungen im Pollenschlauchende sind mir bei Monokotyledonen ebensowenig irgendwo vorgekommen, als bei Dikotyledonen. — Im Allgemeinen sind es nur die älteren Zustände von Pollenschläuchen, welche starke Wandverdickung zeigen. Je weniger an den der Untersuchung unterworfenen Präparaten die Keimbläschen verändert erscheinen, desto gleichartiger dünn und von den der oberen Theile des Pollenschlauches kaum verschieden pflegt auch die des Pollenschlauchendes zu sein (XXII, 2—7. 14). — Die Wandverdickung tritt häufig so rasch nach dem Eintreffen des Schlauches am Embryosacke auf (das XXII, 1 abgebildete Präparat z. B. ist aus einem Pistill genommen, welches nur 24 Stunden vor der Untersuchung, noch jungfräulich, künstlich bestäubt worden war), dass jenes Dickerwerden der Wand nicht anders aufgefasst werden kann, denn als ein Aufquellen derselben.**) Auch nach dem Aufquellen ist die Membran des Schlauches noch fest; sie lässt sich durch Quetschung nicht breit drücken.

*) Diese Abhandlungen, VI, 607. 612.

**) Vergl. meinen Aufsatz in Pringsheim's Jahrb. I, 179. — Auch von Schacht ist die Sache so angesehen worden (Pringsheim's Jahrbücher I, 201).

Den Eintritt mehr als eines Pollenschlauches in die Mikropyle eines und desselben Eychens beobachtete ich nur bei wenigen Monokotyledonen: bei Pothos longifolia (IX, 12; X, 3. 6. 7), Puschkinia scilloïdes (XX, 11), Hyacinthus orientalis.

Nächste Veränderungen der Eychen nach Ankunft des Pollenschlauches.

Das Verschwinden des primären Kernes des Embryosackes ist auch bei den Monokotyledonen die nächste sichtbar werdende Folge des Eintreffens des Pollenschlauchendes am Embryosacke. Sehr zahlreiche Beobachtungen haben keinen einzigen Fall dargeboten, in welchem ein Embryosack, dessen Scheitelgegend vom Pollenschlauche erreicht war, jenen Kern noch enthalten hätte. Nur insofern erweiset sich bei Monokotyledonen das Fehlen des Embryosackkernes als zweifelhaftes Zeichen erfolgter Befruchtung, als bei manchen von ihnen dieser Kern häufig noch vor Eintreffen des Pollenschlauches am Embryosacke unsichtbar wird (S. 678).

Eine unter den Monokotyledonen ebenso verbreitete als deutlichst ausgeprägte Erscheinung ist die rasche Grössenzunahme des Fruchtknotens und der Eychen von dem Zeitpunkte an, zu welchem die Pollenschläuche in die Höhle des Fruchtknotens eintreten. Dieses Wachsthum beginnt in vielen Fällen schon vor der Ankunft von Pollenschlauchenden in den Mikropylen von Eychen: so bei Gagea, Puschkinia und zahlreichen anderen Liliaceen; am entschiedensten aber bei Orchideen. Bekanntlich ist der Fruchtknoten der Ophrydeen zur Blüthezeit schlank, dünn, fast cylindrisch. Die Eychen sind zu dieser Zeit nur bis zur Anlegung der Integumente als niedrige Ringwülste entwickelt. Erst gleichzeitig mit dem Welken der Perigonialblätter beginnt der Fruchtknoten, unter Ausgleichungen seiner Drehung, zu schwellen; und beginnen die Eychen sich weiter auszubilden. Aber diese Vorgänge treten nicht an allen Blüthen ein. Oft schlägt die Mehrzahl der Fruchtknoten eines Blüthenstandes fehl; bisweilen die Gesammtheit. Sehr zahlreiche Untersuchungen haben mir gezeigt, dass alle anschwellenden Fruchtknoten die durch R. Brown*) bekannten Pollenschlauchbündel enthielten, dass dagegen in nicht anschwellenden Fruchtknoten nie Pollenschläuche zu

*) Transact. Linn. Soc. XVI, 706.

finden waren. Ich hege keinen Zweifel, dass die Weiterentwickelung der Fruchtknoten und Eychen hier von dem Eintritt der Pollenschläuche in die Fruchtknotenhöhle bedingt ist.

Diese Dehnung der einzelnen Theile der Eychen ist bisweilen ungleich: ein Fall der auf sehr früher Entwickelungsstufe, namentlich bei den Formen vorkommt, deren Embryosack allein oder fast allein den von den Integumenten umschlossenen Hohlraum ausfüllt: — bei Orchideen, Aroïdeen, Colchicaceen. Die Integumente nehmen früher an Grösse zu als der Embryosack, so dass die Höhlung innerhalb der Eyhüllen schneller an Weite zunimmt, als der Embryosack an Umfang. Dieser füllt jene Höhlung vorerst nicht mehr vollständig aus. In den freien Raum über und neben ihm kann der Pollenschlauch eine Strecke weit herabwachsen, und tief seitlich dem Embryosack sich anlegen. Beobachtet bei Orchis Morio, Pothos longifolia (IX, 10), Merendera caucasica (XV, 12), Colchicum autumnale (XVII, 1. 2). Nach einiger Zeit holt das Wachsthum des Embryosackes jenes der Integumente wieder vollständig ein. Er füllt dann die von diesen umschlossene Höhlung wieder prall aus, das Pollenschlauchende fest an die Innenwand des inneren Integuments drängend. Bei Orchis Morio beobachtete ich öfters, dass das Pollenschlauchende durch diesen Druck gesprengt, sein körniger Inhalt auf der Aussenfläche des Embryosackes verstreut war (IV, 16); — ein schlagender Beweis gegen das Bestehen einer offenen Verbindung zwischen den Innenräumen des Pollenschlauchendes und des Embryosackes. — Anderwärts tritt erst später, nach Anlegung des Embryokügelchens, in den Integumenten ein Ueberwiegen des Flächenwachsthums über das des Embryosacks ein: so bei Gagea lutea,*) Crocus u. m. A. Bei Ixia rosea beobachtete ich das gleiche Verhältniss selbst an noch unbefruchteten Eychen (XXIV, 10).

Bei den Formen, deren Embryosack allseitig vom Gewebe des Eykerns umschlossen ist, erweitert sich der Embryosack nach Ankunft des Pollenschlauches auf Kosten des umgebenden Gewebes, dieses mehr oder weniger vollständig verdrängend, und so den schon vor der Befruchtung begonnenen Prozess (S. 665) fortsetzend. In der grossen Mehrzahl der Fälle erfolgt die Verdrängung der seitlich den Embryosack umschliessenden Zellenlagen früher, als diejenige der seinen Scheitel

*) Hofmeister Entst. d. Embryo 24; Taf. IX f. 20.

deckenden, so dass bald nach der Befruchtung die Seitenflächen des Embryosacks der Innenwand des inneren Integuments unmittelbar anliegen, während das vom Pollenschlauch durchbohrte Parenchym der Kernwarze vorerst noch erhalten bleibt: Alisma Plantago (II, 21), Symplocarpus foetida (VII, 7), Leucojum vernum (XIII, 16. 17. 21. 24. 27), Gagea lutea (XX, 3, 4), Iris pumila, Narcissus poëticus und Jonquilla — alles Pflanzen, denen nahe Verwandte schon vor der Befruchtung eine ähnliche Verdrängung der seitlich den Embryosack umgebenden Gewebe zeigen (S. 667). Bei Gräsern, Cyperaceen (wie Carex, XII, 17), bei Najas (I, 14—20), Ruppia (II, 3—6), Zannichellia, Potamogeton, auch bei einigen Liliaceen, wie Veltheimia (XVII, 9. 12) geschieht diese Verdrängung gleichmässiger. Bei allen Monokotyledonen schreitet sie endlich bis zu völliger Vernichtung des Gewebes des Eykerns vor, mit einziger Ausnahme von endospermlosen Formen: Cannaceen, Scisameen und Musaceen, bei denen Perisperm die Stelle des Endosperms vertritt. Ein Fall gleichzeitigen Vorhandenseins von Endosperm und Perisperm in reifen Saamen, wie ihn unter den Dikotyledonen die Piperaceen, Nymphaeaceen und Malvaceen*) bieten, ist unter den Monokotyledonen noch nicht bekannt geworden.

In einigen Fällen greift der Embryosack auch von Monokotyledonen, nach Verdrängung der ihn umhüllenden Zellen des Eykerns, noch in andere Theile des Eychens, in das Gewebe des innern Integuments oder der Chalaza, zerstörend ein, wie dies unter den Dikotyledonen bei Labiaten, Personaten u. A. sehr allgemein vorkommt. — So wird bei Allium odorans schon sehr früh, fast gleichzeitig mit der Befruchtung, die Mittelgegend des inneren Integuments einseitig, in der concaven Hälfte des Eys, vom Embryosack verdrängt (XIX, 9). Ebenso erfolgt die Verdrängung und Sprengung der den endospermerfüllten Embryosack umhüllenden Zellschichten von Crinum capense, welche ich als einziges Integument auffasse (S. 662), früher an einer nicht fest bestimmten Stelle des Eychens, als an den übrigen. Bei den Ophrydeen ist die Verdrängung des innern Integuments eine allseitig gleichmässige.

*) Hofmeister in Pringsheim's Jahrbücher I, 92.

Beginn der Entwickelung eines der Keimbläschen zum Embryo.

In der weitüberwiegenden Mehrzahl der Fälle ist es nur eines der Keimbläschen jedes Embryosackes, welches nach Ankunft des Pollenschlauches am Sacke die Weiterentwickelung zum Embryo anhebt. Bei allen darauf untersuchten Formen von Mono- wie von Dikotyledonen geschieht diese Veränderung mit demjenigen der Keimbläschen, dessen geradlinige Entfernung vom Chalaza-Ende des Embryosackes die geringste ist.*) In Embryosäcken mit spitzer Wölbung des Scheitels erscheint das weiter sich entwickelnde Keimbläschen sehr deutlich als das, dem Mikropyle-Ende des Sackes fernere. So auch bei Monokotyledonen ganz in der Regel: Najas major (I, 15. 16. 18. 19), Zannichellia palustris (II, 10. 11), Orchis Morio (IV, 15. 16), Arum orientale und maculatum (VII, 2. 13. 16), Pistia Stratiotes (VII, 22), Calla palustris (VIII, 15), Pothos longifolia (IX, 10. 13. 15), Secale cereale (XI, 5), Triticum vulgare (XI, 14), Elymus arenarius (XI, 18), Hordeum vulgare (XII, 2), Sorghum halepense (XII, 9. 10), Hippeastrum aulicum (XIII, 4. 7. 8), Leucojum vernum (XIII, 18—21. 24. 25), Crinum capense (XIV, 5. 6. 8), Veltheimia viridiflora (XVIII, 4—11), Hemerocallis lutea (XIX, 1), Czackia Liliastrum (XIX, 3), Allium odorans (XIX, 9. 10), Gagea lutea (XX, 4), Puschkinia scilloïdes (XX, 10. 11), Crocus vernus (XXII und XXIII, sämmtliche Figuren), Gladiolus communis (XXIV, 9), Tritonia crocata (XXIV, 12), Paris quadrifolia (XXV, 13). Nur bei Formen mit völlig abgeplattetem Embryosackscheitel kommt die Entwickelung des genau dem Scheitelpunkte des Sackes anhaftenden Keimbläschens zum Embryo vor, und auch hier nur, wenn eine Verschiebung des oberen Embryosackendes, ein einseitig stärkeres Längenwachsthum der Seitenfläche des Embryosackes das im Centrum der Scheitelfläche haftende Keimbläschen dem Chalaza-Ende des Sackes relativ genähert, das excentrische Keimbläschen von diesem entfernt hat: Colchicum autumnale (XVII, 3. 4), Merendera caucasica (XVI, 7). Das umgekehrte Verhältniss, die Entwickelung des excentrischen Keimbläschens zum Embryo, muss auch für diese Formen als Regel bezeichnet werden: Colchicum autumnale

*) Vergl. Hofmeister in Flora 1855, 259; Radlkofer, Befruchtung d. Phanerog. Lpzg. 1856, 17.

(XVII, 6—8), Merendera caucasica (XV, 15. 16; XVI, 1. 2. 3. 4. 7). Auch bei den polyembryonischen Formen, deren sämmtliche Keimbläschen zu Embryonen sich zu entwickeln pflegen, eilt das am tiefsten der Scheitelwölbung des Sackes anhaftende den übrigen in der Entwickelung beträchtlich voraus: Funkia coerulea (XX, 7), Hymenocallis ovata (XXV, 3). Diese relativ grössere Entwickelungs- und Lebensfähigkeit des untersten der Keimbläschen findet sich schon im unbefruchteten Embryosacke durch das häufige zeitige Absterben der übrigen ausgesprochen (S. 674). Der Grund der Erscheinung ist muthmaasslich derselbe, welcher die Entwickelung des Embryo genau in der Längsachse des Embryo, die rasche Verlängerung der Träger vieler Embryonen, und, in polyembryonen Embryosäcken von Monokotyledonen wie von Coniferen die Begünstigung des Wachsthums des am tiefsten gegen die Chalaza herab gedrungenen Embryo bedingen mag: der Umstand, dass die Zuleitung der Nahrungsflüssigkeit für den Embryo nur von der Chalaza her erfolgt.

Der beginnenden Weiterentwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo geht bei den Monokotyledonen weit allgemeiner ein Festerwerden seiner Zellhaut voraus, als bei den Dikotyledonen.*) Aber diese Erhärtung der Häute beschränkt sich nicht auf das zur Weiterentfaltung bestimmte Keimbläschen: sie erstreckt sich auch auf das oder die oberen, welche baldigem Fehlschlagen und Absterben verfallen sind, dafern diese oberen Keimbläschen zur Zeit des Festerwerdens der Membran des unteren nur überhaupt noch lebensfähig sind. So bei den meisten Liliaceen, Amaryllideen und Irideen: besonders regelmässig bei Crocus (XXII, XXIII). Die Erhärtung der Haut auch der oberen Keimbläschen dieser Formen, das in dieser Beziehung schwankende Verhalten vieler anderen, wie Leucojum vernum, Crinum capense, Hippeastrum aulicum, Sorghum halepense, Najas major u. s. w., deren abortirende Keimbläschen bald feste Membranen erhalten, bald nicht, — sprechen ebensosehr für die Unwesentlichkeit des Vorhandenseins einer festen Zellstoffhaut am Keimbläschen nach, und des Fehlens derselben vor der Befruchtung, als der Umstand, dass die Keimbläschen mancher Formen schon vor der

*) Unter welchen Lupinus, Prismatocarpus und Mirabilis z. B. noch am vielzelligen Vorkeim zerfliesslich weiche Zellwandungen besitzen: vergl. Hofmeister in Pringsheim's Jahrb. I, 181.

Befruchtung des Eychens eine, wenn auch dünne doch feste Zellhaut zeigen (S. 671).

Um so deutlicher unterscheidet sich, bald nach Ankunft des Pollenschlauches am Embryosacke, der Inhalt des in Weiterentwickelung begriffenen Keimbläschens von dem der fehlschlagenden. Während nunmehr (wenn es nicht schon früher geschah; S. 675) in diesen die scharfe Sonderung des Inhalts in einen Wandbeleg aus Protoplasma und einen grossen centralen Raum mit wässeriger Flüssigkeit bald aufgehoben wird, und der ganze Innenraum der Zelle mit einer von zahlreichen, feinen Körnchen ziemlich gleichmässig getrübten Flüssigkeit erfüllt ist (XXII, 1—4. 6. 10. 11. 14. 15, *k*; XXIII, 1; ferner IV, 15. 16, XVI, 1; XVII, 3. 4. 7 u. a. Abb.), prägt sich diese Sonderung in jenem, dem weiter sich entwickelnden, durch Zunahme der Masse und Dichtigkeit des Protoplasma um Vieles schärfer aus; besonders dadurch, dass an der Ansammlung von Protoplasma, welche das freie untere Ende des Keimbläschens ausfüllt, zahlreiche feste, körnige Gebilde aus mit Jod sich bräunendem Stoffe von auffallender Grösse auftreten (XXII, 1. 6. 10. 14. 15; XXIII, 1). Noch bevor dies geschieht, pflegt in sämmtlichen Keimbläschen, den fehlschlagenden wie dem weiter fortschreitenden, der primäre Zellenkern zu verschwinden (IX, 10; XIII, 16. 17; XIV, 5; XV, 9. 11. 13—16. 17—21; XVI, 2. 3. 4, XVII, 4. 6—10; XVIII, 4; XXII, 2. 3. 4. 11), während gleichzeitig mit jenen Körnchen, und in derselben Anhäufung von Protoplasma, welcher sie eingebettet sind, ein durch starke Lichtbrechungsvermögen seiner Substanz vor dem verblassten primären sehr ausgezeichneter neuer Kern, aber nur in dem, zu weiterer Entwickelung bestimmten unteren Keimbläschen sichtbar wird.*)

*) Bei Formen, deren Embryoentwickelung eine rapide ist, könnte an dem Unterschiede des secundären Kernes von dem primären gezweifelt werden, da es nur selten gelingt, Zwischenzustände der Keimbläschen aufzufinden, in denen diese des Zellenkernes entbehrten. Ausser der Analogie mit langsamer sich entwickelnden Formen, unter denen namentlich Colchicum autumnale vom Herbst an bis Anfang Mai des nächsten Jahres niemals einen Zellenkern im befruchteten Keimbläschen zeigt, ist noch der Umstand eine Stütze meiner Auffassung, dass in einzelnen Fällen die Bildung des secundären Kernes noch während der Existenz des primären erfolgt. So bisweilen bei Gagea lutea (Entst. d. Embryo Taf. IX f. 9, 10) und bei anderen Formen mit blasig anschwellender oberster, tragender Zelle des Vorkeims wie Zannichellia, Najas. Ferner dass Grösse und Aussehen des primären und des secundären Kernes dieser Formen auch dann sehr verschieden sind, wo der primäre vor Sichtbarwerden des secundären verschwindet; dieser ist viel kleiner, und minder abgeplattet als jener.

Diesem Zustande folgt bald die erste Theilung des befruchteten Keimbläschens durch eine Scheidewand: bei den Monokotyledonen in allen Fällen eine quere, dem unteren freien Ende des Keimbläschens näher, als dem oberen angewachsenen gerückte. Der secundäre, neue Kern des Keimbläschens kann vor der Bildung der Scheidewand in zweierlei Weise sich verhalten. Entweder so, dass an seiner Stelle zwei tertiäre Kerne erscheinen, zwischen denen beiden der Inhalt des Keimbläschens zu zwei getrennten Hälften sich abschnürt, in deren Berührungsflächen dann die neue Zellhaut als anscheinend homogene Platte auftritt. Oder aber so, dass ein kleinerer, aber an plastischen Stoffen reicherer Theil des Inhaltes, um den im unteren Ende des Keimbläschens gelegenen secundären Kern angesammelt, von dem übrigen Inhalte durch quere Abscheidung sich sondert, worauf, wie im vorigen Falle, in der Berührungsebene der beiden Primordialzellen die neue Zellstoffhaut erscheint. Die oberste, die Trägerzelle des nun zweizelligen Vorkeims ist dann kernlos, nur die untere, kleinere kernhaltig. Beide Fälle kommen bei gewissen Arten neben einander, selbst in Eychen des nämlichen Fruchtknotens vor. Der erstere ist fast ausschliessliche Regel bei Formen mit relativ kleiner Trägerzelle, wie z. B. Pothos longifolia, Secale cereale, Orchis Morio, Leucojum vernum (IV, 18. 19, IX, 12—17, XI, 4—6, XIII, 21—24); der Letztere ist der häufigere bei Formen mit grosser Trägerzelle, wie Najadeen, Potamogetoneen, Gagea, Erythronium, Fritillaria. Bei Crocus, Veltheimia, Puschkinia, anderen Gräsern finde ich, bei je den nämlichen Arten und Individuen, den ersten Fall zwar den häufigeren, aber auch den zweiten sehr oft.

Der Vorgang der Sonderung des Inhaltes einer in Zweitheilung begriffenen Zelle in zwei wohlbegränzte, einander berührende Massen (Primordialzellen), welche noch vor dem Auftreten einer sie trennenden festen Scheidewand durch Anwendung wasserentziehender Reagentien als getrennte, geschlossene Schläuche zur Anschauung gebracht werden können, lässt kaum irgendwo leichter und sicherer sich constatiren, als in den befruchteten, zur ersten Theilung sich anschickenden, Keimbläschen einiger Liliaceen und Amaryllideen: vorzugsweise solcher, deren Entwickelung zeitig im Jahre, bei niederer Temperatur und langsam vor sich geht. Wird ein Präparat, welches ein befruchtetes, bereits gestrecktes und zwei Zellenkerne enthaltendes Keimbläschen von Leucojum vernum, oder Veltheimia viridiflora, oder Puschkinia scilloïdes klar über-

blicken lässt, mit einer indifferenten Lösung (verdünnter von Glycerin, oder kohlensaurem Ammoniak) behandelt, so zieht häufig der Inhalt in Form zweier getrennter, geschlossener Schläuche von der Zellhaut sich zurück, ohne dass zwischen beiden Schläuchen selbst mit den besten Instrumenten auch nur die Spur einer sie trennenden Scheidewand zu erkennen wäre (XIII, 21 Leucojum; XVIII, 5 Veltheimia).

Die Zeit, welche zwischen der Ankunft des Pollenschlauchs am Embryosacke, und der ersten Zellentheilung des befruchteten Keimbläschens verfliesst, ist auch bei den verschiedenen Formen von Monokotyledonen von sehr ungleicher Dauer. Von sehr kurzer bei den Gräsern. Nur selten findet man bei Untersuchung von Eychen, bis zu deren Embryosack der Pollenschlauch vorgedrungen, das untere Keimbläschen noch nicht quergetheilt. Etwas langsamer ist die Entwickelung bei Najadeen und Potamogetoneen: bei Zostera marina schätze ich jene Frist auf etwa 12, bei Najas major auf 24 Stunden. Bei Orchis Morio kann sie kaum niedriger veranschlagt werden, als auf 48 Stunden, selbst bei hoher Temperatur und heiterem Wetter. Noch länger ist sie bei der Mehrzahl der Liliaceen, Amaryllideen, Irideen und Aroïdeen. Sie beträgt bei Crocus vernus unter günstigsten Verhältnissen 72 bis 96 St., bei Leucojum vernum 5—7 Tage; bei Veltheimia viridiflora 3—4 Tage, bei Arum maculatum 8—10 T., bei Merendera caucasica 12—20 Tage. Ihr Maximum erreicht sie bei Colchicum autumnale (durch die zwischen das Eintreffen des Pollenschlauches und die Weiterentwickelung des befruchteten Keimbläschens fallende Winterruhe) mit 8 Monaten, Mitte Septembers bis Mitte Mais.

Der ersten Zelltheilung des befruchteten Keimbläschens geht häufig eine Grössenzunahme desselben voraus. Doch ist dies bei den Monokotyledonen eine minder allgemeine, auch bei einzelnen Formen eine minder beständige Erscheinung, als bei den Dikotyledonen. Ein häufiger Fall ist eine Vergrösserung des Keimbläschens nach allen Richtungen; ein Anschwellen desselben ohne wesentliche Veränderung der Form. Die zweite, untere Zelle des Vorkeims nimmt dann nur einen kleinen Theil der gewölbten Endfläche der zur umfangreichen Blase gewordenen Trägerzelle ein. So ist es Regel für die meisten Najadeen, Potamogetoneen und Juncagineen, z. B. Ruppia maritima (II, 3. 4), Zannichellia

palustris (II, 10—13), Zostera marina,*) Alisma Plantago (II, 21), Triglochin maritimum (I, 26. 27). Ferner bei einigen Tulipeen: Gagea lutea (XX, 3. 4), Erythronium dens canis (XIX, 5. 6); bei Arum maculatum und orientale (VII, 2. 3. 15. 16). Bei Najas major, Scheuchzeria palustris zeigt sich diese Erscheinung in verschiedenen Eychen in sehr ungleichem Maasse, bisweilen kaum merklich (I, 15—20; XXV, 20. 21), ebenso bei Fritillaria imperialis.**) — Anderwärts stellt sich die Grössezunahme des befruchteten Keimbläschens als eine Streckung dar, welche vermittelt wird durch Längenwachsthum der Membran des freien Endtheils des Keimbläschens: so sehr deutlich bei den Orchideen, deren vor der Befruchtung birnförmige Keimbläschen nach derselben, schnell wachsend, die Eyform des Embryosackes annehmen, den sie vor ihrer ersten Zelltheilung nahezu, nicht selten sogar schon vollständig ausfüllen (z. B. Orchis Morio, V, 16. 17). Ferner u. v. A. bei Pothos longifolia (hier in sehr ungleichem Maasse, IX, 10—16), bei Gräsern (XI, 4—7. 18. 19, XII, 2—4. 8—10), bei Hippeastrum aulicum (XIII, 7. 8. 10), Leucojum vernum (XII, 21. 23. 24), Veltheimia viridiflora (auch hier in sehr ungleichem Grade; XVIII, 5. 10. 11 einerseits, XVIII, 9 andrerseits), Czackia Liliastrum (XIX, 3), Puschkinia scilloïdes (XX, 10. 11), Crocus vernus (bei diesem nur in sehr beschränktem Maasse, XXII, 1—20). Die letztere Pflanze stellt einen Uebergang zu der Reihe jener Formen dar, deren befruchtete Keimbläschen vor der ersten Zelltheilung in Form und Grösse sich nicht merklich verändern: wie Crinum capense (XIV, 6—8), Merendera caucasica (XVI, 1—9), Colchicum autumnale (XVII, 1—10), Allium odorans (XVIII, 1—10), Pontederia cordata (XXIV, 15. 16), Tradescantia virginica (XXIV, 18. 20), Narcissus Jonquilla (XXV, 15), Paris quadrifolia (XXV, 10—13).

Von dem Zeitpunkte der Erhärtung der Zellhaut der Keimbläschen an haften diese fester an der Innenwand des Embryosackes, als vorher. Doch ist die Innigkeit dieser Verbindung bei verschiedenen Formen sehr ungleich. Bei Crocus, Leucojum, bei Hyacinthus, Puschkinia und anderen Liliaceen hängt das befruchtete Keimbläschen noch im einzelligen Zustande vermittelst seiner Ansatzfläche, trotz des oft geringen Umfanges derselben, dem Embryosacke so fest an, dass die Trennung beider

*) Hofmeister in Bot. Zeit. 1852 Taf. III f. 26—29.

**) Entst. d. Embryo Taf. VIII f. 11—13. 15.

durch Ziehen mit der Präparirnadel kaum je gelingt. Die Membranen reissen eher, als dass sie von einander sich lösen.*) Bei Gräsern, noch mehr bei Potamogetoneen und Najadeen, ist die Verbindung viel loser. Bei Secale und Triticum genügt zu ihrer Aufhebung häufig schon eine leichte Berührung des Keimbläschens mit der Nadel. Bei Zostera marina beobachtete ich, dass die blasenförmige Trägerzelle des bereits mehrzelligen Embryokügelchens von der Anheftungsstelle am Embryosack sich schon dadurch ablöste, dass sie, während des Liegens des Präparats im Wasser des Objectträgers, durch Flüssigkeitsaufnahme ihre Form der sphärischen annäherte.**)

Entwickelung des Vorkeims.

Es ist eine allgemeine Erscheinung,***) dass das Keimbläschen der Phanerogamen nicht vollständig selbst an der Bildung des Zellenkörpers des Embryo theilnimmt, sondern dass die Endzelle einer terminalen Sprossung des Keimbläschens es ist, welche durch längere oder kürzere Zeit fortgesetzte Theilungen die Zellenmasse bildet, deren Zellräume bei herannahender Säamenreife mit zur Ernährung dienlichen Stoffen sich füllen, und die so im reifen Saamen den Embryo darstellt. Das ursprüngliche Keimbläschen, und seine endständige Sprossung, so weit sie nicht in die Embryobildung eingeht, belegte ich mit dem Namen des Vorkeims; es ist derselbe Theil, der nach der Entwickelung des Embryokügelchens den Embryoträger darstellt.

Die Formverhältnisse desselben sind bei den Dikotyledonen sehr mannichfaltig, und für bestimmte Verwandtschaftskreise scharf kennzeichnend. Unter den Monokotyledonen ist weder die Verschiedenheit der äusseren Bildung des Vorkeims so gross, noch waltet bei verschiedenen Individuen derselben Art die nämliche, fast ausnahmslose Regelmässigkeit in Bau und Form ob, wie dort. — Die gemeinste Form des Vorkeims ist auch bei den Monokotyledonen die eines Zellfadens, entstanden durch je in der Endzelle sich wiederholende Quertheilungen des

*) Vergleiche auch Tulasne in Ann. sc. nat. IV. Ser. IV, 98, 105, der diesem Umstande ein viel zu grosses Gewicht beilegt, indem er aus ihm auf die Entstehungsweise des Keimbläschens zurück schliesst.

**) Bot. Zeit. 1852, 140.

***) Wie ich bereits vor 10 Jahren dies ausgesprochen: Entst. d. Embryo, 59.

sprossenden Keimbläschens. So bei den meisten Najadeen, Potamogetoneen, Alismaceen, Aroïdeen, Irideen, Amaryllideen, Liliaceen, Orchideen, bei Canna, Carex u. s. w. Die Länge dieses Zellfadens ist fast durchgehends gering; sie beträgt nicht über fünf Zellen, deren Längs- die Querdurchmesser um höchstens etwa das Dreifache übertreffen. Eine grössere Zellenzahl, bis zu zehnen, fand ich nur bei Alisma Plantago (II, 21) und bei Gagea lutea (XX, 4). Einen nur zweizelligen Vorkeim, dessen zweite Zelle schon zum Embryo wird, also einen einzelligen Embryoträger fand ich unter den Monokotyledonen nur bei einigen Formen mit blasenförmig anschwellender Trägerzelle: bei Zostera marina und minor,*) bei Ruppia maritima (II, 3, *b*. 5. 6), und bei Arum orientale und maculatum (VI, 2. 4. 15). Als Ausnahme kommt das gleiche Verhältniss hier und da bei Formen mit fädlichem, aber kurzem Vorkeim vor: so bei Crocus vernus (XXIII, 23, *b*), bei verschiedenen Arten von Orchis (hier auf späteren Entwickelungsstufen durch das Auftreten einer Zellenvermehrung in der obersten Zelle des Vorkeims, einer wiederholten Quertheilung desselben, zum Theile verdeckt.**) Wie die Zellenzahl, so ist auch die Länge der fädlichen Vorkeime bei der nämlichen Art veränderlich. Nur schwach und undeutlich tritt das, bei Dikotyledonen scharf ausgeprägte Verhältniss hervor, dass in langgestreckten Embryosäcken der Vorkeim eine beträchtlichere Länge erreicht, als in kurzen und weiten. — Sehr häufig erscheint die Regelmässigkeit des Baues der fädlichen Vorkeime von Monokotyledonen durch das Auftreten von Schräg- oder Längswänden in einzelnen der Gliederzellen gestört: ein ganz gewöhnlicher Vorgang in den Zellen, welche der Mutterzelle des Embryokügelchens zunächst angränzen, aber auch in weiter rückwärts gelegenen Gliederzellen, bisweilen selbst in der Trägerzelle, beobachtet bei verschiedenen Arten von Canna, bei Symplocarpus foetida (VIII, 7), Pothos longifolia (X, 9), Scheuchzeria palustris (XXV, 20), Gagea lutea,***) Iris pumila,†) Hippeastrum aulicum, Habranthus chi-

*) Bot. Zeit. 1852, Taf. III f. 26—35.

**) Vergl. Amici in Flora 1847, Taf. III f. 8. 9; Bot. Zeit. 1847. 385; v. Mohl, Bot. Zeit. 1847, 471; Hofmeister, Entst. d. Embryo Taf. II f. 8—16. Ein ähnlicher Vorgang findet bei mehreren Arten von Asclepias statt, Hofmeister in Pringsheim's Jahrb. I, 124.

***) Entst. d. Embryo Taf. IX f. 21. 22.

†) Ebend. Taf. X f. 15.

lensis (XIII, 12), Crinum capense (XIV, 9, *b*), Crocus vernus (XXIII, 21. 22). Diese Formen des Vorkeims bilden den Uebergang zu der massigen, aus einem keulenförmigen Zellenkörper bestehenden, der durch Theilungen schon der Zellen des nur wenigzelligen Vorkeims nach verschiedenen Richtungen gebildet wird. Diese Form des Vorkeims kommt sehr allgemein den Gräsern zu: Secale, Triticum, Hordeum (XI, 4—10. 14. 15; XII, 2—5), Zea, Sorghum.*) Vereinzelt tritt sie auch in anderen Verwandtschaftskreisen auf: Pistia Stratiotes (VII, 23), Erythronium dens canis (XIX, 5. 6), Fritillaria imperialis, Funkia coerulea,**) Tradescantia virginica (XXIV, 20).

Endospermbildung.

Bei der grossen Mehrzahl der Monokotyledonen erfolgt rasch nach der Befruchtung eine reichliche Entwickelung von Endospermzellen; allerwärts durch gleichzeitige Bildung zahlreicher Tochterzellen um frei im Protoplasma des den Embryosack auskleidenden Wandbeleges auftretende Zellenkerne, bei welcher Zellbildung — wie bei der in nämlicher Weise vor sich gegangenen der Keimbläschen und ihrer Gegenfüsslerzellen — nur ein Theil des plastischen Inhalts der Mutterzelle verbraucht wird. — Die Zellenkerne der Endospermzellen sind bei ihrem ersten Sichtbarwerden bläschenförmige Gebilde, in deren Innerem keine festen Bildungen sich erkennen lassen.***) Die Grösse dieser Bläschen übertrifft in allen untersuchten Fällen die der späteren Kernkörperchen der betreffenden Zellenkerne (IX, 10 Pothos longifolia, zum Theil; XIII, 24 Leucojum vernum; XXIV, 12 Tritonia crocata). Fortgesetzte Untersuchungen haben auch in mir die Ansicht befestigt, dass die »freie Zellbildung«, wie überhaupt,†) so auch im Embryosack der Phanerogamen, stets im protoplasmatischen Wandüberzuge der Mutterzelle ihren Ausgangspunkt habe; dass die Fälle, in welchen sehr junge Zellenkerne in der Flüssigkeit des Mittelraums des Sackes frei schwimmend gefunden wurden, auf Störungen der ursprünglichen Anordnung des Zelleninhalts durch den Schnitt oder die Zergliederung zurück ge-

*) Entst. d. Embryo Taf. XI f. 10—13. 30—33.

**) Ebend. Taf. VII f. 26—34, Taf. VIII, f. 17—20.

***) Vergleiche Entst. d. Embryo, XI, 11.

†) Vergleiche Pringsheim, Bau u. Entw. d. Pflanzenzelle, Berl. 1854, 64, Anmerk.

führt werden müssen. — Der Wandbeleg des Embryosackes aus Protoplasma ist in vielen Fällen, namentlich bei Irideen und Liliaceen, nach Innen hin überhaupt nicht scharf begränzt; das Protoplasma selbst sehr dünnflüssig, bei Weitem nicht von der Zähigkeit und Consistenz, wie z. B. bei Ranunculaceen. Damit mag es im Zusammenhange stehen, dass von mir bei Monokotyledonen noch nicht die, bei mehreren Ranunculaceen, Papaveraceen u. a. m. Dikotyledonen beobachtete Erscheinung der Bildung von Kernen für Endospermzellen in der Protoplasmaschicht gesehen wurde, welche die Aussenseite des befruchteten Keimbläschens bekleidet.

Bei den meisten Formen von Monokotyledonen, welche ein bleibendes Endosperm erhalten, ist der Beginn der Entwickelung desselben im ganzen Umfange des Embryosackes gleichmässig vertheilt. Die Zellenkerne der künftigen Endospermzellen sind in ziemlich gleichen Entfernungen im Wandbelege vertheilt (IX, 10. 11; XII, 2. 9; XIII, 23; XVI, 6; XXIV, 12); die Bildung einer Zelle um jeden derselben erfolgt nahezu gleichzeitig, indem um jeden Zellenkern und eine ihn einhüllende Protoplasma-Masse eine — zunächst zarte, zerfliessliche — Zellhaut sichtbar wird. Waren die Zwischenräume zwischen den einzelnen Zellkernen gering, so wird durch Ausdehnung jener Zellhäute (wobei das Protoplasma mit dem von ihm eingeschlossenen Zellenkern deren Innenfläche überzieht, während im Centrum der Zelle ein mit wässeriger Flüssigkeit gefüllter Raum auftritt,) der Embryosack mit einer Schicht seitlich einander berührender Zellen ausgekleidet, welche der Innenfläche der Embryosackhaut angeschmiegt sind. Ein leichter Druck löset sie vorerst noch von derselben, bis die Membranen der Endospermzellen erhärten, dann erst haften sie jener fest an. Dieses Verhältniss ist ganz das nämliche, wie das der Keimbläschen zur Embryosackmembran. Auf der inneren, mit der Flüssigkeit des Mittelraumes des Embryosacks in Berührung stehenden Fläche ist die Schicht der Endospermzellen mit einer Lage von Protoplasma überzogen, in welcher der nämliche Vorgang sich bis zum Verbrauche des plastischen Inhaltes des Embryosackes, in der Regel auch bis zur vollständigen Ausfüllung desselben durch ein geschlossenes Gewebe wiederholt. Während der Anlagerung neuer Zellschichten auf die Innenfläche der bereits vorhandenen findet auch in diesen eine, oft sehr lebhafte Zellvermehrung statt; vorwiegend Theilung durch zu den Radien des Embryosackes rechtwinklige Scheidewände. Vorzugsweise auf dieser Form der Zellvermehrung, und im

minderen Grade auf radialer Streckung der peripherischen Zellen des Endosperms, beruht die meist sehr deutlich strahlige Anordnung der Zellen der äusseren Schichten desselben. So ist der Hergang namentlich bei den Gräsern mit geräumigem Embryosacke: den Paniceen, wie z. B. Sorghum, Zea, Panicum; ferner bei vielen Liliaceen, Amaryllideen und Irideen, u. A. bei Crinum capense (XIV, 9), Colchicum autumnale, Merendera caucasica (XVI, 9), Allium odorans und victoriale, Hemerocallis flava, Czackia Liliastrum, bei Hyacinthus, Scilla, Puschkinia, bei Iris pumila, Crocus vernus (XXIII, 23). Ist der Embryosack eng, so berühren sich schon die Zellen der ersten, der Wand selbst angelagerten Zellen des Endosperms bei ihrem zeitigen Wachsthum in der Längsachse des Sackes. Der Embryosack erscheint dann schon sehr frühe von geschlossenem Gewebe ausgefüllt. Dies ist namentlich der Fall bei den Triticeen: Secale, Triticum, Hordeum, Elymus (XI, 5. 15. 19; XII, 3); ferner bei Pothos longifolia (IX, 10—17, X, 4).

Die Anfüllung des Embryosackes mit Endospermzellen geht in etwas anderer Weise bei denjenigen Formen von Monokotyledonen vor sich, in deren Embryosäcken die Zellkerne der ersten Endospermzellen in weiteren Entfernungen von einander dem protoplasmatischen Wandbelege eingelagert auftreten, und deren junge Endospermzellen bei ihrer ersten Ausdehnung völlige Kugelgestalt erlangen, bevor sie seitlich einander berühren. Durch Annahme der Kugelform lösen sich die jungen Endospermzellen völlig vom Wandbelege, und treten frei schwimmend in den Mittelraum des Embryosackes. Indem nun einestheils die gleiche Zellvermehrung im Wandbelege des Embryosacks sich wiederholt, anderntheils in den jungen Endospermzellen die Bildung freier Tochterzellen oder auch Zelltheilung stattfindet, füllt sich der Embryosack binnen Kurzem mit einem Breie loser, zartwandiger Zellen, die endlich zum Gewebe sich zusammen schliessen, und deren Häute nun erst erhärten. So u. A. bei Leucojum vernum (XIII, 23), Gagea lutea, *) Scheuchzeria palustris (XXIV, 20). Auch bei diesem letzteren Verhalten der jungen Endospermzellen kann die vollständige Ausfüllung eines engen, schlanken Embryosackes sehr frühe erfolgen, indem die Endospermzellen, in den Mittelraum des Embryosackes gelangt, bei rascher Grössenzunahme jede für sich einen Querabschnitt des Sackes ganz und gar

*) Entst. d. Embryo, S. 24.

einnimmt, so dass der ganze Sack sehr bald nach der Befruchtung durch eine Längsreihe scheibenförmiger Endospermzellen ausgefüllt ist. So bei Pistia Stratiotes (VII, 22. 23); mit einer kleinen Modification, insofern nur der obere Theil des Embryosacks mit Endosperm sich füllt, der untere leer bleibt, ist das Gleiche für alle untersuchte Arten von Arum Regel (VII, 1. 2. 16. 17).

Die Füllung nur eines Theiles des Embryosackes mit Endosperm, das Leerbleiben des anderen Theiles, scheint unter den Aroïdeen ziemlich verbreitet zu sein. Bei Pothos longifolia sieht man häufig, aber nicht mit ausnahmloser Regelmässigkeit, den eben befruchteten Embryosack durch eine Querwand in zwei Zellen getheilt, deren obere die grössere ist. Nur in dieser oberen findet dann die Bildung von Endosperm statt (IX, 10. 11). Die endospermleere untere Zelle ist häufig noch am halbreifen Saamen als Anhängsel des Endospermkörpers kenntlich (X, 12,*x*). In anderen befruchteten Eychen derselben Pflanze findet man den Embryosack durchweges von Endosperm ausgefüllt (X, 4. 10). Bei Arum maculatum, orientale, ternatum hingegen wird regelmässig der schlank kegelförmige Embryosack, gleich nach Beginn der nur in seinen oberen zwei Dritttheilen eintretenden Endospermbildung, durch Anschwellen der untersten der jungen Endospermzellen etwas unter der Mittelgegend verstopft (VII, 16. 17). Unterhalb dieser Stelle findet keine Endospermbildung statt; das während des Reifens des Saamen beträchtlich wachsende untere Ende des Sackes stellt zu allen Zeiten einen von Flüssigkeit erfüllten Hohlraum dar. Den Boden dieser Höhlung nehmen die, zu ungewöhnlicher Grösse heranwachsenden, Gegnerfüsslerzellen der Keimbläschen ein (VII, 4). Bei Calla palustris füllt sich nach der Befruchtung zunächst nur der engere untere Theil des Embryosackes mit Endosperm; das kolbige obere Ende bleibt vorerst zellenleer (VII, 15. 16). — Bei Veltheimia viridiflora füllt sich nur die obere Hälfte des Embryosackes mit Endosperm; die untere bleibt leer (XVIII, 12). Obschon auch in der sie auskleidenden Protoplasmaschicht Zellenkerne auftreten (XVIII, 8), verschwinden diese doch späterhin wieder, ohne dass Endospermzellen um sie sich bilden. Auf dem Grunde des endospermleeren unteren Endes des Embryosackes findet sich im halbreifen Saamen häufig eine grosse Druse von Krystallen eines Kalksalzes (XVIII, 12). Kleinere Krystalle und Krystalldrusen desselben Salzes treten in den periphe-

rischen Zellen des unteren Theiles des Endosperms auf*) (XVIII, 12, 12, *b*).

Das Wachsthum, die Ausdehnung und Vermehrung der Zellen des Endosperms endigt nicht mit der Ausfüllung des Embryosackes, sei es des ganzen oder eines Theiles desselben. Doch ist bei vielen Liliaceen und Verwandten, deren Eychen bald nach der Befruchtung ziemlich die volle Grösse der reifen Saamen erlangen, dieses spätere Wachsthum nicht beträchtlich. Das Endosperm von Colchicum autumnale, Gagea lutea, Iris pumila, Crocus vernus u. A. nimmt nur um etwa ein Fünftheil seines Längs- und Querdurchmessers an Grösse noch zu, nachdem es den Embryosack ausfüllte. Die allgemeine Form des reifenden Saamens verändert sich währenddessen nicht. Das Wachsthum beruht hier in der Regel nur auf Dehnung der Endospermzellen; Theilungen von solchen kommen nur ausnahmsweise vor. Anders bei den Liliaceen, von deren Eykern nach der Füllung des Embryosackes noch ein beträchtlicherer Theil des Gewebes vorhanden ist; dieses Perisperm wird vom heranwachsenden Endosperm völlig verdrängt. So bei Czackia Liliastrum bei vorwiegendem Dickenwachsthum des Endosperms, bei Veltheimia viridiflora bei gleich starkem Längen- und Dickenwachsthum desselben. Ebenso bei Caricineen. Die sehr beträchtliche Vergrösserung des Endosperms wird vermittelt durch stetig sich wiederholende Dehnung und Theilung, durch radiale und tangentale Wände, der peripherischen Zellen desselben. — Bei den Aroïdeen hält das Endosperm, in derselben Weise nach allen Richtungen sich ausdehnend, in seiner Grössezunahme Schritt mit dem nach vollständiger oder theilweiser Ausfüllung des Embryosackes nocheintretenden, sehr beträchtlichen Wachsthum des jungen Saamens; da bei noch stärker in die Dicke, als in die Länge wachsend (VII, 16. 17. 4; 22—24; X, 10. 11. 12). Auf ebensolchen Vorgängen in Zellen der Aussenfläche des Endosperms beruht das bedeutende Wachsthum desselben bei den Gräsern. Hier aber ist das Wachsthum nicht allseitig von gleicher Intensität, sondern am Chalaza-Ende und zugleich an der, dem Anheftungspunkte des Eychens zugewendeten Längskante

*) Dass Endospermzellen Krystalle anorganischer Verbindungen führen, ist ein selten vorkommender Fall. Aus eigener Anschauung kenne ich keinen Zweiten. Schleiden erwähnt das Vorkommen nadelförmiger Krystalle in gewissen Zellen des Endosperms von Pothos rubricaulis (N. A. A. C. L. N. C. XIX, II, 87).

am stärksten, von da allseitig abnehmend, am Mikropyle-Ende und an der jener gegenüberliegenden Kante Null. Das Endosperm wächst vorzugsweise in von der Rückenfläche des Carpells und von der Mikropyle abgekehrter Richtung.

Das stärkste überhaupt bekannte derartige Wachsthum eines Endosperms besitzen Crinum capense und einige andere Amaryllideen mit »knollenförmigen«, gefässbündelförmigen Saamen.*) Die Vermehrung der peripherischen Endospermzellen beginnt zu einer Zeit, in welcher der Mittelpunkt des Embryosacks noch durch einen von wässeriger Flüssigkeit erfüllten Hohlraum eingenommen wird; die mehreren Lagen von Endospermzellen aber, welche den Embryosack auskleiden und den Embryo einhüllen, bereits ein fest geschlossenes Gewebe darstellen. Gleichzeitig mit dem Beginn der Vermehrung der peripherischen Zellen tritt in, zwischen den Zellen der mittleren Lagen sich bildenden Intercellularräumen Luft auf (XIV, 10). Diese Luftausscheidung in Intercellularräumen rückt sowohl gegen das mit Zellen sich füllende Centrum, als auch gegen die Peripherie des rasch an Umfang zunehmenden Endosperms vor, in dem Maasse, als die neu gebildeten, bei ihrer Entstehung ziemlich würfeligen Zellen radial sich strecken. Das Wachsthum des Endosperms, welches in circa 50 Tagen von 2 M.M. Durchmesser bis auf 18 M.M. Durchmesser zunimmt, sprengt nach einiger Zeit die Eyhülle, endlich auch die Kapselwand. Noch bevor das Integument völlig zerstört wird, tritt in den peripherischen Zellen des Endosperms Chlorophyll auf; in geringer Menge zwar, aber hinreichend der Aussenfläche

*) Vergl. R. Brown, Transact. Linn. Soc. XII, 149; Verm. Schr. II, 756; Prilliaux Ann. sc. nat. IV Sér. IX, 97, 102, der bereits die richtige Darstellung des Hergangs giebt. Ich selbst habe früher (Pringsheims Jahrb. I, 160) die Masse des reifen Saamens des Crinum capense (Amaryllis longifolia) für eine Umbildung des einzigen Integuments (vgl. S. 662 dieser Abhandlung) gehalten. Unzureichendes Material war die Ursache dieses Irrthums. In den Kapseln des C. capense finden sich in der Regel neben wenigen zur Entwickelung kommenden Saamen eine Anzahl fehlschlagender. Diese enthalten im mit wässeriger Flüssigkeit erfüllten Embryosacke einen, oft ziemlich weit entwickelten Embryo (XIV, 10), aber keine Spur von Endosperm. Junge, vor Kurzem befruchtete Saamen normaler Ausbildung hatten bei meiner damaligen Untersuchung mir nicht zu Gebote gestanden. Ich glaubte diese Hemmungsbildungen für stehengebliebene Entwickelungszustände nehmen zu dürfen, und erschloss aus ihnen irriger Weise, dass die Endospermbildung überhaupt gering oder Null sei. Bestärkt wurde ich darin durch die anderwärts beispiellose Beschaffenheit des reifen Endosperms: seine Luftlücken und seinen Chlorophyllgehalt.

des Endosperms eine blassgrüne Farbe zu geben. Bei weiterer Entwickelung des Saamens erstreckt sich die Chlorophyllbildung ziemlich tief ins Endosperm hinein, etwa bis in die zehnte Lage von Zellen, von der Peripherie nach Innen gezählt.

Bei allen endospermbildenden Monokotyledonen schliesst sich das Endosperm zu geschlossenem Gewebe um den jungen Embryo zusammen, bevor dessen Wachsthum und Ausbildung beendet ist. Sein ferneres Wachsthum hat unter Verdrängung eines Theiles des Endosperms zu erfolgen. Bei den Gramineen verschwindet während der Entwickelung des Embryo das auf früheren Zuständen die Embryoanlage allseitig einschliessende Endosperm (XI, 5. 9. 11. 15. 18, XII, 3) um das Wurzelende desselben her und an der dem Anheftungspunkte des Eychens abgewendeten Seite vollständig. Bei den eyweisslosen Aroïdeen wird das Endosperm, bei Symplocarpus im jungen Saamen reichlich vorhanden (VIII, 7), gegen die Zeit der Reife hin vom Embryo vollständig aufgezehrt.*)

Bei der Mehrzahl der eyweisslosen Monokotyledonen, den Najadeen, Potamogetoneen, Alismaceen, Orchideen, Cannaceen u. s. w. unterbleibt dagegen die Bildung eines geschlossenen Gewebes von Endospermzellen ganz und gar. Bei Zostera, Ruppia, Zannichellia, Triglochin treten nur in seltenen Fällen freie Zellkerne im Wandbeleg des Embryosackes auf; die Bildung von Zellen um diese Kerne sah ich hier nie. Noch seltener ist das Erscheinen von neuen Zellkernen im befruchteten Embryosacke von Orchideen: doch habe ich hier in einem Falle eine wohl ausgebildete, kernhaltige freie Zelle gesehen.**) Im befruchteten Embryosack von Scheuchzeria palustris pflegt die Endospermzellenbildung reichlicher zu sein (XXV, 20), doch ohne dass die Zellen zu einem Gewebe zusammen träten. Bei zahlreichen Untersuchungen verschiedener Arten von Canna endlich ist mir nie auch nur eine Andeutung von Endospermzellenbildung vorgekommen.

Entwickelung des Embryo aus dem Vorkeime.

Die Zellenvermehrung, vermittelst deren aus der Endzelle des Vorkeims das Embryokügelchen entsteht, unterscheidet sich nur bei Orchi-

*) Reife Saamen habe ich nicht untersuchen können.

**) Entst. d. Embryo Taf. II f. 5.

deen, bei Ruppia und Zostera, ausser diesen aber kaum bei einer einzigen monokotyledonen Pflanze in so scharfer Weise von der des Vorkeimes, wie bei der Mehrzahl der Dikotyledonen. Auch bei Monokotyledonen mit im Allgemeinen fädlichem Vorkeime tritt eine Zellvermehrung nach zweien, oder nach allen dreien Richtungen des Raumes wenigstens in der einen Gliederzelle des Vorkeims ein, welche der als Mutterzelle des Embryokügelchens sich erweisenden Endzelle des Vorkeims zunächst angränzt. So bei Najas major (I, 20), Triglochin maritimum (I, 26). Der Zellvermehrungsform des Vorderendes des massigen Vorkeims noch weit gleichartiger ist die des Embryokügelchens der Gräser, an deren Embryonen die Gränze zwischen dem Embryo im engeren Sinne und dem zum Träger gewordenen Vorkeime erst dann hervortritt, wenn dieser abzusterben, jener seine Zellen mit assimilirten Stoffen zu füllen beginnt.

Die Schnelligkeit der Ausbildung des Embryo steht in geradem Verhältniss zur Dauer der Zeit, nach deren Verlauf das befruchtete Keimbläschen in zwei Zellen sich theilt (S. 697). Das Wachsthum und die Ausbildung des Embryo ist eine sehr rasche bei den Gräsern, Najadeen, Potamogetoneen; eine sehr langsame bei der Mehrzahl der Orchideen, Liliaceen und Amaryllideen. Der Embryo von Leucojum vernum z. B. ist Mitte Mai höchstens fünfzellig (Zellen des Trägers mit gerechnet), oft noch einzellig. Merendera caucasica, Colchicum autumnale, Crocus vernus brauchen vom Beginn der Bildung des Embryokügelchens bis zur Anlegung des Kotyledon mindestens zwei Monate; Secale cereale, Triticum vulgare und andere Cerealien kaum vierzehn Tage. Von der ersten Theilung der Endzelle des Vorkeims durch eine Längswand, bis zur Bildung der sämmtlichen (60 bis 80) Zellen des kugelförmigen Embryo von Orchis Morio verstreichen mindestens 4 Wochen; bei Zannichellia palustris liegt zwischen den beiden entsprechenden Entwickelungsstufen kaum mehr als ein Viertheil dieses Zeitraumes.

Die Unterbrechung der Weiterentwickelung der durch geschlechtliche Zeugung gebildeten neuen Pflanzen, welche mit dem Reifen des Saamens eintritt, erfolgt bei keiner monokotyledonen Pflanze auf so niedriger Entwickelungsstufe, wie bei einigen Dikotyledonen (bei Monotropa und Pyrola z. B.). Bei Monotropa ist der reife Embryo zweizellig, bei Pyrola secunda 8—16zellig; die Zellenzahl der Embryonen von Orchideen, der mindest ausgebildeten, ist eben erwähnt.

Es ist eine, auch unter den Dikotyledonen weit verbreitete Erscheinung, dass während des Hervorsprossens der ersten Blätter, der beiden Kotyledonen aus der Achse des Embryo, als welche das Embryokügelchen sich darstellt, die Weiterentwickelung des Achsenendes oberhalb der Kotyledonen völlig stillsteht. Die Terminalknospe ist punktförmig, eine kaum oder gar nicht hervortretende Zellengruppe, welche die tiefste Stelle zwischen den Kotyledonen einnimmt. So bei Labiaten, Scrophularineen, Asclepiadeen, Syngenesisten u. v. A. Aehnlich bei der Mehrzahl der Monokotyledonen. Da bei diesen, namentlich bei den Liliaceen und nächstverwandten, der Kotyledon gleich von Anfang an sehr dick und massig angelegt wird, und rasch in die Dicke wächst, während das Längenwachsthum der embryonalen Achse sich verlangsamt oder stillsteht, so nimmt jener sofort den mathematischen Scheitelpunkt des Embryo ein, das morphologische Ende der Achse weit zur Seite schiebend.*) Nur das Dickenwachsthum derselben begleitet die Entwickelung des Kotyledon. Dies die Ursache, durch welche die Terminalknospe des Embryo meist zu einer nur schwachen Hervorragung im Grunde der basilaren Spalte des Kotyledon umgebildet wird. In einigen Fällen plattet sie sich vollständig ab, die convexe Wölbung gänzlich einbüssend.**) So ist der Vorgang indess nicht ausnahmslos. Die Dicke des Kotyledon ist bisweilen im Vergleich zur Masse des Embryo wenig beträchtlich; die Entwickelung des Endes dieses während des Auftreten jenes nicht gehemmt. Der Kotyledon, in allen beobachteten Fällen als stängelumfassendes Blatt, als Ringwulst um die Stängelspitze auftretend, wird bei Pistia Stratiotes als dünner, häutiger Saum sichtbar, in dessen Mitte das Ende des Embryo als sehr stumpfer Kegel emporragt (VII, 25). Aehnlich bei Pothos longifolia. Auch bei der Entwickelung des ersten Blattes des Embryo der Orchideen, die erst nach der Trennung der Saamen von der Mutterpflanze, während der Keimung erfolgt, walten ähnliche Verhältnisse ob***) (VI, 15. 16); nicht minder bei den Formen, deren hypokotyle Achse eine geraume Zeit vor dem Hervorsprossen des ersten Blattes eintretende, einseitige Wucherung zeigt: vielen Najadeen und den Gräsern.

*) Vergl. Jussieu, A. de, in Ann. sc. nat. II. Ser. II, 349; Schleiden Grundz. II. Aufl. 374.

**) So z. B. bei Fritillaria imperialis am reifenden Embryo (Entst. d. Embryo, 21).

***) Vergl. Irmisch, Beitr. z. Biol. d. Orchid. Lpzg. 1853, 6. 23. 26. 61.

Diese einseitige Förderung der Entwickelung der embryonalen Achse, stets an der, der Anheftungsstelle des Eychens zugewendeten Seite des Embryo eintretend, stellt sich zur Lage der morphologischen Spitze des Embryo in das nämliche Verhältniss, wie der Kotyledon der Liliaceen. Der einseitige Auswuchs der Achse des Embryo, rasch in die Dicke sich entwickelnd, rückt dessen Endknospe zur Seite. Das Bild, welches gelungene Durchschnitte der Embryonen von Gräsern geben, lässt keinen Zweifel darüber, dass das Hervorsprossen dieser Wucherung, des Scutellum, auf der Vermehrung einer Gruppe von Zellen nahe unterhalb des Embryoscheitels beruht (XI, 9. 16).*) Während der Anlegung dieses Auswuchses hält die Entwickelung der Endknospe des Embryo inne. Erst nachdem die Wucherung der embryonalen Achse Platten- oder Schildform erreicht hat, wölbt die Endknospe sich aufs Neue zur Halbkugel oder zum Kegel, und nun erscheint an ihr das erste Blatt als häutige, rings umfassende Scheide, mit der Rückenfläche der Wucherung der hypokotylen Achse zugekehrt (XI, 12, *a*, *b*).

*) Schon A. de Jussieu hat gezeigt (a. a. O. 354, 359), dass die Formen der Embryonen der Najadeen, von Potamogeton an durch Ruppia, Posidonia, Zostera zu den Triticeen, endlich zu den Oryzeen, eine ununterbrochene Reihe allmäliger Steigerungen eines und desselben Verhältnisses darstellen. Die von mir früher gegen diese Anschauung aus der Entwickelungsgeschichte des Embryo von Zostera geschöpften Zweifel (Bot. Zeit. 1852, 141 ff.) erachte ich nach Erlangung genauerer Kenntniss des Entwickelungsganges der Embryonen von Gräsern nicht mehr für begründet. – Wenn A. de Jussieu den Embryo der Cyperaceen dem der Gräser gleich stellt, so kann ich ihm nicht beipflichten. Das zweite Blatt dieser Embryonen ist dem unzweifelhaften Kotyledon derselben gegenständig, nicht superponirt (XII, 20—23). Ich habe auch jetzt noch das Scutellum der Gräser und die analogen Bildungen von Zostera u. s. w. als Auswuchs der Achse, nicht als Blatt aufgefasst. Der aus der Stellung des nächsten Blattes hergenommene Grund dafür hat durch die Auffindung der ½ Stellung der ersten Blätter an den Seitensprossen von Colchicum, Calla palustris, Tofieldia u. a. Monokotyledonen; Irmisch, Zwiebelgew. Bal. 1850, 122 (A. Braun Verh. Bot. Ver. Brandenb. I. 1859, 90) zwar an Gewicht verloren. Aber die Analogie mit Ruppia, die durch diese Pflanze vermittelte Aehnlichkeit mit Potamogeton, und die von der der Blätter so weit abweichende Form und Beschaffenheit des Scutellum der Triticeen sind Thatsachen, welche auch der Bildung des Scutellum von Oryza gegenüber (XII, 24) die Jussieu'sche Deutung noch immer als die wahrscheinlichere erscheinen lassen.

Monströse Entwickelung von Fortpflanzungszellen innerhalb des Eychens.

Wesentliche Abweichungen von der normalen Fortbildung des Pollenschlauches am und im Embryosacke, und der Keimbläschen sind bis jetzt nur bei einer einzigen Pflanze vorgekommen: bei Crocus vernus, und zwar an künstlich getriebenen, bereits Ende Februars im Zimmer blühenden Exemplaren. Unter vielen Eychen normaler Entwickelung fanden sich, in den nämlichen Fruchtknoten mit ihnen, die Missbildungen in geringer Anzahl. Sie waren zweierlei Art: theils Wucherungen der Pollenschlauchenden, theils solche der Keimbläschen. — Die Pollenschlauchwucherungen schliessen sich in den einfacheren Fällen ziemlich nahe an die bei Canna öfters vorkommenden an. In einem Falle war der Pollenschlauch ausserhalb des Embryosackes verblieben, hatte sich aber nach dem Auftreffen auf den Sack noch beträchtlich in die Länge entwickelt, sich rückwärts und seitwärts gekrümmt und mehrfach sich verschlungen. Das untere, allein noch vorhandene Keimbläschen war hier in regelmässiger Weise quer getheilt (XXIV, 4). In einem anderen Eychen, in dessen Endostom zwei Pollenschläuche eingetreten waren, hatte der eine den Embryosack durchbrochen; sein Ende hatte sich mehrfach gekrümmt. An diesem Ende hafteten die Keimbläschen, inhaltsarm, verschrumpft, weiterer Entwickelung offenbar unfähig (XXV, 5, *a* und *b*). In einem dritten Eychen war der Pollenschlauch gleichfalls ins Innere des Embryosacks gedrungen und in dessen Scheitelwölbung zu einer dickhäutigen, kugelförmigen Auftreibung, ungefähr vom Volumen eines Keimbläschens angeschwollen, von welcher aus ein kurzer, blinddarmähnlicher Fortsatz frei in den Innenraum des Sackes ragte. Die Keimbläschen waren völlig verschwunden. Der extremste Fall ist als eine Steigerung des eben erwähnten zu betrachten. Der Pollenschlauch war, nach einigen Krümmungen an der Aussenseite des Embryosacks, in dessen Scheitelgegend eingedrungen; hier war er zu einer birnförmigen Blase, ebenfalls vom Umfange eines Keimbläschens, erweitert, und von dieser Erweiterung entsprangen zwei lange, cylindrische Fortsätze; der eine, kürzere, mit spitzem Ende; die Endigung des anderen mehrfach gebogenen war durch einen der zwei, das Ey öffnenden parallelen Längsschnitte getroffen und entfernt worden (XXIV, 8).

Die beobachteten monströsen Entwickelungen der Keimbläschen bestehen in der Erweiterung eines derselben zu einem Sacke von etwa einem Zehntel des Volumens des Embryosacks. In dem einen Falle hatte dieser Sack eine gestreckte Form, und war mehrfach gebogen (XXIV, 7); im anderen war er verkehrt birnförmig, und enthielt im freien unteren Ende drei kleine, rosettenartig geordnete Zellen (XXIV, 6).

Erklärung der Abbildungen.

Tafel I.

Figur 1—25. Najas major. (Mitte August 1854.)

Fig. 1. Längsdurchschnitt einer männlichen Blüthe, 20fach vergr. *a* Anthere, *α* deren Fächer; *bb* Bracteen, *ff* Blätter, *ss* Laubsprossen, *v* Scheidenblatt.

Fig. 2. Zwei Pollenmutterzellen aus einer jungen Anthere, 150fach vergrössert.

Fig. 3. Pollenmutterzelle weiterer Entwickelung nach der Auflösung des primären Kernes, 3^a unmittelbar nachdem sie in das Wasser des Objectträgers gebracht wurde; 3^b vier Minuten später, nachdem die eyweissartigen Stoffe der Flüssigkeit, welche das früher vom primären Kerne eingenommene Centrum der Zelle erfüllt, zu einigen Klumpen geronnen sind. Gleiche Vgr.

Fig. 4. Pollenmutterzelle weiterer Entwickelung, nach Bildung eines Kernes für jede der vier Pollenzellen.

Fig. 5, 6. Zwei Pollenmutterzellen, einem und demselben Antherenfach entnommen. F. 5 kurz vor der Bildung der, zwischen je zweien der secundären Zellenkerne verlaufenden Scheidewände, nach Auftreten der, jenen Scheidewänden entsprechend verlaufenden Körnerplatten. Fig. 6 gleich nach Bildung der Scheidewände. Gleiche Vgr.

Fig. 7. Tetrade von Pollenzellen, beim Beginne der Vereinzelung derselben. Gleiche Vgr.

Fig. 7^b. Eine dieser Pollenzellen vereinzelt, nach Behandlung mit Jod und Schwefelsäure 300fach vergrössert. Die schwach aufgequollene Zellhaut ist in ihrer ganzen Dicke grünlich blau gefärbt. Die Zelle enthält bereits zwei Kerne.

Fig. 8. Drei junge Pollenzellen, kurz nach der natürlichen Vereinzelung einer Tetrade, 200fach vergr. In einer der Zellen nur ein, in Auflösung begriffener, in jeder der anderen zwei Zellenkerne.

Fig. 9. Junge Pollenzelle weiterer Entwickelung. Es ist nur ein Zellenkern in ihrem Inneren wahrzunehmen. Eine grosse Zahl zur Zeit noch kugeliger Amylumkerne ist in schleimigem Belege der Innenwand der Zelle aufgetreten. Gleiche Vgr.

Fig. 10. Einzelne Pollenzelle, kurze Zeit vor der Reife. Die Amylumkörner, stabförmig geworden, sind in einen Wandbeleg und eine, den Aequator der Zelle schneidende Querplatte geordnet. Gleiche Vgr.

Fig. 11. Schlauchtreibende Pollenzelle, aus dem Fache einer aufgesprungenen Anthere genommen. Der Kern ist verschwunden; die Amylumkörner sind grösstentheils in den Pollenschlauch gewandert.

Fig. 12. Eines der Amylumkörner, 1500fach vergr.

Fig. 13. Längsdurchschnitt des Kernes eines unbefruchteten Eychens, 150fach vergr. Keimbläschen und deren Gegenfüssler füllen den keuligen Embryosack fast vollständig aus.

Fig. 14. Längsdurchschnitt einer weiblichen Blüthe, sehr bald nach Ankunft des Pollenschlauchendes am Scheitel des Embryosacks. Vgr. 15. Das von zwei Integumenten überzogene Eychen ist zur Zeit halbgewendet, der Kern aber gerade. Das leitende Zellgewebe hängt als ein Büschel aus grossen keulenförmigen Zellen in die Fruchtknotenhöhle.

Fig. 14^{b}. Das Eychen aus dem nämlichen Präparate, 80fach vergr.

Fig. 14^{c}. Der Scheitel des Eykerns und Embryosacks aus dem nämlichen Präparate, 250fach vergr., das tiefe Eindringen (Einstülpen?) des angeschwollenen, von herabgewanderten Amylumkörnern vollgestopften Pollenschlauchendes in den Embryosack deutlicher zu zeigen.

Fig. 15, 16. Embryosäcke und Kernwarzen aus Längsschnitten vor Kurzem befruchteter Eychen, in 150facher Vergr. In beiden Fällen ist das Pollenschlauchende nur wenig tief in den Embryosack gedrungen; das unbefruchtet gebliebene obere Keimbläschen noch vorhanden. In Fig. 16 Andeutung von Endospermbildung.

Fig. 17. Befruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Zur halben Wendung des Eyes ist eine halbe, 90^{0} betragende, Krümmung seines Kerns gekommen. *aa* sind Stücke der dünnen Fruchtknotenwand. Vgr. 20.

Fig. 17^{b}. Der Embryosackscheitel nebst dem Pollenschlauch. Aus dem nämlichen Präparate, 150fach vergr.

Fig. 18. Aehnliches Präparat, die Zeichnung umfasst den ganzen Embryosack. Vorkeim bereits eine dreigliedrige Zellreihe; fehlschlagendes Keimbläschen noch vorhanden. Zwei (transitorische) Endospermzellen haben sich gebildet und erscheinen links der Wand des Embryosackes angeschmiegt.

Fig. 19. Eykern eines befruchteten Eyes ähnlicher Entwickelung im Längsdurchschnitt. Das in den Embryosack eingedrungene, angeschwollene Pollenschlauchende erscheint etwas verschrumpft. Vgr. 120.

Fig. 20. Theil eines Längsdurchschnittes aus einem weiter vorgerückten jungen Samen, in 200facher Vgr. Unterhalb der zwei Zellschichten der Kernwarze haftet die geschwollene Trägerzelle des jungen Embryo an der Innenwand des Embryosackes, neben ihr das fehlgeschlagene Keimbläschen. Einige freie Zellenkerne, Andeutungen transitorischer Endospermbildung, sind in der Nähe dem Wandbeleg des Embryosackes eingebettet.

Fig. 21. Längsdurchschnitt eines jungen Embryo, 100fach vergr.

Fig. 22. Junger Embryo, weiter vorgerückt, Vgr. 50.
Fig. 23. Embryo an welchem die Bildung des Kotyledon beginnt, in 30facher Vergr.
Fig. 24. Embryo dessen Kotyledon die Endknospe zu umscheiden beginnt. Gleiche Vgr.
Fig. 25. Der Reife naher Embryo im Längsdurchschnitte. Vgr. 20.
Fig. 25^{b}. Plumula nebst deren Scheide aus demselben Präparat, 100fach vergr.

Figur 28, 29. Stratiotes aloïdes *).

Fig. 28. Reifer Embryo im Längsdurchschnitt, Vgr. 15.
Fig. 29. Plumula desselben, nahe ihrer Basis quer durchschnitten. Vgr. 30.

Figur 31, 32. Triglochin maritimum. (Mitte Juli 1859.)

Fig. 31. Spitze des Eykerns und Embryosackes eines vor nicht langer Zeit befruchteten Eychens. In der Kernwarze ist der Lauf des Pollenschlauchs noch kenntlich. Am unteren Ende des langen Vorkeims, neben dessen Trägerzelle das fehlgeschlagene Keimbläschen noch intact an der Innenwand des Embryosackes haftet, beginnt die Bildung des Embryokügelchens. Von Endospermbildung ist keine Spur vorhanden. Vgr. 150.
Fig. 32. Endostom, Kernwarze und oberer Theil des Embryosackes aus einem halbreifen Samen im Längsschnitt. Der Pollenschlauch ist noch immer wohl erhalten; sein Lauf innerhalb der Kernwarze aber durch den Schnitt nicht blosgelegt. Am unteren Ende des Embryoträgers ist nur der Anfang des Wurzelendes des bereits sehr grossen Embryo gezeichnet. Von Endospermbildung auch hier keine Andeutung. Gleiche Vgr.

Tafel II.

Figur 1– 7. Ruppia maritima.

Fig. 1. Fruchtknoten im Längsschnitt, jung. Vgr. 50.
Fig. 1^{b}. Das Eychen daraus. Vgr. 200.
Fig. 2. Eychen, kurz vor dem Befruchtetwerden, im Längsdurchschnitt. Vgr. 80.
Fig. 2^{b}. Der Embryosack daraus. Vgr. 250.
Fig. 3. Befruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 80.
Fig. 3^{b}. Die Scheitelgegend desselben, mit Weglassung des äusseren Integuments in 300facher Vgr. Das ungleichmässige Wachsthum des Eys hat bereits die Embryoanlage von der Mikropyle eine Strecke weit entfernt. Der Pollenschlauch kriecht diese Strecke entlang zwischen Embryosackhaut und Gewebe des Eykerns hin.
Fig. 4. Ein Fruchtknoten weiter vorgerückter Entwickelung im Längsdurchschnitt. Die Wegrückung der Embryoanlage vom Exostom ist sehr gesteigert. Auch das Endostom fällt mit diesem nicht mehr zusammen. Vgr. 30.

---

*) Die Mittheilung reifer Samen verdanke ich Prof. Mettenius.

Fig. 5. Die Embryo-Anlage daraus. Vgr. 300.
Fig. 6. Junge Frucht im Längsdurchschnitt. Vgr. 30.
Fig. 6^{b}. Die Embryoanlage daraus. Vgr. 200.
Fig. 7. Halbreifer Embryo, längsdurchschnitten. Vgr. 30.

Figur 8—16. Zannichellia palustris.

Fig. 8. Fruchtknoten zur Blüthezeit im Längsdurchschnitt. Auf der Narbe einige schlauchtreibende Pollenkörner. Vgr. 100.
Fig. 9. Der Embryosack aus einem längsdurchschnittenen Eychen ähnlicher Entwickelung. Vgr. 250.
Fig. 10. Scheitelwölbung des Embryosacks, Kernwarze, vom Pollenschlauch durchzogen, eines befruchteten Eychens. Ueber der stark geschwollenen Trägerzelle des Vorkeims das unbefruchtet gebliebene zweite Keimbläschen. Vgr. 200.
Fig. 11. Scheitelwölbung eines frei gelegten Embryosackes mit einem fehlgeschlagenen, und einem zum Träger und Embryokügelchen entwickelten Keimbläschen. Gleiche Vgr.
Fig. 12. Oberer Theil eines weiter entwickelten, frei präparirten Embryosackes; an der Wand desselben einige freie Zellkerne. Gleiche Vgr.
Fig. 13. Junger Embryo, an welchem der Kotyledon vor Kurzem angelegt wurde. Vgr. 150.
Fig. 14. Junger Embryo weiterer Entwickelung, längsdurchschnitten. Vgr. 30.
Fig. 15. Späterer Zustand eines solchen. Vgr. 15.
Fig. 16. Keimpflänzchen. Vgr. 5.

Figur 17—19. Potamogeton crispus.

Fig. 17 Unbefruchtetes Germen im Längsdurchschnitt. Vgr. 30.
Fig. 18. Der Embryosack aus dem längsdurchschnittenen Eychen eines solchen. Vgr. 250.
Fig. 19. Mikropyle, oberes Ende des Eykerns und Embryosackes unmittelbar nach Ankunft des Pollenschlauches im Längsdurchschnitt. Gleiche Vgr.
Fig. 20. **Alisma Plantago.** Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 150.
Fig. 21. Eykern und in der Kernwarze haftender Pollenschlauch, aus einem längsdurchschnittenen Eychen derselben Pflanze. Gleiche Vgr.

Figur 22—28. Lemna minor.

Fig. 22. Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 150.
Fig. 23. Reifer Samen, längsdurchschnitten. Unter dem angeschwollenen Endostom, dessen Zellen einzeln gezeichnet sind, die schräg rückwärts gerichtete Plumula des Embryo. Die zellig schattirte Masse, deren Achse dieser einnimmt, ist das Endosperm. Vgr. 50.
Fig. 23^{b}. Die Plumula (das abgeplattete zweite Stängelglied) desselben Präparats in 300facher Vgr. Man bemerkt am Grunde derselben die Anlage des dritten Internodium, in die Substanz des zweiten in ähnlicher Weise eingesenkt, wie die des ersten es in den Kotyledon ist.

Fig. 24. Beginn der Keimung. Das Hinterende des Embryo ist aus dem Samen hervorgetreten; das zweite Internodium der Pflanze, die Plumula, ist beträchtlich gewachsen; in seinem Grunde ist die Anlage des 3. Internodium bemerklich. Das Endostom (die Embryotega) ist abgestossen. Vgr. 50.

Fig. 25. Etwas weiter vorgerückter Zustand, ebenfalls im Längsdurchschnitt. Seitlich an der Keimpflanze haftet die Embryotega. Unter derselben bemerkt man im Innern des Gewebes die Anlage der ersten Wurzel. Gleiche Vgr.

Fig. 25^{b}. Diese Wurzel in 400facher Vgr. Man sieht, dass ihre Wurzelhaube, von dem deckenden Gewebe völlig gesondert, von der anderer Nebenwurzeln nicht abweicht.

Fig. 26. Keimender Saame ähnlicher Entwickelung wie der vorige; die ihn zerlegenden Schnitte sind rechtwinklig zu denen geführt, welche das Präparat Fig. 28 herstellten. Das zweite Stängelglied ist bereits platt; die Anlage des dritten an der einen Seite seines Grundes hat an Grösse gegen die Fig. 24 zugenommen. Gleiche Vgr.

Fig. 27. Weiter entwickelter Zustand, nach Hervorbrechen der ersten Nebenwurzel, völliger Ausbreitung des zweiten Internodium und Heranwachsen des dritten; im Längsdurchschnitt senkrecht auf die Flächen der Stängelglieder. Gleiche Vgr.

Fig. 28. Eine Keimpflanze gleicher Entwickelung, bei 20facher Vgr. von vorn gesehen.

Fig. 28^{b}. Das zweite Internodium derselben mit anhaftender Wurzel, isolirt.

Fig. 28^{c}. Der Kotyledon und das erste Stängelglied ebendaraus.

Fig. 28^{d}. Das dritte Stängelglied ebendaraus, an seinem Grunde jederseits die Anlage eines neuen.

Tafel III.

Figur 1—24. Orchis Morio.

Fig. 1. Querdurchschnitt der Säule dicht über der Narbe, Mitte Februars vor der Blüthe, *a* Grund des Rostellum, *l* Lippe, *e e* Basis der seitlichen Anhängsel der Säule (der Staminodien). Vgr. 30.

Fig. 2. Querschnitt aus der nämlichen Säule, höher, dicht unter den Enden der Antherenfächer geführt und von unten gesehen, so dass die Enden der Antherenfächer, die künftigen Caudiculae (*c c*) durch eine dünne Schicht des Gewebes des Rostellum (*a*) durchschimmern. Gleiche Vgr.

Fig. 3. Querdurchschnitt derselben Säule, durch die Enden der Antherenfächer gelegt. Vgr. 90.

Fig. 4. Querdurchschnitt der ganzen Knospe, aus welcher jene Säulenquerschnitte entnommen waren, nahe dem oberen Ende des tief eingefalteten Mittellappens des Rostellum (*a*) gelegt. Vgr. 25.

Fig. 5. Querschnitt aus derselben Knospe, durch die Mitte der Antherenfächer gehend. Gleiche Vgr.

Fig. 6. Säule aus einer Ende Februar geöffneten Knospe, von vorn gesehen. Die Lage der hinteren Placenta im Germen ist durch punktirte Linien (*p*) angedeutet; *l* Stumpf der weggeschnittenen Lippe; *b b*^{1} die beiden hinteren Abschnitte der Narbe; *a* der vordere derselben (das Rostellum); *d* dessen tief eingefalteter vorderer Zipfel. Vgr. 20

Fig. 7. Durch einen axilen Längsschnitt geöffnete solche Knospe, deren Perigonialblätter weggeschnitten sind, *m* Connectiv der Anthere; Bedeutung der übrigen Buchstaben wie zuvor. Vgr. 27.

Fig. 8. Längsdurchschnitt eines Faches aus einer Anthere ähnlicher Entwickelung, *ma* Massulae, *di* das in einem Winkel von etwa 30^{0} auf seiner Fläche durchschnittene Dissepiment. Vgr. 30.

Fig. 8^{b}. Ein Stück dieses Präparats aus der Mitte des Antherenfachs in 200facher Vgr. Der Inhalt der Zellen (Pollenmutterzellen) der einen Massula ist vollständig gezeichnet, in der anderen nur die Lage der Zellkerne angedeutet. Rechts von den beiden Massulis die längsdurchschnittene, aus drei Zellenlagen bestehende Wand des Antherenfachs.

Fig. 8^{c}. Die Gegend um den Grund des rechten Antherenfachs aus dem nämlichen Präparate, 200fach vergrössert. Die unterhalb der rudimentären untersten Massulae gelegene Gruppe von Parenchymzellen, aus denen ein Strang später zur Caudicula sich umbildet, ist jetzt ihren Nachbarzellen noch gleichartig (wie auch aus Fig. 3 zu ersehen).

Fig. 9. Die Ecken zweier Massulae aus einer, am 20. März querdurchschnittenen Anthere, nach Behandlung mit Jod und Schwefelsäure 200fach vergrössert. Die aufgequollenen Gränzen jeder Massula (die verdickten Membranen der Urmutterzellen des Pollens) erscheinen jetzt noch durch und durch in blassblauer Färbung. Noch ist keine Schicht dieser Häute zu Cuticula umgewandelt. Die Pollenmutterzellen sind noch nicht in Tetraden getheilt.

Fig. 10. Stück der Aussengränze einer Massula, am 4. April dargestellt, nach Behandlung mit Jod und Schwefelsäure 500fach vergrössert. Die Gränzen der zu Tetraden von Pollenzellen umgewandelten Mutterzellen sind innerhalb der zu blassblauer Gallerte aufgequollenen Membranen der Tetraden deutlich kenntlich. Eine kappenförmige Schicht der nach aussen gekehrten Wand jeder der Tetraden der Oberfläche der Massula verhält sich jetzt als Cuticula. Sie ist nicht aufgequollen und blassbraun gefärbt.

Fig. 11. Tetrade der Oberfläche, Fig. 12. Tetrade des Inneren einer Massula aus einem ähnlichen Präparate, durch gelinden Druck aufs Deckglas vereinzelt, in gleicher Vgr.

Fig. 13. Kante eines frischen Durchschnitts einer Massula, am 10. April. Die Cuticula ist um vieles stärker entwickelt. Vgr. 300.

Fig. 14. Membranen einer durch Quetschung vereinzelten und ihres Inhalts entleerten Tetrade gleicher Entwickelung. Vgr. 500.

Fig. 15. Die an einander haftenden Cuticula-Kappen aus einer durchschnittenen Massula gleicher Entwickelung, nach Wegschaffung der Zellstoffschichten der Häute durch vorsichtiges Waschen in Schwefelsäure, bei gleicher Vgr. von Innen gesehen.

Fig. 16. Durchschnitt einer Anthere gleicher Entwickelung, längs durch das eine Fach gelegt, die jetzt vom umgebenden Parenchym gesonderte Caudicula zu zeigen: *a* Seitentheil des Rostellum, darin durch einen Schatten die Gewebstelle angedeutet, welche zum Retinaculum sich umbildet. Vgr. 10.

Fig. 16^b. Der Theil dieses Präparats, welcher die längsdurchschnittene Caudicula enthält, in 150facher Vgr.

Fig. 17. Eine der, in Wasser leicht sich vereinzelnden, dickhäutigen Zellen aus einer Caudicula gleicher Entwickelung, 500fach vergrössert. Im Innern zahlreiche Tropfen das Licht stark brechender, zäher, halbflüssiger Substanz.

Fig. 18. Einige Zellen aus einem dünnen Schnitte des zum Retinaculum sich umbildenden Gewebes aus einer Knospe gleicher Entwickelung. In jeder Zelle ein grösserer Klumpen und zahlreiche kleine Tropfen jener viscinartigen Substanz.

Fig. 19. Oberes Stück des zarten Längsdurchschnitts aus einer Placenta, am 26. März (1859) aus einer Knospe dargestellt. Vgr. 300.

Fig. 20. Das obere Ende einer Placenta ähnlicher Entwickelung, bei gleicher Vgr. von vorn gesehen.

Fig. 21. Ganze Placenta, am 3. April (1853) von vorn gesehen. Vgr. 75.

Fig. 22. Stück des Querschnitts der, in der Entwickelung am Weitesten vorgerückten Mitte einer Placenta, am 6. April 1859, mit der Anlage zweier Eychen. In der centralen Zelle beider zwei, noch durch keine Querwand geschiedene Zellkerne: Anfang der Bildung des axilen Zellstranges des Eychens. Vgr. 200.

Fig. 23. Stück des Querschnitts des oberen Endes einer jungen Placenta, zur nämlichen Zeit. Daran die durch Grösse ausgezeichnete Anfangszelle eines Eychens. Vgr. 150.

Fig. 24. Längsdurchschnittsansicht eines noch in der Entwickelung begriffenen jungen Eychens, Mitte April (1853). Vgr. 100.

Tafel IV.

Figur 1—19. Orchis Morio.

Fig. 1. Junges Eychen, Seitenansicht. Durch die Zellen der peripherischen Schicht schimmern die zwei Zellen des axilen Stranges hindurch. Vgr. 300, wie auch die der folgenden Figuren.

Fig. 2. Scheitelansicht eines noch jüngeren Eychens. *a* die vierseitige Scheitelzelle.

Fig. 3. Scheitelansicht eines Eychens von der Entwickelung des Fig. 1 dargestellten etwas schräg genommen.

Fig. 4. Scheitelansicht eines weiter entwickelten Eychens, an welchem eine der der Scheitelzelle *a* benachbarten Zellen bereits durch eine Längswand getheilt ist.

Fig. 5—10. Schematische Zeichnungen zur Erläuterung der Zellenfolge bei Anlegung der Eychen. Die Gränzen der Zellen der Aussenfläche sind durch ganze, die Zellengränzen im Inneren durch punktirte Linien angedeutet.

Fig. 5. Halbschematische Ansicht von oben der ersten Anlage eines Eychens (wie sie auf Fig. 20 u. 21 der Taf. V sichtbar sind). Die ältere, nach links gewendete der beiden Zellen der peripherischen Schicht bereits zweimal durch Längswände getheilt; die Scheitelzelle also von vier Zellen umgeben. Von der mittelsten der drei so entstandenen Zellen ist, durch das Auftreten einer, der Tangente des Scheitelpunkts der Aussenfläche parallelen Wand die erste Zelle des axilen Stranges abgeschieden.

Fig. 6. Die Scheitelansicht eines weiter vorgerückten Zustandes; insofern von der Natur abweichend schematisirt, als mehrere einander folgende Theilungen der Scheitelzelle durch wechselnd nach zwei Richtungen geneigte Wände gezeichnet sind, denen nicht sofort (wie in der Wirklichkeit stets) Theilungen durch auf den Aussenflächen senkrechte Wände folgten.

Fig. 7. Scheitelansicht eines Zustandes, der als Uebergang von der ersten Jugend zum mittleren Alterszustand zu betrachten ist. In der Scheitelzelle, die bisher nur durch wechselnd nach zwei entgegengesetzten Richtungen geneigte Wände sich theilte, ist eine geneigte Scheidewand aufgetreten, die von der letztentstandenen um 90° divergirt.

Fig. 8. Scheitelansicht zu der Zeit, da die Vermehrung der Scheitelzelle dem Erlöschen nahe ist, die fernere Zellvermehrung des Eychens nur eine intercalare, — wiederholte Quertheilung der Zellen des künftigen Funiculus — sein wird. Scheitelzelle vier-, oberste axile Zelle achtseitig.

Fig. 9. Seitenansicht eines sehr jungen Eychens, senkrecht auf die in der Scheitelzelle entstehenden Theilungswände.

Fig. 10. Ebensolche Ansicht eines weiter vorgerückten Eychens.

Fig. 11. Längsdurchschnittsansicht eines Eykerns, in dessen Embryosacke die Zellkerne der Keimbläschen sich eben gebildet haben.

Fig. 11ᵇ. Längsdurchschnittsansicht (durch Einstellung des Mikroskops auf die Medianebene des durchsichtigen Eychens gewonnen, ebenso die folgenden) eines Eychens, in dessen Embryosack die Keimbläschen, eben angelegt, als undeutlich begränzte, die früher schon vorhanden gewesenen Zellkerne umhüllende Massen körnigen Schleimes erscheinen. Der primäre Zellkern des Embryosackes, sehr deutlich wahrzunehmen, liegt dicht über den bereits scharf umgränzten Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen. Vgr. 400; ebenso der folgenden Figuren.

Fig. 12. Längsdurchschnittsansicht eines zur Befruchtung bereiten Eychens mit langgedehnten Keimbläschen.

Fig. 13, 14. Inneres Integument und Embryosack ähnlicher Eychen; der Embryosack und sein Inhalt sind perspectivisch dargestellt, um die Umgränzung der Anheftungsstellen der Keimbläschen an die Innenfläche des Embryosacks zu zeigen.

Fig. 15. Längsdurchschnittsansicht (mit perspectivischer Darstellung des Embryosackes und seiner Umgebung) eines Eychens, in welches ganz kurz zuvor ein Pollenschlauch eintrat. Die Spitze desselben ist bereits zwischen Embryosackhaut und Innenfläche des innern Integumentes breit gedrückt. Die Keimbläschen noch unverändert.

Fig. 16. Aehnlicher Zustand; das abgeplattete Ende des Pollenschlauches ist geborsten; ein Theil seines körnigen Inhaltes auf der Aussenfläche des Embryosackes ausgestreut.

Fig. 17. Weiter (um etwa 48 Stunden) vorgerückter Zustand. Das eine (obere) Keimbläschen ist verschwunden. Das andere, herangewachsen, füllt den Embryosack fast vollständig aus.

Fig. 18, 19. Inneres Integument und Embryosack befruchteter Eychen mit bereits zweizelligem, den Embryosack fast ausfüllendem Vorkeime.

Tafel V.

Figur 1—11. *Neottia ovata.* (Anfang Mai 1859.)

Fig. 1. Sehr junge Knospe, in deren Anthere die Pollenmassen vom umgebenden Gewebe kaum merklich differenzirt sind, im Längsdurchschnitt bei 30facher Vergr.

Fig. 2. Rostellum aus einer wenig weiter vorgerückten Knospe, im zarten Längsdurchschnitt bei 120facher Vergr. Die colossalen langgestreckten Zellen der Oberseite des Rostellum enthalten, ausser einem in der Zeichnung angedeuteten Zellkerne, sehr zahlreiche, die Zelle dicht erfüllende, scharf begränzte kugelige Tropfen zäher Substanz, deren eine Anzahl gezeichnet ist.

Fig. 3. Rostellum aus einer Knospe, deren Pollentetraden eben ausgebildet sind, von der unteren, Fig. 4 von der oberen Fläche gesehen, bei 40facher Vergr. Die langen Zellen der oberen, concaven Fläche ragen mit ihren vorderen Enden über diese Fläche etwas hervor, und sind hier mit einer, in langgezogenen Maschen netzigen, Cuticula bekleidet.

Fig. 5. Pollenmutterzellen; Theile eines zarten Längsdurchschnittes der Kante einer Pollenmasse aus einer Knospe von der Ausbildung derjenigen, aus welcher das Fig. 2 dargestellte Rostellum genommen ist. Die primären Zellkerne sind bereits verflüssigt; die eyweissartigen Stoffe der, ihre Stellen einnehmenden, Flüssigkeit sind zu Klümpchen geronnen. Vgr. 200.

Fig. 6. Theil eines ähnlichen Schnittes aus einer etwas weiter vorgerückten Anthere. In jeder Pollenmutterzelle sind bereits zwei secundäre Zellkerne gebildet. Gleiche Vgr.

Fig. 7. Theil eines ähnlichen Schnittes aus einer entwickelteren Anthere. In jeder Mutterzelle vier tertiäre Zellenkerne. Den Innenwänden der stark verdickten Zellhäute sind vorspringende Leisten aufgesetzt, deren Lauf den Gränzen der künftigen Scheidewände der Tetrade entspricht. Platzen jetzt die Mutterzellen durch Wassereinsaugung, so fliesst ihr Inhalt noch formlos aus. Der parenchymatische Zusammenhalt der Mutterzelle unter sich ist noch ein sehr fester. Gleiche Vgr.

Fig. 7^{b}. Durch Präparation vereinzelte Mutterzelle; sie ist geplatzt und hat die junge Tetrade (7^{c}) austreten lassen. Diese erscheint als zartwandige einfache Zelle. Vgr. 500.

Fig. 7[d]. Eine in gleicher Weise befreite andere Tetrade mit verdünnter Lösung von kohlensaurem Ammoniak behandelt. Die Membran hat sich vom Inhalt etwas abgehoben. Dieser zeigt vier kreuzweis gestellte seichte Furchen der Oberfläche, welchen Furchen noch keine auf der Innenfläche der Membran vorspringende Leisten entsprechen. Gleiche Vgr.

Fig. 8. Mutterzelle weiterer Entwickelung, durch vorsichtiges Zupfen mit der Nadel aus einem Durchschnitt des Inhalts eines Antherenfachs vereinzelt. Nach kurzem Liegen in Wasser ist (wie in den beiden vorigen Fällen) die Zellhaut, deren Schichten sämmtlich, am stärksten die innersten aufquellen, in Folge des Aufquellens dieser letzteren geborsten; aus dem — in der Zeichnung nicht ausgedrückten, weil nach oben gekehrt gewesenen — Riss wurde der Inhalt der Zelle ausgetrieben: eine die Höhlung der gequollenen Zellhaut bei Weitem nicht ausfüllende zarte Blase, deren dünne Haut schon jetzt der Einwirkung ziemlich concentrirter Schwefelsäure widersteht. Der Innenfläche dieser Haut sind dünne, nach innen kurz vorspringende Leisten aufgesetzt, deren Lauf mit den dicken Leisten der Innenfläche der dicken, aufgeplatzten äusseren Haut übereinstimmt, und dem der Scheidewände entspricht, welche binnen Kurzem die Tetrade in vier Fächer theilen werden. Vgr. 500.

Fig. 9. Aehnliches Präparat aus einer weiter vorgerückten Knospe. Die Tetrade ist vollständig in vier Fächer getheilt; ihre Exine schon sehr ausgebildet. Solche Mutterzellen vereinzeln sich sofort, wenn der Inhalt eines Antherenfaches in Wasser gebracht wird. Gleiche Vgr.

Fig. 10. Säule aus einer Knospe solcher Entwickelung. Seitenansicht. Vgr. 10.

Fig. 11. Säule aus einer geöffneten Blüthe, nach Aufspringen der Anthere und der viscinhaltigen Zellen des Rostellum, deren Inhalt als Tropfen austrat, im Längsdurchschnitt. Gleiche Vgr.

Tafel VI.

Fig. 1. **Orchis fusca.** Theil des Querdurchschnitts einer Massula des Pollens, zur Zeit da an den noch nicht in vier Zellen getheilten Anlagen der Tetraden die Exine auftritt. Vgr. 350.

Fig. 2. Aehnlicher Durchschnitt; etwas späterer Zustand, nach Resorption der Mutterzellhäute. Gleiche Vgr.

Fig. 3—7. **Phajus Wallichii.** Fig. 3 Theil des Querdurchschnitts einer jungen Anthere, die zwei Zellenlagen der Antherenwand und einige der noch dünnhäutigen Pollenmutterzellen zeigend. Vgr. 400.

Fig. 4. Theil des Randes einer querdurchschnittenen Pollenmasse, unmittelbar vor dem Auftreten der Exine. Die Zelle *a* ist so gezeichnet, wie sie am frischen Präparat erschien; *b* nach kurzer Einwirkung von Wasser, *c* nach Behandlung mit Chlorzinkjodlösung, *d* ist eine aufgeschnittene Zelle; an ihr hat, wie an *c*, die innerste Schicht der Wand eine körnige Beschaffenheit angenommen. Gleiche Vgr.

Fig. 5. Eine Pollenmutterzelle vom Rande der Pollenmasse einer quer durchschnittenen, nur wenig älteren Anthere; die Exine ist angelegt. Gleiche Vgr.

Fig. 6. Wenig weiter entwickelter Zustand. Die Tetrade ist in die vier Pollenzellen getheilt. Gleiche Vgr.

Fig. 7. Exine einer Tetrade, nach Behandlung mit concentrirter Schwefelsäure allein übrig geblieben. Gleiche Vgr.

Fig. 8–12. **Cephalanthera rubra.** — Fig. 8 Rand des Querdurchschnitts einer Pollenmasse, unmittelbar nach Anlegung der Specialmutterzellen. Gleiche Vgr.

Fig. 9. Ein Complex aus einer Mutter- und vier Specialmutterzellen, kurz nach Anlegung der Vorsprünge der Exine. Gleiche Vgr.

Fig. 10. Ein ebensolches Object, aus dem nämlichen Antherenfach, mit Chlorzinkjodlösung behandelt. Die Häute der Pollenzellen sind contrahirt. Gleiche Vgr.

Fig. 11. Gynostemium von vorn, Fig. 12 von der Seite, die geringe Entwickelung der viscinhaltigen Zellen der Narbe (*a*) zeigend. Vgr. 25.

Fig. 13, 14. Keimpflanzen von Gymnadenia conopsea im Längsdurchschnitt. Vgr. 40.

Fig. 15. Embryo von Sobralia macrantha, im Beginn der Keimung, frei präparirt. Die kurze Zellenreihe am Hinterende des Embryo ist ohne Zweifel ähnlicher Entstehung, wie das haarförmige Anhängsel am Hinterende des Embryo von Orchis. Der Kotyledon (der kleinzellige Theil des nach unten gewendeten Vorderendes) ist noch nicht völlig stängelumfassend. Es war von schön grüner Farbe. Vgr. 120.

Fig. 16. Längsdurchschnitt, senkrecht auf die Fläche des Kotyledon, des Vorderendes eines etwas weiter entwickelten Keimpflänzchens derselben Orchidee. *a* Endknospe, *b* Kotyledon, *c* Scheidentheil desselben. Gleiche Vgr.

Fig. 17. Weiter entwickelte Keimpflanze derselben Sobralia, im Längsdurchschnitt parallel der Flächen des Kotyledon und des ihm opponirten zweiten Blattes. Letzteres sieht man in seiner ganzen Ausdehnung von vorn; ersterem ist die Spreite durch den Schnitt entfernt, und nur die Durchschnitte des Scheidentheils *b* sind sichtbar. Am Hinterende der hypokotylen Achse *a*, die einige Wurzelhaare, aber noch keine Wurzel entwickelt hat, haftet die zersprengte Testa.

Fig. 18. Thalia dealbata Embryosack eines längsdurchschnittenen unbefruchteten Eychens. Vgr. 150.

Fig. 19–23. Canna Sellowii; 19, 22 und 23 Kernwarze und Scheitelwölbung des Embryosacks mit eingedrungenem Pollenschlauchende; 20 dieselben Theile, ausserhalb deren auch das Endostom mitgezeichnet ist; 21 ein aus dem Embryosacke hervorgezogenes, zusammen geknäueltes Pollenschlauchende. Vgr. 150.

Fig. 24. Maranta zebrina. 24 Mutterzelle des Pollens, in 4 Specialmutterzellen getheilt; 25 Pollenzelle, welche die vereinzelte Specialmutterzelle gesprengt und völlig abgestreift hat; 26 Pollenzelle, aus der Specialmut-

terzelle zur Hälfte hervorgetreten; 27 Pollenzelle, welche durch Aufquellen der Intine geplatzt ist. Vgr. 250.

Tafel VII.

Figur 1—4. Arum orientale.

Fig. 1. Vor Kurzem befruchtetes Ey im Längsdurchschnitt. Vgr. 20.
Fig. 2. Oberer von Endosperm gefüllter Theil des Embryosackes aus demselben frei präparirt. Vgr. 150.
Fig. 3. Oberes Ende des Embryosackes und Kernwarze aus einem etwas weiter entwickelten Eychen. Gleiche Vgr.
Fig. 4. Längsdurchschnitt eines halbreifen Saamens. *e* Endosperm, welches den Embryo umschliesst, und mit dem erweiterten, zellenleeren unteren Raume des Embryosackes *h* mit einer Schicht zur Gränze dieses Raumes senkrecht gestreckter Zellen angränzt. Auf dem Grunde des Raumes *h* die drei, zu gewaltiger Grösse herangewachsenen Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen *g*. Vgr. 36.

Figur 5—7. Arum ternatum.

Fig. 5. Unbefruchtetes Eychen im Längsschnitt. Vgr. 10.
Fig. 6. Inneres Integument und Eykern eines solchen. Vgr. 200.
Fig. 7. Eykern eines etwas schlankeren solchen Eychens. Gleiche Vgr.

Figur 8—10. Arum divaricatum.

Fig. 8. Unbefruchtetes Eychen im Längsschnitt. Vgr. 60.
Fig. 9. Embryosack und Kernwarze eines solchen. Vgr. 200.
Fig. 10. Oberer Theil des Embryosacks und Kernwarze eines ebensolchen. Gleiche Vgr.

Figur 11—17. Arum maculatum.

Fig. 11. Sehr junges Eychen, an welchem das äussere Integument noch nicht angelegt, im Längsschnitt. Vgr. 100.
Fig. 12. Kern desselben, 300fach vgr.
Fig. 13, 14. Längsdurchschnittsansichten von Embryosäcken nebst Kernwarzen, kurz vor der Befruchtung. Vgr. 300.
Fig. 15. Oberes Ende eines befruchteten Embryosackes nebst der vom Pollenschlauch durchbohrten Kernwarze. Gleiche Vgr.
Fig. 16. Vor Kurzem befruchteter Embryosack, in welchem die Endospermbildung begonnen hat, nebst der Kernwarze und dem dieser seitlich anhaftenden Pollenschlauche frei präparirt. Vgr. 200.
Fig. 17. Aehnliches Präparat in 100facher Vgr.

Figur 18—27. Pistia Stratiotes (texensis kl.)

Fig. 18. Junges Eychen im Längsschnitt. Vgr. 75.
Fig. 18^{b}. Eykern desselben in 300facher Vgr.
Fig. 19. Eychen, kurz vor der Befruchtung im Längsdurchschnitt. Vgr. 30.

Fig. 20. Der Kern eines solchen in 150facher Vgr.

Fig. 21. Oberer Theil des Embryosackes und kappenförmige Kernwarze eines eben solchen. Gleiche Vgr.

Fig. 22. Vor Kurzem befruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Der Verlauf der Gefässbündel im äusseren Integument ist durch punktirte Linien angedeutet. Gleiche Vgr.

Fig. 23. Oberer Theil des Eykerns und des inneren Integuments eines etwas weiter entwickelten Eychens im Längsschnitt. Die Cuticula des Integuments hat sich von den Epidermiszellen abgehoben. Gleiche Vgr.

Fig. 24. Halbreifer Saame im Längsdurchschnitt. Das Gewebe, welches das Exostom umgränzt, beginnt zu Embryotega zu verhärten. Unter der Aussenfläche des äusseren Integuments haben einzelne, in regelmässigen Abständen vertheilte Zellen an Grösse zugenommen, Kugelgestalt erhalten, und Krystalldrusen im Innern gebildet. Vgr. 50.

Fig. 25. Sehr junger Embryo, im Beginn der Bildung des Kotyledon, längsdurchschnitten. Vgr. 100.

Fig. 26. Längsdurchschnitt eines weiter entwickelten Embryo. Vgr. 30.

Fig. 27. Ein wenig weiter ausgebildeter Embryo, von vorn gesehen. Vgr. 50.

Tafel VIII.

Fig. 1—3. **Philodendron Imbe.** Fig. 1. Fruchtknoten im Querdurchschnitt. Vgr. 10.

Fig. 2. Derselbe im Längsdurchschnitt. Vgr. 20.

Fig. 3. Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 300.

Fig. 4—7. **Symplocarpus foetida.** Fig. 4. Blüthe kurz vor dem Stäuben der Antheren längsdurchschnitten. Vgr. 15.

Fig. 5. Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 36.

Fig. 5^{b}. Der Eykern desselben in 200facher Vgr.

Fig. 6. Unbefruchtetes Eychen, Ansicht von aussen. Vgr. 36.

Fig. 7. Oberes Ende eines einige Zeit zuvor befruchteten Embryosackes, aus der Höhle des innern Integuments herausgenommen. Es ist nur noch ein kleiner Rest vom Gewebe des Eykerns übrig (die dunkel gehaltenen Zellen oben links, neben der Ansatzstelle des Vorkeims). Vgr. 200.

Fig. 8. **Caladium bicolor.** Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 150.

Fig. 9, 11. **Rhodea japonica.** Fig. 9. vor Kurzem befruchtetes Ey im Längsdurchschnitt, Vgr. 30; — Fig. 11. Längsdurchschnitt des Endostoms, des oberen Theiles des Endosperms und des Embryo eines reifen Saamens. Vgr. 30.

Fig. 12—16. **Calla palustris.** Fig. 12. Jungfräulicher Fruchtknoten im Längsdurchschnitt. Zwischen den Eychen erhebt sich eine Fortsetzung der Blüthenachse. Vgr. 7.

Fig. 13. Unbefruchtetes Ey im Längsdurchschnitt. Vgr. 100.

Fig. 14. Der Eykern eines solchen. Vgr. 200.

Fig. 15. Embryosäcke und (bis auf die Kernwarze verdrängte) Eykerne befruchteter Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 150.

Tafel IX.

Figur 1—3. Pothos pentaphylla.

Fig. 1. Knospe, kurz vor dem Aufblühen, im Querdurchschnitt. Zu äusserst die vier, in zwei zweigliedrigen Kreisen stehenden Perigonialblätter; darauf die vier, mit ihnen alternirenden, extrorsen Antheren. Im Mittelpunkte der zweifächerige Fruchtknoten, nahe der oberen Wölbung seiner Höhle quer durchschnitten. Seiner flachen Längsscheidewand, zu der die Vorderflächen der Antheren in Winkeln von 45^0 stehen, sitzen die zwei hängenden Eychen an; eines jederseits; — das eine mit der Mikropyle nach rechts, das andere nach links gekehrt. Ueber den Eychen eine Anzahl der von der Scheidewand ausstrahlenden, langen Papillen. Vgr. 25.

Fig. 2. Eine solche Knospe im Längsdurchschnitt rechtwinklig zur Scheidewand des Fruchtknotens. *p* Perigonialblätter, von denen zwei seitwärts von den Medianen vom Schnitt getroffen sind, während von den beiden anderen (inneren) die durchschnittenen, klappig übergreifenden Endtheile in die Ebene des Schnittes fallen. *Anth* die Antheren, der Schnitt geht zwischen zweien der seitlichen Fächer derselben durch, so dass von der Anthere links eines der mittleren, von der rechts eines der seitlichen der vier Fächer sichtbar ist. *g* Germen; der den dicken Scheitel desselben durchziehende Griffelkanal ist vom Schnitte getroffen. Unter dessen Einmündung in die Fruchtknotenhöhle erscheint als stumpfe Endigung der Längsscheidewand des Germen die Stelle, an welcher die zwei, je in eins der Fruchtknotenfächer führenden letzten Endigungen des Styluskanals in dessen längeren Haupttheil einmünden. Der obere Theil dieser Scheidewand ist mit langen Papillen besetzt. Unter diesen haften die hängenden, halbumgewendeten Eychen an dem Dissepiment. Die Richtung der Eychen, das eine mit der abwärts gekehrten Mikropyle nach vorn, das andere nach hinten gewendet, ist in der Zeichnung ausgedrückt. Gleiche Vgr.

Fig. 3. Eychen aus einer solchen Knospe im Längsdurchschnitt. Vgr. 300.

Figur 4—17. Pothos longifolia.

Fig. 4. Fruchtknoten, kurze Zeit nach der Bestäubung, im Längsdurchschnitt parallel der Scheidewand. Der Schnitt hat das eine Fach geöffnet und gestattet den Einblick auf die Fläche des Dissepiments, in welchem, dicht oberhalb der mit strahlig geordneten Papillen besetzten Stelle, ein kleines ovales Loch, die Innenöffnung eines der zwei Endarme des Styluskanals sichtbar ist. Der weitere Verlauf des Styluskanals aufwärts ist durch punktirte Linien angedeutet. An einer mit jenen langen Papillen besetzten warzenförmigen Hervorragung der Scheidewand haftet das schief nach unten gerichtete halb umgewendete Eychen. Die punktirte Linie von der Ansatzstelle desselben senkrecht abwärts deutet den Lauf des axilen Gefässbündels der Scheidewand an. Vgr. 20.

Fig. 5ª. Querdurchschnitt eines solchen Fruchtknotens, dicht über der Stelle, an welcher der Styluskanal in die zwei, je in eines der Fruchtknotenfächer führenden Endarme sich theilt. Gleiche Vgr.

Fig. 5ᵇ. Querdurchschnitt desselben Fruchtknotens, etwas tiefer, die beiden Eychen und ihre von Papillen umstandenen Anheftungsstellen, von oben gesehen, zeigend. Gleiche Vgr.

Fig. 6. Unbefruchtetes Eychen aus einer dem Aufblühen nahen Knospe, im Längsdurchschnitt. Vgr. 40.

Fig. 7,8. Die Eykerne solcher Eychen, mit ihrer den mittleren und unteren Theil nur lose umgebenden Hüllhaut, frei präparirt, in Längsdurchschnittsansichten, in 250facher Vgr. (Anf. Februar 1855 u. 1856.)

Fig. 9. Embryosack und Kernwarze aus einem zur Befruchtung bereiten Eychen frei präparirt, in Längsdurchschnittsansicht. Vgr. 150. (Mitte März 1855.)

Fig. 10. Dieselben Theile aus einem vor Kurzem befruchteten Eychen, frei gelegt. Der Embryosack durch eine Querwand getheilt; in seiner oberen Tochterzelle eine Anzahl der Innenwand anliegender, zur Hervorbringung von Endospermzellen bestimmter Zellenkerne. Das befruchtete Keimbläschen gestreckt, durch eine Querwand zweizellig geworden. Hinter ihm das unbefruchtete unveränderte Keimbläschen. Ueber der Kernwarze der obere Theil des abgetrennten, von zwei Längsschnitten gestreiften innern Integuments in Umrissen gezeichnet. Im Endostom steckt das Pollenschlauchende, dessen etwas angeschwollene Spitze vom Embryosack ohne Verletzung abgelöst worden ist. Vgr. 250. (Mitte März 1855.)

Fig. 11. Der obere Theil des Embryosacks, die Kernwarze und zwei ihr anhaftende Pollenschlauchenden aus einem Eychen gleicher Entwickelung frei präparirt. Obere Zelle des Embryosacks und befruchtetes Keimbläschen verhalten sich wie bei Fig. 10; — das unbefruchtete Keimbläschen ist verschwunden. Die Kernwarze ist, durch einerseits an den Pollenschlauchenden, andererseits am unteren Ende des Embryosacks ausgeübten Zug quer durchrissen. Einige ihrer Zellen sind an der Scheitelfläche des Embryosacks hängen geblieben. Die übrigen werden von den Extremitäten der beiden Pollenschläuche umklammert. Vgr. 250. (Mitte März 1856.)

Fig. 12. Aehnliches Präparat, die Pollenschlauchenden (*p*) noch stärker gekrümmt als bei dem Vorigen; die Spitze des einen (linken) sehr breit gezogen. Vgr. 150.

Fig. 13. Aehnliches Präparat aus einem etwas weiter entwickelten Eychen. Die obere Zelle des Embryosacks (von der nur der obere Theil gezeichnet) bereits von grosszelligem Endosperm ausgefüllt. Der Pollenschlauch in zwei Endarme verzweigt, deren einer rechts an der Aussenfläche der längsdurchrissenen Kernwarze endet, während der andere an der Aussenfläche des links neben der Kernwarze eine Auftreibung zeigenden Embryosacks haftet. Vgr. 100.

Fig. 14. Aehnliches Präparat; Kernwarze unverletzt. Zwei Pollenschläuche haften an ihr; der eine endet auf ihrem Scheitel mit kurzer Umbiegung nach vorn. Der andere ist neben der Kernwarze herab bis zur Aussenfläche des Embryosacks gewachsen, und lenkt hier mit knieförmiger Biegung um, sein Ende schräg aufwärts richtend. Vorkeim dreizellig; unbefruchtetes Keimbläschen verschwunden. Vgr. 130. (Anfang April 1853.)

Fig. 15. Aehnliches Präparat; — der Pollenschlauch ist bis in die Mitte des Gewebes der Kernwarze eingedrungen, und haftet hier mit stumpfem Ende an der Aussenseite der Scheitelfläche des Embryosackes. Die Zellen der Kernwarze sind zum grösseren Theile hinweg präparirt. Vgr. 150.

Fig. 16. Oberer Theil eines Embryosacks nebst unverletzter Kernwarze und neben dieser herab gewachsenem Pollenschlauche, freigelegt. Vorkeim dreizellig, mit ungewöhnlich kleiner Ansatzfläche an der Innenwand des Embryosacks haftend; — neben ihm das unverändert erhaltene, fehlschlagende Keimbläschen. Vgr. 150.

Fig. 17. Oberes Ende eines Embryosacks, von dem der grösste Theil der Kernwarze und der ihr anhaftende Pollenschlauch hinweg präparirt sind. Vgr. 55. (Ende März 1855.)

Tafel X.

Figur 1—13. Pothos longifolia.

Fig. 1. Stück eines verzweigten Pollenschlauchs, aus dem Schleime genommen, welcher die Fruchtknotenhöhle erfüllt. Vgr. 150.

Fig. 2. Endostom mit in dasselbe eingetretenem Pollenschlauche, welcher vor der Eintrittsstelle mehrere wiederholt verzweigte Seitenäste getrieben hat. Vgr. 120.

Fig. 3. Oberes Ende eines befruchteten Embryosacks mit dreizelligem Vorkeim. Darüber die abpräparirte Kernwarze, mit drei Pollenschläuchen; von denen zwei an der Oberfläche jener herabgewachsen sind, der dritte sie durchbohrt und eine knieförmige Umbiegung seines unteren Endes ausgeführt hat. Vgr. 150.

Fig. 3^{b}. Das Ende dieses letzteren Pollenschlauches in 600facher Vgr.

Fig. 4. Ganzer Embryosack mit Kernwarze und dieser anhaftenden Pollenschläuchen, frei präparirt. Vgr. 30.

Fig. 5. Aehnliches Präparat wie Fig. 3. Am Embryosackscheitel sind nicht allein einige Zellen der Kernwarze, sondern auch das letzte Ende *a* der dünnen seitlichen Sprossung des an der abpräparirten Kernwarze links haftenden Pollenschlauches hangengeblieben.

Fig. 5^{b}. Jenes Pollenschlauchende mit dem oberen Stücke der seitlichen Sprossung, 450fach vergr.

Fig. 6. Aehnliches Präparat. Von den zwei Gabelästen des an der Kernwarze haftenden einen Pollenschlauchs läuft der eine quer über die Vorderfläche

des Embryosacks weg; sein Ende trifft mit dem des andern Astes zusammen. Vgr. 150.

Fig. 7. Aehnliches Präparat, drei Pollenschläuche an der Kernwarze. Gleiche Vgr.

Fig. 8. Aehnliches Präparat, weiter vorgerückter Zustand. Der Pollenschlauch endigt ziemlich fern vom Embryosack. Wahrscheinlich ist eine zarte Abzweigung desselben unbemerklich geworden. Gleiche Vgr.

Fig. 9. Oberes Ende des Embryosacks, mit dem im Endosperm eingeschlossenen jungen Embryo; darüber die Kernwarze mit anhaftendem verästelten Pollenschlauche im Längsdurchschnitt. Das Verhältniss des Pollenschlauches zum Embryosacke ist ähnlich wie bei Fig. 8. Vgr. 120.

Fig. 10. Junger Saame im Längsdurchschnitt. Vgr. 30.

Fig. 11. Ein halbreifer Saame, rechtwinklig zu einer durch den Funiculus und die Längsachse gelegten Ebene längsdurchschnitten. Man sieht den Embryo von der Seite. Gleiche Vgr.

Fig. 12. Ein ebensolcher Saame, im Längsdurchschnitt durch den Funiculus. Die Vorderfläche des Embryo ist sichtbar. Gleiche Vgr.

Fig. 13. Embryo aus einem fast reifen Saamen, im Längsdurchschnitt. Die dunkeln Flecken an der Peripherie bezeichnen Raphidenbündel führende Zellen. Gleiche Vgr.

Tafel XI.

Figur 1–12. Secale cereale.

Fig. 1. Jungfräuliches Germen im Längsdurchschnitt. Vgr. 80.

Fig. 2. Embryosäcke aus längsdurchschnittenen unbefruchteten Eychen. Vgr. 200.

Fig. 3. Frei präparirtes oberes Ende eines vor Kurzem befruchteten Embryosackes mit anhaftendem Pollenschlauchende, einem fehlgeschlagenen und einem dreizellig gewordenen befruchteten Keimbläschen. Rechts am Embryosackscheitel zwei nicht abgetrennte Zellen der Kernwarze. Vgr. 400.

Fig. 5. Aehnliches Präparat; der Innenraum des Embryosacks ist bereits von geschlossenem Endosperm gefüllt. Vgr. 200.

Fig. 6. Aehnliches Präparat, vor Beginn der Endospermbildung hergestellt. Gleiche Vgr.

Fig. 7. Vom Pollenschlauch durchbohrte Kernwarze und oberes Ende des Embryosacks aus einem kurz zuvor befruchteten Eychen im Längsdurchschnitt. Gleiche Vgr.

Fig. 8. Junger Embryo im Längsdurchschnitt. Vgr. 300.

Fig. 9. Oberes Ende eines mit Endosperm gefüllten Embryosacks, einen Embryo ähnlicher Entwickelung einschliessend, im Längsdurchschnitt. Vgr. 200.

Fig. 10. Etwas weiter entwickelter Embryo, frei präparirt. Vgr. 300.

Fig. 11. Oberes Ende eines Embryosackes nach weiter vorgeschrittener Entwickelung; der Embryo ist durch den Schnitt blos gelegt, aber nicht verletzt. Vgr. 150.

Fig. 12. Embryo nach beinahe vollständiger Ausbildung des Scutellum, und Anlegung des Kotyledon *a* von der Seite, Fig. 12^{b} von vorn gesehen.

Figur 13—16. Triticum vulgare.

Fig. 13. Jungfräuliches Germen im Längsdurchschnitt. Vgr. 60.

Fig. 14. Kernwarze, vom Pollenschlauch durchbohrt, und oberes Ende eines kurz zuvor befruchteten Embryosackes, im Längsdurchschnitt. Vgr. 400.

Fig. 15. Oberes Ende eines frei präparirten Embryosacks weiterer Entwickelung. Gleiche Vgr.

Fig. 16. Noch weiter entwickelter Embryo im Längsdurchschnitt. Vgr. 300.

Figur 17—19. Elymus arenarius.

Fig. 17. Embryosack aus einem unbefruchteten längsdurchschnittenen Eychen. Vgr. 200.

Fig. 18, 19. Obere Enden frei präparirter befruchteter Embryosäcke. Gleiche Vgr.

Tafel XII.

Figur 1—6. Hordeum vulgare. (Juli 1853.)

Fig. 1. Embryosack aus einem längsdurchschnittenen unbefruchteten Eychen. Vgr. 200.

Fig. 2. Kernwarze, vom Pollenschlauch durchbohrt, und oberes Ende des Embryosackes eines vor Kurzem befruchteten, längsdurchschnittenen Eychens. Gleiche Vgr.

Fig. 3. Frei präparirtes oberes Ende eines mit Endosperm gefüllten Embryosacks. Gleiche Vgr.

Fig. 4, 5. Längsdurchschnittsansichten frei präparirter Embryoanlagen. Gleiche Vgr.

Fig. 6. Embryo, nach Anlegung des Scutellum und vor der des Kotyledon frei präparirt, von der Seite;

Fig. 6^{b}. von vorn gesehen. Gleiche Vgr.

Fig. 6^{c}. Oberes Ende eines längsdurchschnittenen jungen Saamens, im Längsdurchschnitt. Das äussere Integument ist nicht mitgezeichnet. Vgr. 30.

Figur 7—10. Sorghum halepense.

Fig. 7. Embryosack aus einem unbefruchteten Eychen frei präparirt. Vgr. 500.

Fig. 8. Aehnliches Präparat, in welchem das eine Keimbläschen abgestorben ist. Vgr. 200.

Fig. 9. Oberer Theil eines frei präparirten befruchteten Embryosacks, zur Zeit des Beginns der Endospermbildung. Der Pollenschlauch ist abgetrennt Vgr. 500.

Fig. 10. Frei präparirter befruchteter Embryosack mit anhaftendem Pollenschlauchende und zweizellig gewordenem befruchteten Keimbläschen. Gleiche Vgr.

Fig. 11. **Coix Lacryma.** Embryosack aus einem längsdurchschnittenen unbefruchteten Eychen. Vgr. 100.

Fig. 12. Oberes Ende dieses Embryosacks mit den Keimbläschen. Vgr. 400.

Fig. 12^b. Das grössere dieser Keimbläschen, durch Wassereinsaugung von der Embryosackhaut gelöst und kugelig geworden. Gleiche Vgr.

Fig. 13. **Carex panicea.** Embryosack aus einem längsdurchschnittenen unbefruchteten Eychen. Vgr. 120.

Fig. 14. Mikropyle-Ende eines befruchteten Embryosacks mit in Endosperm eingeschlossenem Embryo, frei präparirt. Gleiche Vgr.

Figur 15—19. Carex arenaria. (Juni 1852.)

Fig. 15. Jungfräuliches Germen im Längsdurchschnitt. Vgr. 30.

Fig. 16. Der Embryosack aus einem unbefruchteten, längsdurchschnittenen Eychen. Vgr. 100.

Fig. 17. Halbreife Frucht im Längsdurchschnitt. Vgr. 25.

Fig. 18. Längsdurchschnitt der Saamenschale, Fig. 19 Längsdurchschnitt der Fruchtknotenwand desselben Entwickelungszustandes. Die freie Fläche beider Schalen ist der in der Zeichnung links gewendete Rand.

Fig. 20. **Carex trinervis.** Reifer Embryo im Längsdurchschnitt. Vgr. 30.

Fig. 21. Plumula und benachbarte Gewebe desselben Präparats, 200fach vgr.

Fig. 22. **Carex Grayi.** Reifer Embryo im Längsdurchschnitt.

Fig. 23. Plumula und angränzende Gewebe desselben Präparats. 200fach vgr.

Tafel XIII.

Figur 1—10. Hippeastrum aulicum. (Februar 1859.)

Fig. 1. Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 50.

Fig. 2. Ein ebensolches, etwas unterhalb des Embryosackes quer durchschnitten. Vgr. 30.

Fig. 3. Embryosack und Kernwarze aus einem solchen. Vgr. 200.

Fig. 4. Oberes Ende des Embryosackes und Kernwarze bald nach Ankunft des Pollenschlauches. Vgr. 300.

Fig. 5. Dieselben Theile; die Haut des Embryosackes ist beim Schnitte dem Messer ausgewichen und unverletzt geblieben, so dass die Ansatzfläche des bereits beträchtlich gewachsenen befruchteten Keimbläschens von vorn sichtbar ist. Vgr. 400.

Fig. 6. Stark verästeltes Pollenschlauchende, frei präparirt. Vgr. 300.

Fig. 7. Oberes Ende des Embryosackes, Kernwarze und Endostom eines vor Kurzem befruchteten Eychens im Längsdurchschnitt. Der Pollenschlauch zeigt vollständige Schleifenbildung (vgl. S. 684). Vgr. 300.

Fig. 8. Obere Wölbung des Embryosacks und Kernwarze eines weiter entwickelten Eychens im Längsdurchschnitt; Vorkeime fünfzellig. Der Verlauf

des Pollenschlauchendes hinter der dem Objectiv abgewendeten Fläche des Embryosackes ist in der Zeichnung angedeutet.

Fig. 9. Inneres Integument und Kern eines befruchteten Eychens im Längsdurchschnitt. Der Embryosack hat einen grossen Theil des Eykerns verdrängt. Vgr. 50.

Fig. 10. Der Embryo und einige Zellen der Kernwarze aus diesem Eychen, 300fach vergrössert.

Fig. 11. Stück des frei präparirten Embryosackes von Habranthus chilensis mit anhaftendem Vorkeim, 300fach vergrössert.

Fig. 12. Aehnliches Präparat aus einem halbreifen Saamen derselben Pflanze. Das Embryokügelchen ist bereits vielzellig.

Figur 13—21. Leucojum vernum. (Anfang April 1855 u. 1859.)

Fig. 13. Unbefruchtetes Eychen im Längsschnitt. Vgr. 20.

Fig. 14. Oberer Theil des Kernes desselben. Vgr. 150.

Fig. 15. Ebensolches Präparat aus einem Eychen, an dessen Embryosack der Pollenschlauch soeben anlangte Vgr. 200.

Fig. 16. Der Embryosack aus einem wenig weiter entwickelten Eychen, unverletzt frei gelegt. Ueber ihm die vom Pollenschlauch durchbohrte, abpräparirte Kernwarze. Gleiche Vgr.

Fig. 17. Oberer Theil eines frei präparirten Embryosackes ähnlicher Entwickelung, in welchem das unbefruchtete Keimbläschen bereits verschwunden. Darüber die Kernwarze mit dem Pollenschlauche. Gleiche Vgr.

Fig. 18—20. Obere Enden frei präparirter befruchteter Embryosäcke, jeder zwei Keimbläschen enthaltend. An dem Fig. 20 haftet das Pollenschlauchende. Vgr. 750.

Fig. 21, 23, 24. Obere Enden von befruchteten Embryosäcken nebst den von Pollenschläuchen durchbohrten Kernwarzen, im Längsdurchschnitt. Die Endospermbildung hat begonnen Vgr. 150.

Fig. 25. Ein Eychen derselben Entwickelungsstufe im Längsdurchschnitt. Vgr. 20.

Fig. 25^b. Eine der, leicht aus dem Zusammenhange tretenden, mit Amylumkörnern gefüllten Zellen des untern Theiles des Kerns eines solchen Eychens. Vgr. 150.

Fig. 26. Zweizellige, Fig. 27 neunzelliger Vorkeim, im Längsdurchschnitt, aus der Reife nahen Saamen (am 7. Mai 1855) genommen.

Tafel XIV.

Figur 1, 2. Crinum variabile.

Fig. 1. Ein Fruchtknotenfach, querdurchschnitten; ein Eychen im Längsdurchschnitt, das andere von aussen zeigend. Vgr. 40.

Fig. 2. Embryosack und Vorderende eines längsdurchschnittenen Eychens; *a* die Keimbläschen, *b* deren Gegenfüsslerzellen. Vgr. 160.

Figur 3—11. Crinum capense.

Fig. 3. Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 130.

Fig. 4. Ey- und Mikropyle-Ende des Embryosackes eines solchen. Vgr. 400.

Fig. 5. Dieselben Theile, unmittelbar nach Ankunft des Pollenschlauchs. Gleiche Vgr.

Fig. 6. Dieselben Theile; etwas späterer Zustand, nach der ersten Quertheilung des befruchteten Keimbläschens. Gleiche Vgr.

Fig. 7. Oberes Ende eines befruchteten Embryosackes mit der Innenfläche anhaftendem, befruchteten, quergetheilten Keimbläschen, frei präparirt. Die Embryosackhaut ist neben der Anheftungsstelle des Keimbläschens durchrissen. Gleiche Vgr.

Fig. 8. Oberes Ende des Embryosackes und Eymund, vom gabelästigen Pollenschlauch durchzogen, nach Umbildung des befruchteten Keimbläschens zu einer kurzen Zellenreihe. Vgr. 200.

Fig. 9. Befruchtetes Eychen, nach Beginn der Endospermbildung, längsdurchschnitten. Vgr. 25.

Fig. 9^{b}. Eymund (in welchem der Pollenschlauch), Endospermerfülltes Mikropyle-Ende des Embryosacks und Vorkeim desselben Präparats, 200fach vgr.

Fig. 10. Schnitt durch das Endosperm und das Integument eines etwas weiter entwickelten jungen Saamens. Gleiche Vgr.

Fig. 11. Befruchtetes, aber dann fehlschlagendes Eychen im Längsdurchschnitt. Es enthält eine ziemlich weit entwickelte Embryo-Anlage; aber keine Spur von Endospermbildung ist sichtbar. Vgr. 30.

Tafel XV.

Merendera caucasica. (Anfang April 1855 u. 1859.)

Fig. 1. Einer der drei Griffel im Querdurchschnitt, 180fach vgr. Unten (an der nach aussen gewendet gewesenen Kante) das Gefässbündel, darüber die Höhlung des spaltenförmigen Griffelkanals.

Fig. 2. Unbefruchtetes Eychen mit stumpfwinklig angeheftetem Funiculus im Längsdurchschnitt. Vgr. 50.

Fig. 3. Eben solches Eychen mit rechtwinklig angeheftetem, auf der Oberseite papillösem freiem Theile des Funiculus. Vgr. 30.

Fig. 4. Embryosack nebst Kernwarze aus einem solchen Eychen, frei präparirt. Vgr. 250.

Fig. 5. Aehnliches Präparat, jüngerer Zustand. Die Zellen der Kernwarze enthalten in den Wandbeleg aus Protoplasma eingebettete grosse Amylumkörner. Kleinere Amylumkörner sind in sehr grosser Anzahl der die Wände des Embryosacks und auch die Aussenfläche der Keimbläschen überziehenden Protoplasmaschicht eingemengt. Im auffallenden Licht erscheint diese Schicht glänzend weiss, wie aus Silber ciselirt; am glänzendsten da, wo die kleinen Amylumkörner am dichtesten angehäuft sind: in der Umgebung des primären Kerns des Embryosackes und der Keim-

bläschen. Die weiche Wand des Embryosacks liegt noch nicht der Hüllhaut des Eykerns an; ähnlich wie auf jüngeren Zuständen von Zostera und von Aroïdeen. Vgr. 500.

Fig. 6. Aehnliches Präparat, an welchem man einen Theil der unteren Fläche der Kernwarze erblickt. Vgr. 250.

Fig. 7. Unbefruchtetes Eychen, einer eben sich öffnenden Blüthe entnommen, im Längsdurchschnitt. Vgr. 250.

Fig. 8, 9. Frei präparirte Embryosäcke nebst Kernwarze aus solchen Eychen. Der F. 8 ist intact; der F. 9 zerrissen, sein Inhalt mit Ausnahme der Keimbläschen ausgetrieben. Der Amylumgehalt des Protoplasma des Embryosacks ist jetzt merklich geringer. Vgr. 500.

Fig. 10. Kernwarze eines solchen Eychens, von oben gesehen. Vgr. 300.

Fig. 11. Kernwarze und oberer, die Keimbläschen einschliessender Theil des Embryosacks eines Eychens, in dessen Mikropyle kurz zuvor ein Pollenschlauch trat (16 Stunden nach künstlicher Bestäubung bei kühlem Wetter). Daneben das von der Aussenfläche des Embryosackes unverletzt abgelöste Pollenschlauchende. Vgr. 400.

Fig. 12. Aehnliches Präparat, bei welchem das Pollenschlauchende in dem längsdurchschnittenen Endostom steckt. Vgr. 300.

Fig. 13. Aehnliches Präparat, bei welchem die Spitze des Pollenschlauchendes bei der Abtrennung von der Embryosackhaut barst und einen Theil ihres Inhalts austreten liess. Die Kernwarze liegt schief, etwas nach unten gewendet. Man sieht einen Theil ihrer unteren Fläche. Vgr. 400.

Fig. 14. Freigelegte Kernwarze mit oberem Theile des Embryosacks; daneben das abgetrennte Pollenschlauchende mit unverletzter Spitze und zahlreichen stabförmigen Inhaltskörpern. Ein vor der Freilegung des Präparats durch das Ey geführter Längsschnitt ist ziemlich genau durch die Mittellinie der Kernwarze gegangen, die man im Längsdurchschnitt sieht. Nur ein Keimbläschen ist zu sehen; das Andere wurde vermuthlich durch jenen Schnitt entfernt. Vgr. 500.

Fig. 15—21. Frei gelegte Embryosäcke nebst Kernwarze und der Embryosackhaut anhaftendem Pollenschlauchende, in perspectivischer Ansicht bei 250facher Vergrösserung.

Fig. 15. Pollenschlauchende kurz abgerissen, einfach kolbig; im befruchteten, grösseren Keimbläschen der Zellkern noch vorhanden.

Fig. 16. Pollenschlauchende auf eine längere Strecke der Embryosackhaut anliegend; Spitze desselben verbreitert und abgeflacht.

Fig. 17. Pollenschlauchende wie bei F. 1. Die zwei Keimbläschen von völlig gleicher Grösse und Beschaffenheit.

Fig. 18. Embryosack völlig unverletzt, in seinem Grunde die drei Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen. Das Pollenschlauchende verhält sich dem in F. 2 abgebildeten ähnlich. Die wenigen festen Inhaltskörper desselben sind von auffällig langgezogener Form. Die fehlschlagenden Keimbläschen sind bereits spurlos verschwunden.

Fig. 19. Das eine Keimbläschen ebenfalls nicht mehr vorhanden. Der Pollenschlauch, an seiner Spitze in zwei sehr kurze Gabeläste getheilt, um-

fasst mit denselben nach Art einer Zange eine Längsfalte der Embryosackhaut.

Fig. 20. Der Embryosack ist an seiner Vorderfläche durch einen der zwei Längsschnitte verletzt und geöffnet, welche vor seiner Freilegung durch das Eychen geführt wurden. Kernwarze und Pollenschlauchende sind von diesem Schnitte nicht getroffen. Die Spitze des letzteren ist auf eine beträchtliche Strecke, soweit sie der Embryosackhaut anliegt, verbreitert und abgeflacht.

Fig. 21. Pollenschlauchende dreiarmig. Der oberste, kürzere dieser Zweige endet stumpf an der Aussenfläche der Kernwarze. Der mittlere ist, insoweit er der Embryosackhaut anliegt, verbreitert und abgeplattet. Der dritte trifft mit abgerundetem Ende auf eine tiefere Stelle der Wand des Embryosackes.

Tafel XVI.

Figur 1—10. Merendera caucasica.

Fig. 1. Frei präparirter Embryosack, Anf. April 1859. Der Pollenschlauch ist zwischen der Innenfläche des Integuments und der Aussenseite des Embryosackes sehr weit, dem Grunde des letzteren bis auf ein Viertheil von dessen Länge nahe, herabgewachsen. Hier hat er, der Membran des Sackes fortan angeschmiegt, eine Wendung nach aufwärts, dann eine seitwärts, hierauf wieder eine nach abwärts gemacht; endlich sich wieder nach oben gewendet, indem er um seinen älteren Theil in links gerichteter Schraubenlinie sich schlang. Schliesslich ist er, immer an der Embryosackhaut anhaftend, noch weiter nach oben, bis nahe an die Kernwarze gewachsen, wo sein Ende zu einer flach abgeplatteten Erweiterung von dreiseitigem Umriss wurde.

Fig. 1^b. Dasselbe Präparat, um beiläufig 60^0 um seine Längsachse gedreht. Beschaffenheit und Anheftung der Keimbläschen treten in dieser Lage deutlicher hervor.

Fig. 2. Embryosackhaut an der Vorderfläche durch den Schnitt verletzt; Pollenschlauchende sehr varicös, einfach zugerundet und leicht abgeplattet endigend.

Fig. 3—5. Präparate, ähnlich den auf der vorhergehenden Tafel dargestellten. In F. 3 liegt das umgebogene, wenig abgeplattete Ende des Pollenschlauches auf eine ziemlich lange Strecke der Embryosackhaut an. In F. 5, wo die Embryosackhaut an der Vorderfläche durch den einen Längsschnitt geöffnet ist, haftet der Pollenschlauch nur mit der äussersten Spitze an der Membran des Sackes. Das eine Keimbläschen erscheint hier, abnormer Weise, nicht blos der Scheitelfläche, sondern auch einer der Seitenflächen des Embryosackes angeschmiegt. Der Inhalt des andern Keimbläschens wurde bei der Präparation zufällig ausgetrieben; es ist nur dessen faltige Zellstoffhaut noch vorhanden. Die Kernwarze ist

bei der Präparation, ebenfalls zufällig, vom Embryosacke halb abgetrennt worden.

Fig. 4. Der Pollenschlauch endet mit zugerundeter, abgeflachter Spitze. Die Lage der Kernwarze, die etwas nach unten gebogen ist, gestattet schräg auf deren untere Fläche zu sehen.

Fig. 6. Die nämlichen Theile aus einem weiter vorgerückten Eychen (Mitte Mai 1855) frei präparirt. Befruchtetes Keimbläschen zweizellig; unbefruchtetes verschwunden. Die Endospermbildung hat begonnen. Zahlreiche freie Zellkerne liegen an der Innenwand des Embryosacks. Vgr. 120.

Fig. 7. Aehnliches Präparat, bei welchem die Trägerzelle des zweizelligen Vorkeims um Vieles schlanker ist. Das Pollenschlauchende (*p*) ist schon ziemlich unkenntlich. Gleiche Vgr.

Fig. 8. Weiter entwickelter junger Saame, Ende Mai desselben Jahres, im Längsdurchschnitt. Der Embryosack ist noch nicht vom Endosperm erfüllt; nur eine einfache Schicht in Bildung begriffener Zellen desselben bekleidet die Innenwand. Vgr. 15.

Fig. 9. Längsdurchschnitt eines jungen Saamens im ersten Drittel des Juni, bei gleicher Vergrösserung. Das Endosperm erfüllt den nicht grösser gewordenen Embryosack bis auf eine enge centrale Höhlung.

Fig. 10. Der junge Embryo nebst Träger aus dem nämlichen Präparat, 100mal vgr.

Figur 9—11. Uvularia grandiflora.

Fig. 11. Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 80.

Fig. 12. Frei präparirte Embryosäcke nebst Kernwarze aus unbefruchtet gebliebenen Blüthen, deren Perigonialblätter zu welken begannen. F. 10*a*, *b* Vgr. 250. F. 11. Vgr. 120. F. 10^{b} ist Seitenansicht der F. 10, in Umrisszeichnung.

Tafel XVII.

Figur 1—10. Colchicum autumnale.

Fig. 1. Eychen, unmittelbar nach Ankunft des Pollenschlauches an der Kernwarze, Mitte September (1852), längsdurchschnitten. Vgr. 150.

Fig. 2. Aehnliches Präparat, bei dem vom inneren Integument nur die Umrisse angegeben, äusseres Integument und Raphe nicht mitgezeichnet sind. Gleiche Vgr.

Fig. 3, 4. Gipfel frei präparirter, befruchteter Embryosäcke nebst Pollenschläuchen und Kernwarzen, Mitte März. Das zum Fehlschlagen bestimmte Keimbläschen ist in die Breite gezogen. Gleiche Vgr.

Fig. 5. Unbefruchtet gebliebener Embryosack, Mitte März frei präparirt. Gleiche Vgr.

Fig. 6, 7. Aehnliche Präparate wie die F. 3, 4 abgebildeten, ebenfalls Mitte März hergestellt. Die Kernwarze ist dem Embryosackscheitel schräg aufgesetzt; das excentrische Keimbläschen ist in beiden Fällen dasjenige, welches sich zum Embryo entwickeln wird. Vgr. 200.

Fig. 8, 9. Aehnliche Präparate, gleichzeitig mit den vorigen gewonnen. Die Lage der schräg am Embryosack sitzenden Kernwarze ist so, dass man auf deren untere Fläche sieht. In beiden Fällen ist nur noch ein Keimbläschen vorhanden. F. 8 200fach, F. 9 400fach vgr.

Fig. 10. Aehnliches Präparat, am 9. Mai hergestellt. Das allein noch vorhandene befruchtete Keimbläschen ist noch immer einzellig. Vgr. 150.

Figur 11—17. Bulbocodium vernum.

Fig. 11. Fruchtknoten im Querschnitt. Vgr. 15.

Fig. 12. Querdurchschnitt der Basis, Fig. 13 Querdurchschnitt des oberen Theils des Griffels. Gleiche Vgr.

Fig. 14. Eychen von aussen gesehen. Vgr. 30.

Fig. 15. Ein solches im Längsdurchschnitt. Vgr. 60.

Fig. 16, 17. Kerne unbefruchteter Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 180.

Tafel XVIII.

Veltheimia viridiflora. (Februar 1859.)

Fig. 1. Eychen im Längsschnitt, einer Knospe entnommen, die in etwa 14 Tagen aufgeblüht sein würde. Der Embryosack ist einfach keulenförmig. Vgr. 100.

Fig. 2. Frei präparirtes oberes Ende eines zur Befruchtung bereiten Embryosacks, zwei von festen Zellhäuten umhüllte Keimbläschen einschliessend. Vgr. 250.

Fig. 3. Unbefruchtetes Eychen aus einer eben sich öffnenden Blüthe im Längsdurchschnitt. Der Embryosack hat neben seinem Grunde abwärts eine umfangreiche Ausstülpung entwickelt, auf deren Grunde sein primärer Kern liegt. Von der diesen umgebenden Protoplasma-Anhäufung führt ein Strang in der Längsachse der Ausstülpung aufwärts zu den Keimbläschen hin. Vgr. 25.

Fig. 3^b. Der Embryosack aus eben diesem Präparate, im grössten Theile seines Umfanges frei gelegt und 250fach vgr.

Fig. 4. Oberes Ende des Embryosacks und vom Pollenschlauch durchbohrte Kernwarze eines vor Kurzem befruchteten Eys im Längsschnitt. Der Inhalt der Keimbläschen hat sich in Folge der Einwirkung reinen Wassers von den elastischen Zellhäuten zurück gezogen. Gleiche Vgr.

Fig. 5. Aehnliches Präparat, etwas weiter vorgerückter Zustand. Das befruchtete Keimbläschen ist bereits länger gestreckt; sein contrahirter Inhalt erscheint in zwei Hälften (Primordialschläuche) gesondert, welche noch durch keine feste Zellwand getrennt sind. Gleiche Vgr.

Fig. 6. Frei gelegte Scheitelregion eines befruchteten Embryosacks. Der Inhalt beider Keimbläschen ist bei der Präparation ausgetrieben worden. Auf der Spitze des Embryosacks einige unregelmässig verdickte Stellen der Membran: die einzige hier vorkommende Andeutung der anderwärts

(Paniceen, Gladioleen) entwickelteren Cuticularbildung (Schacht's Fadenapparat). Vgr. 300.

Fig. 7. Längsdurchschnitt von dem Embryosackscheitel und der vom Pollenschlauch durchbohrten Kernwarze eines vor Kurzem befruchteten Eychens. Der Inhalt der Keimbläschen noch in seiner natürlichen Lage. Vgr. 250.

Fig. 8. Befruchtetes Ey im Längsdurchschnitt bei 25facher Vgr. Die Aussackung des Embryosacks ist bis zum Grunde des Eykerns herab gewachsen; in ihr zeigen sich die Anfänge der Endospermbildung.

Fig. 9. Obere Hälfte des Kernes eines befruchteten Eychens im Längsdurchschnitt, 250fach vergr. In der Umgebung des zweizelligen Vorkeims einige dickwandige, zum Theil in Vermehrung begriffene Endospermzellen. Das fehlgeschlagene Keimbläschen ist bereits in einen formlosen Klumpen körnigen Schleims verwandelt.

Fig. 10. Scheitelregion eines befruchteten Embryosacks frei präparirt. Vorkeim zweizellig; neben ihm das fehlschlagende Keimbläschen, wohl erhalten. An der Wand des Embryosacks zahlreiche freie, zur Bildung von Endospermzellen bestimmte Kerne.

Fig. 11. Aehnliches Präparat mit dreizelligem Vorkeime und verschrumpftem abortirendem Keimbläschen. Vgr. 300.

Fig. 12. Halbreifer Same im Längsdurchschnitt, bei 20facher Vergr. Nur der obere Theil des Embryosackes ist vom Gewebe des Endosperms ausgefüllt, welches den ellipsoïdischen jungen Embryo (*e*) einschliesst. Die grössere, nach unten sehr erweiterte untere Hälfte des Embryosackes ist zellenleer. Auf ihrem Grunde liegt eine Druse von grossen Krystallen eines (in Salzsäure sich ohne Aufbrausen lösenden) Kalksalzes (α). Drusen aus kleineren Krystallen desselben Salzes finden sich in den Zellen der Aussenfläche der Mittelgegend des Endosperms (bei *a*).

Fig. 12^b. Einige der krystallführenden Endospermzellen, 420fach vergr.

Tafel XIX.

Fig. 1. **Hemerocallis lutea.** Inneres Integument und dessen Innenfläche auf allen Punkten anliegender Embryosack eines vor Kurzem befruchteten, im Beginn der Endospermbildung begriffenen Eychens. Vgr. 300.

Fig. 2. **Czackia Liliastrum.** Vor einiger Zeit befruchtetes Ey im Längsdurchschnitt. Vgr. 25.

Fig. 3. Vom Pollenschlauch durchzogene Kernwarze und oberes Ende des Embryosacks desselben Präparats. Im Embryosack das unbefruchtete Keimbläschen und der mehrzellige Vorkeim. Vgr. 300.

Fig. 4. **Erythronium dens canis.** Unbefruchtetes Ey im Längsdurchschnitt. Vgr. 15.

Fig. 5, 6. Obere Enden befruchteter Embryosäcke derselben Pflanze, mit den anhaftenden Pollenschläuchen frei präparirt. Vorkeime vielzellig. Vgr. 300.

Fig. 7. **Allium odorans.** Junges Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 250.

Fig. 8. Eychen derselben Pflanze, aus einer geöffneten Blume, noch unbefruchtet. Vgr. 50.

Fig. 8^{b}. Der Embryosack desselben Präparats, 200fach vgr.

Fig. 9. Inneres Integument, Eykern und Embryosack eines vor Kurzem befruchteten Eychens. Gleiche Vgr.

Fig. 10. Kernwarze und Embryosackscheitel mit anhaftendem Pollenschlauch, unbefruchtet gebliebenen Keimbläschen und Embryo-Anlage, frei präparirt. Gleiche Vgr.

Fig. 11. **Allium victoriale.** Befruchtetes Eychen, nach vollständiger Verdrängung des innern Integuments (mit Ausnahme des Endostoms) im Längsdurchschnitt. Vgr. 20.

Tafel XX.

Fig. 1. **Triteleia uniflora.** Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. (Februar 1859.) Vgr. 180.

Fig. 1^{b}. Fruchtknoten derselben Pflanze im Querdurchschnitt. Vgr. 25.

Fig. 2. **Gagea lutea.** Kern eines unbefruchteten, zur Befruchtung bereiten Eychens im Längsdurchschnitt. Nur ein Keimbläschen ist noch vorhanden. Vgr. 300.

Fig. 3. Der obere Theil des Eykerns eines vor nicht langer Zeit befruchteten Eychens derselben Pflanze (Ende April 1859), frei präparirt. Der sehr herangewachsene Embryosack hat die Zellen der ihn umgebenden Zellschicht verdrängt, die Kernwarze ausgenommen. Durch die Zellen dieser hindurch sieht man das Pollenschlauchende und die Anheftung der Trägerzelle des erst zweizelligen Vorkeims. Gleiche Vgr.

Fig. 4. Aehnliches Präparat eines weiter vorgerückten Zustandes mit sechszelligem Vorkeim. In der Endzelle, welche zu einer neuen Quertheilung sich anschickt, zwei noch durch keine Querwand getrennte Zellkerne. Gleiche Vgr.

Fig. 5. **Gloriosa superba.** Unbefruchtet gebliebenes Eychen aus einer Blüthe, deren Perigon bereits verwelkt war. Der Embryosack hat die Zellen des Eykerns völlig verdrängt, bis auf die wenigen Zellen der Kernwarze, an deren unterer Fläche die Keimbläschen haften; — ganz wie bei Colchicum, Merendera und Bulbocodium. Im Mittelpunkte des Embryosacks schwebt eine grosse kugelige Luftblase — das sichere Vorzeichen baldigen Absterbens unbefruchtet gebliebener Eychen. Vgr. 50.

Fig. 6. **Funkia coerulea.** (August 1853.) Theil eines, durch die Scheitelgegend des Eykerns eines vor Kurzem befruchteten Eyes geführten Längsschnitts. In der Scheitelwölbung des Embryosackes haften zwei Keimbläschen, deren Inhalt bei der Präparation ausgetrieben wurde. Daneben der abpräparirte, an der Spitze mehrfach verästelte Pollenschlauch. Vgr. 300.

Fig. 7. **Funkia coerulea** Zarter Längsschnitt des oberen Theiles des Kerns eines vor Kurzem befruchteten Eychens. In der Scheitelwölbung des Embryosackes drei Keimbläschen, von denen eines bereits lang gestreckt ist, in der Entwickelung dem andern vorauseilend. Zwischen den Zellen der Kernwarze das einfach zugerundete Ende des Pollenschlauchs. Gleiche Vgr.

Fig. 8. **Bonapartea juncea.** Embryosack und Kernwarze eines unbefruchteten Eychens im Längsschnitt. Vgr. 120.

Figur 9—12. Puschkinia scilloïdes. (Anfang April 1859.)

Fig. 9. Unbefruchtetes Ey im Längsdurchschnitt. Vgr. 25.

Fig. 10. Scheitelregion des Embryosackes eines vor Kurzem befruchteten Eychens. In der Wölbung des Sackes haften ein unbefruchtet gebliebenes, und ein zum bereits zweizelligen Vorkeim entwickeltes befruchtetes Keimbläschen; der Inhalt beider ist zusammengezogen. — Ueber dem Embryosacke die abpräparirte Kernwarze, zwischen deren Zellen das dünnwandige, einfach zugerundete Pollenschlauchende steckt. Vgr. 300.

Fig. 11. Frei präparirte Scheitelregion des Embryosackes aus einem Eychen ähnlicher Entwickelung. Links oben haftet an der Aussenseite der Embryosackhaut eine der Zellen der Kernwarze. Oben in der Mitte, etwas rechts über den Anheftungsstellen des befruchteten und unbefruchteten Keimbläschens, hängen aussen an der Membran des Embryosackes die Enden zweier kurz abgerissener Pollenschläuche. Im Innern des Embryosackes rechts eine zartwandige Endospermzelle. Vgr. 400.

Fig. 12. Junger Embryo, nebst einem Fetzen der Embryosackhaut, an welchem die oberste Zelle seines Trägers haftet. Vgr. 200.

Tafel XXI.

Figur 1—9. Iris pumila.

Fig. 1. Ansicht eines ganz jungen Eychens von Aussen, Anfang Novembers vor der Blüthe. Die Zellengränzen des optischen Längsdurchschnitts des Eychens sind durch punktirte Linien angedeutet. Vgr. 500.

Fig. 2. Längsdurchschnitt eines jungen Eychens nebst einem Stück der Placenta, Mitte Februars. Vgr. 350.

Fig. 3. Längsdurchschnitt eines weiter vorgerückten Zustands, Anfang April. Gleiche Vgr.

Fig. 4. Längsdurchschnitt des Eykerns.

Fig. 5. Längsdurchschnitt des Eykerns und innern Integuments, beide Mitte April, etwa 14 Tage vor der Blüthe. Gleiche Vgr.

Fig. 6. Eykern aus einer Blüthenknospe, deren Perigonialblätter die erste Spur der Färbung zeigen, im Längsdurchschnitt. Vgr. 200.

Fig. 7. Embryosack des längsdurchschnittenen Eychens aus einer etwas weiter entwickelten Knospe, in welchem die Kerne der Keimbläschen eben aufgetreten sind. Vgr. 400.

Fig. 8, 9. Aehnliche Präparate weiter vorgerückter Zustände. Gleiche Vgr.

Figur 10—28. Crocus vernus.

Fig. **10**. Knospe zu einer Blüthe des künftigen Jahres, Ende Mai im Längsdurchschnitt. Vgr. 15. Die Blüthenachse erscheint als stumpfes Wärzchen; noch keines der Blattorgane der Blüthe ist angelegt.

Fig. **11**. Ebensolche Knospe, im Längsdurchschnitt, Anfang Juli. *a* Antheren, *p* Perigonialblätter, *h* Hochblätter, *l* Laubblätter, *s* Niederblätter. Vgr. 75.

Fig. **12**. Eykern aus einer zur Entfaltung im nächsten Frühling bestimmten Knospe, Mitte September. Vgr. 200.

Fig. **13**. Ein ebensolches Präparat, Anfang October. Gleiche Vgr.

Fig. **14**. Eychen im Längsdurchschnitt, am 20. Novbr. Vgr. 80.

Fig. **15**. Eykern im Längsdurchschnitt, Ende December (1854). Vgr. 250.

Fig. **16**. Aehnliches Präparat, am 20. October (1858). Gleiche Vgr.

Fig. **16**^{b}. Scheitel des Embryosacks mit zwei Keimbläschen aus einem anderen, gleichzeitig dargestellten ähnlichen Präparate. (Beide Präparate zeigen Falten der bereits festen Haut der Keimbläschen.) Vgr. 400.

Fig. **17—20**. Die oberen Enden frei präparirter Embryosäcke, Ende Januar (1855). In allen Fällen hat sich der Inhalt der Keimbläschen von der bereits erhärteten Membran derselben zurück gezogen. Vgr. 180.

Fig. **21**. Embryosack aus einem, am 26. März (1854) längsdurchschnittenen Eychen. Vgr. 180.

Fig. **22**. Eykern und aus dessen Scheitel hervorragender Embryosack, am 2. Januar (1855) frei präparirt. Vgr. 150.

Fig. **23**. Ein Präparat ähnlicher Art wie die F. 17—20 abgebildeten, mit diesen gleichzeitig erhalten, und gleich stark vergrössert.

Fig. **24**. Oberes Ende eines Embryosackes, am 3. März (1855) frei präparirt. Beide Keimbläschen sind nach oben hin in den Mikropylekanal zu (von der Embryosackhaut und deren Cuticula bekleideten) Fortsätzen ausgewachsen. Vgr. 400.

Fig. **25**. Ein ähnliches Präparat wie F. 21, mit diesem gleichzeitig (am 26. März 1854) dargestellt. Vgr. 150.

Fig. **26**. Oberes Ende eines am 26. März (1854) frei präparirten Eykerns. Die Embryosackhaut hat die peripherische Zellschicht des Eykerns nur am Scheitel durchbrochen, und ragt nur insoweit aus derselben hervor, als ihre Scheitelwölbung von den beiden oberen Keimbläschen ausgefüllt wird. Vgr. 40.

Fig. **26**^{b}. Längsdurchschnitt der Scheitelregion desselben Eykerns, 150fach vgr.

Fig. **27**. Das obere Ende eines frei präparirten Embryosackes, am 1. April 1859. Ein Theil der Cuticula des Embryosackscheitels ist bei der Präparation zufällig abgerissen. Vgr. 600.

Fig. **28**. Ein ähnliches Präparat, am 26. April 1854 dargestellt. Die Cuticula des Embryosacks ist nur sehr schwach entwickelt. Vgr. 150.

k bedeutet bei allen mit Buchstaben bezeichneten Figuren die zum Fehlschlagen bestimmten, *k'* die zum Befruchtetwerden bestimmten Keimbläschen.

Tafel XXII.

Crocus vernus L.

Obere Enden von eben befruchteten Embryosäcken, frei gelegt.

Fig. 1. Mit anhaftendem Pollenschlauch, der auf dem sterilen oberen Keimbläschen liegt, und in den Embryosack und jenes eine Rinne eingedrückt hat. Anordnung des Zelleninhalts beim Freilegen nicht gestört; primärer Kern des unteren Keimbläschens noch erhalten. Am 9. März 1854, im Zimmer getriebene Pflanze. Vgr. 150.

Fig. 2. Pollenschlauch keulig; Keimbläschen beim Freilegen gedrückt; ihr Inhalt zum formlosen Klumpen geballt. Am 10. April 1854. Gleiche Vgr.

Fig. 3. Kern des befruchteten Keimbläschens noch vorhanden, Pollenschlauchende stark verjüngt. Anf. April 1855. Gleiche Vgr.

Fig. 4. Pollenschlauchende kurz zweigabelig, der eine Arm bis zur Ansatzfläche des befruchteten Keimbläschens reichend. Anf. April 1855. Vgr. 200.

Fig. 5. Inhalt der Keimbläschen ausgetrieben. Das Präparat liegt so, dass das befruchtete Keimbläschen hinter und unter dem unbefruchteten sich befindet. Der Pollenschlauch hat sich zwischen Embryosackhaut und Cuticula gedrängt, und trägt einen Fetzen der letzteren an seiner, dem Sacke abgekehrten Seite. Ende Februar 1856. Gleiche Vgr.

Fig. 6. Primärer Kern des befruchteten Keimbläschens noch vorhanden. Die apicale Verlängerung des unbefruchteten Keimbläschens ist von ungewöhnlicher Länge. Vgr. 150.

Fig. 7. Pollenschlauch von der Embryosackhaut gelöst. Die Embryosackhaut ist an der Ansatzfläche des unbefruchteten Keimbläschens eingerissen; der Inhalt beider Keimbläschen hat sich bei der Präparation contrahirt. Der Kern des befruchteten Keimbläschens ist, seiner Grösse und seinen nicht scharfen Umrissen nach zu schliessen, der primäre. Anfang April 1854. Vgr. 150.

Fig. 8. Pollenschlauchende von der Embryosackhaut gelöst. Der Scheitelpunkt des Embryosackes ist etwas nach unten gewendet, so dass seine apicale Ausstülpung nicht sichtbar ist. Anf. April 1854. Vgr. 150.

Fig. 9. Inhalt der drei Keimbläschen bei der Präparation grösstentheils ausgetrieben. Pollenschlauch ungewöhnlich dick. Anfang April 1854. Vgr. 150.

Fig. 10. Der Pollenschlauch, der einen kurzen Seitenast getrieben hat, trägt auf seiner dem Embryosack abgewendeten Seite einen Fetzen der Cuticula derselben. Im befruchteten unteren Keimbläschen ist der secundäre Kern desselben, in der Bildung begriffen, in undeutlichen Umrissen wahrzunehmen; nach oben zu ist eine Spur des noch nicht völlig verschwundenen primären Kerns wahrzunehmen. Anf. April 1854. Vgr. 200.

Fig. 11. Befruchtetes Keimbläschen kernlos. Vgr. 150.

Fig. 12. Das befruchtete Keimbläschen, mit ausgebildetem secundären Kern, und durch die Präparation etwas gestörter Anordnung des Inhalts, liegt über und vor dem unbefruchteten, oberen. Anf. März 1856. Vgr. 150.

Fig. 13. Der Inhalt des befruchteten Keimbläschens wurde bei der Präparation zum Theil ausgetrieben, seine Membran faltig. Das Stück der Embryosackhaut unterhalb der Ansatzstelle desselben ist zufällig nach oben gebogen. Anfang April 1856. Vgr. 150.

Fig. 14. Primärer Kern des befruchteten Keimbläschens noch vorhanden. Anf. April 1855. Vgr. 150.

Fig. 15. Beide Keimbläschen (im befruchteten ein muthmaasslich secundärer Kern) nebst dem sie bedeckenden Stücke Embryosackhaut vom Pollenschlauchende abgelöst. Die Embryosackhaut ist dicht rings um die Ansatzstellen der Keimbläschen abgerissen; das untere Keimbläschen liegt auf dem oberen, unbefruchteten Ende. Februar 1855. Vgr. 150.

Fig. 15^{b}. Dasselbe Präparat, um 90^{0} um seine Längsachse gedreht.

Fig. 16. Der Inhalt der drei Keimbläschen durch Einwirkung von Chlorcalciumlösung zu formlosen Ballen contrahirt. Die Ansatzstelle des mittleren Keimbläschens ist durch das obere verdeckt. Die Cuticula des Embryosackscheitels ist zum Theil von dessen Membran gelöst. Anfang März 1855. Vgr. 200.

Fig. 17. Der Pollenschlauch ist vom Embryosackscheitel getrennt; hat aber dabei einen Fetzen der Cuticula desselben mit fortgenommen. Das Pollenschlauchende zeigt einen Tüpfel, in dessen Oeffnung man hineinsieht. Der Inhalt beider Keimbläschen ist durch die Präparation ausgetrieben; die Membran des befruchteten, unteren, hat Falten bekommen. Ende Februar 1856. Vgr. 200.

Fig. 18. Der zweiarmige Pollenschlauch hatte in den, vom oberen Keimbläschen aus gefüllten Embryosackscheitel eine tiefe Rinne eingedrückt. Es ist aus dieser Rinne gelöst; dabei ist an seinem kürzeren Arme ein Fetzen der Cuticula des Embryosackes hängen geblieben. Ende Februar 1856. Vgr. 200.

Fig. 18^{b}. Dasselbe Präparat, um 60^{0} um seine Längsachse gedreht. Man bemerkt eine bedeutende Krümmung des befruchteten Keimbläschens, und im Ende des längeren Arms des Pollenschlauchs einen engen Tüpfel.

Fig. 19, 20. Stücke der Embryosackhaut, an denen nur das befruchtete Keimbläschen haftet; das unbefruchtete ist durch einen zwischen beiden Keimbläschen durchgehenden Schnitt entfernt. Anf. April 1853. Vgr. 200.

Fig. 21. Pollenschlauch kurz zweiarmig; Inhalt der drei Keimbläschen bei der Präparation ausgetrieben; Membran des untersten sehr faltig geworden. Ende Febr. 1854. Vgr. 200.

Fig. 22. Ansatzfläche des befruchteten, kernhaltigen Keimbläschens ungewöhnlich eng umschrieben; Pollenschlauch sehr dickwandig. Anf. März 1854. Vgr. 200.

Fig. 23. Pollenschlauchende unverletzt vom Embryosackscheitel gelöst. Das

befruchtete Keimbläschen befindet sich hinter und unter dem unbefruchteten. Anf. April 1855. Vgr. 150.

Fig. 24. Pollenschlauchende unverletzt vom Embryosacke gelöst, dessen Haut zwischen beiden Keimbläschen gerissen ist. Diese liegen demnach vereinzelt; links neben dem Pollenschlauch das obere, rechts das untere, befruchtete. Anfang April 1854. Vgr. 150.

Fig. 25, 26. Vom Embryosack gelöste Pollenschlauchenden, an denen Fetzen der Cuticula desselben hängen. Anf. April 1853. Vgr. 150.

Fig. 27. Inhalt beider Keimbläschen ausgetrieben. Der sehr dünnwandige Pollenschlauch ist links über seiner Spitze geborsten, und hat einen Theil seines Inhalts austreten lassen. Anf. März 1855. Vgr. 200.

Fig. 28. Der varicöse Pollenschlauch ist sehr tief, bis zur Ansatzfläche des unteren Keimbläschens, am Embryosack herab gewachsen. Der Inhalt des unteren Keimbläschens ist ausgetrieben, seine Membran faltig. Anf. März 1855. Vgr. 200.

Fig. 29. Pollenschlauch sehr dick, Cuticula des Embryosacks nicht merklich entwickelt, der Inhalt des Keimbläschens durch Glycerin contrahirt. Anf. April 1856. Vgr. 150.

Fig. 30. Der Pollenschlauch vom sehr dickwandigen Scheitel des Embryosacks abgetrennt. Ein Stück der Cuticula ist an ihm hängen geblieben. Anf. März 1856. Vgr. 200.

Fig. 31. Pollenschlauch, der beim Eintritt in das Endostom sich gabelte, aus dem Endostom hervorgezogen. März 1855. Vgr. 200.

Fig. 32. Inhalt der Keimbläschen durch Einwirkung von Glycerinlösung contrahirt. Der Pollenschlauch ist links über seiner Spitze geborsten, und hat einen Theil seines Inhalts austreten lassen. Anf. April 1856. Vgr. 200.

Fig. 32^b. Dasselbe Präparat, von unten gesehen, die Lage der Keimbläschen im Grundrisse zeigend. Vgr. 80.

Tafel XXIII.

Crocus vernus.

Fig. 1. Frei präparirtes oberes Ende eines vor Kurzem befruchteten Embryosacks, mit anhaftendem Pollenschlauche. Im unteren Ende des befruchteten (unteren) Keimbläschens ist bereits der neue Kern, in seiner Umgebung eine Anhäufung grösserer Körnchen entstanden. Am 5. März 1856 (im Zimmer getriebenes Exemplar). Vgr. 200.

Fig. 2. Aehnliches Präparat. *p* Pollenschlauch, *k* fehlschlagendes, *k'* befruchtetes Keimbläschen. Ebenso ist die Bedeutung der Buchstaben bei den folgenden Figuren. Am 10. April 1854. Gleiche Vgr.

Fig. 3. Endostom und Embryosackende eines befruchteten Eychens, im Längsdurchschnitt, am 8. April 1852. Vgr. 150.

Fig. 3^b. Der Embryosackscheitel mit den Keimbläschen und dem anhaftenden Pollenschlauchende aus dem nämlichen Präparate, frei gelegt und ein wenig nach links um die Längsachse gedreht. Vgr. 200.

Fig. 3c. Dasselbe Präparat, um 90° gedreht. Vgr. 150.

Fig. 4. Aehnliches Präparat, mit kurz zweiarmigem Pollenschlauche. Vgr. 150.

Fig. 5. Aehnliches Präparat, mit sehr schwach entwickelter Cuticula des Embryosackes, am 14. Febr. 1855. Vgr. 150.

Fig. 6. Aehnliches Präparat, mit ungewöhnlich tief herab gewachsenem Pollenschlauche, dem an der Spitze auf der Aussenseite ein durch ihn von der Embryosackhaut abgelöster Fetzen der Cuticula derselben anhaftet. Am 17. Febr. 1856. Vgr. 200.

Fig. 7. Aehnliches Präparat. Nur ein sehr kurzes Stück des Pollenschlauches ist erhalten. Am 1. März 1856. Vgr. 150.

Fig. 8. Aehnliches Präparat, bei welchem das Pollenschlauchende während der Präparation vom Embryosacke sich trennte, einen Fetzen der Cuticula desselben abreissend. Die Membran des fehlschlagenden (oberen) Keimbläschens ist eingerissen. Vgr. 500.

Fig. 8b. Aehnliches Präparat; auf der Aussenseite des Pollenschlauchendes ein Fetzen von Cuticularsubstanz, wie bei F. 6. Die Häute beider Keimbläschen haben bei der Präparation Faltung erlitten. Die Substanz dieser Häute ist granulirt. Am 17. April 1855. Vgr. 600.

Fig. 9. Aehnliches Präparat; das befruchtete Keimbläschen ist dreizellig. Am 26. April 1855. Vgr. 150.

Fig. 10—14. Aehnliche Präparate; die befruchteten Keimbläschen zweizellig. Vgr. 150.

Fig. 15. Aehnliches Präparat, bei welchem der Pollenschlauch, unter Mitnahme eines Cuticulafetzens, vom Embryosacke abgerissen ist. Vgr. 150.

Fig. 16, 17. Aehnliche Präparate; der Pollenschlauch bereits dünnhäutig geworden und zusammengesunken. Gleiche Vgr.

Fig. 18. Aehnliches Präparat. Die Embryosackhaut ist an der Anheftungsstelle des oberen Keimbläschens etwas eingerissen. Das befruchtete Keimbläschen ist vierzellig. Vgr. 150.

Fig. 18b. Durchschnittsansicht der Pollenschlauchspitze des vorigen Präparats. Vgr. 800.

Fig. 19. Aehnliches Präparat mit zweiarmigem Pollenschlauche, dessen beide kurze Gabeläste in der durch die Sehachse gelegten Ebene liegen. Befruchtetes Keimbläschen vierzellig. Vgr. 100.

Fig. 20. Obere Hälfte eines frei präparirten Embryosackes, von dem die Scheitelwölbung (und mit ihr das unbefruchtete Keimbläschen) durch Ziehen am Pollenschlauche abgerissen sind. Am 18. April 1855. Vgr. 100.

Fig. 21. Sechszelliger Vorkeim, frei präparirt. Am 25. April 1855. Vgr. 150.

Fig. 22. Mikropyle-Ende eines frei präparirten Embryosackes mit fünfzelligem Vorkeim. Dem Embryosackscheitel ist eine ähnliche Zerreissung widerfahren, wie dem F. 20 abgebildeten. Im Mai 1855. Vgr. 150.

Fig. 23. Junger Saame im Längsdurchschnitt. Die Zellen des innern Integuments sind bedeutend quer gestreckt; der Embryosack ist grossentheils mit Endosperm gefüllt. Am 17. Mai 1855. Vgr. 15.

Fig. 23b. Die Embryoanlage daraus in 120facher Vgr.

Fig. 24. Oberes Ende eines frei präparirten Embryosackes ähnlicher Entwickelung. *ee* Endospermzellen. Vgr. 120.
In den F. 1, 3ª, 9, 12, 20—22 ist der Zelleninhalt in seiner natürlichen Anordnung dargestellt; in den übrigen so, wie er nach kürzerem oder längerem Liegen in Glycerin zusammen gezogen erscheint.

Tafel XXIV.

Figur 1—8. Crocus vernus.

Fig. 1. Reifer Saame, am 9. Septbr. 1855, im Längsdurchschnitt (der die Raphe nicht getroffen hat). Der Embryo, durch den Schnitt blos gelegt, ist von vorn zu sehen. Vgr. 15.

Fig. 2. Der Embryo eines reifen Saamens, im durch die Spalte des Kotyledon geführten Längsschnitte. Vgr. 50.

Fig. 3. Träger und Wurzelende eines reifen Embryo im Längsdurchschnitte. Rechts neben dem Träger ist das Gewebe des Endosperms mit gezeichnet; über seinem oberen Ende sind die Umrisse des Endostoms angegeben. Vgr. 120.

Fig. 4, 5, 8. Monströse Entwickelungen von Pollenschlauchenden. (S. 741.) Vgr. 200.

Fig. 6, 7. Monströse Entwickelungen von Keimbläschen; F. 6. Durchschnitt des Endostoms bei 120facher Vgr.; F. 7. Durchschnitt des innern Integuments und Eykerns, 50fache Vgr.

Fig. 9. **Gladiolus communis.** Frei präparirtes oberes Ende eines befruchteten Embryosackes mit zwei Keimbläschen und anhaftendem Pollenschlauche. Vgr. 300.

Fig. 10. **Ixia rosea.** Unbefruchtetes Ey im Längsdurchschnitt. Vgr. 30.

Fig. 11. Endostom eines solchen Eychens mit den herausragenden, von den Keimbläschen ausgefüllten Ausstülpungen des Embryosackes. Vgr. 600.

Fig. 12. **Tritonia crocata.** Obere Hälfte eines frei präparirten befruchteten Embryosackes. Vgr. 150.

Fig. 13. **Montbretia lineata.** Längsdurchschnitt eines vor Kurzem befruchteten Eychens, die bedeutende Querstreckung der äusseren der zwei Zellschichten des inneren Integuments zeigend. Vgr. 30.

Fig. 14. **Pontederia cordata.** Jungfräuliches Germen im Längsdurchschnitt. Vgr. 30.

Fig. 15. Oberer Theil des Eykerns mit dem Embryosacke derselben Pflanze im Längsdurchschnitt. Vgr. 100.

Fig. 16. Vom Pollenschlauch durchzogene Kernwarze und Embryoanlage derselben Pflanze im Längsdurchschnitt. Vgr. 300.

Fig. 17. **Tradescantia virginica.** Eychen, in dessen Mikropyle ein Pollenschlauch eingetreten, im Längsdurchschnitt. Vgr. 15.

Fig. 18. Embryosack, Kernwarze und Pollenschlauch desselben Eychens, 200fach vergrössert.

Fig. 19. Junger Saame im Längsdurchschnitt. Vgr. 15.

Fig. 20. Das obere Ende des frei präparirten Embryosackes mit der Embryoanlage, aus demselben Eychen. Vgr. 200.

Tafel XXV.

Figur 1—5. Hymenocallis ovata.

Fig. 1. Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 15.

Fig. 2. Oberer Theil des Eykerns und Endostom eines solchen Eychens; in der Scheitelwölbung des Embryosackes drei Keimbläschen. Vgr. 300.

Fig. 3. Oberes Ende eines befruchteten Embryosacks, der von der auf eine wenig umfangreiche Zellgruppe geschwundenen Kernwarze bedeckt ist, frei präparirt. Der Pollenschlauch hat sich während der Präparation vom Embryosacke getrennt. Gleiche Vgr.

Fig. 4. Aehnliches Präparat, vier Keimbläschen enthaltend. Gleiche Vgr.

Fig. 5. Aehnliches Präparat, mit anhaftendem Pollenschlauchende, nur ein Keimbläschen ist vorhanden. Gleiche Vgr.

Figur 6—13. Paris quadrifolia.

Fig. 6. Längsdurchschnitt eines jungfräulichen Fruchtknotens. Vgr. 20.

Fig. 7. Querdurchschnitt eines aus 6 Carpellen bestehenden solchen. Vgr. 10.

Fig. 8. Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 50.

Fig. 9. Eykern, im Beginn der Bildung der Keimbläschen im Längsdurchschnitt. Vgr. 400.

Fig. 10, 11. Weiter vorgerückte Zustände von Kernen unbefruchteter Eychen, im Längsdurchschnitt. Vgr. 150.

Fig. 12, 13. Kernwarze und Scheitelwölbung des Embryosackes längsdurchschnittener, vor Kurzem befruchteter Eychen; bei F. 13 ist das Pollenschlauchende vom Schnitt blos gelegt; bei F. 12 durch ihn entfernt. Vgr. 300.

Fig. 14. **Narcissus Jonquilla.** Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Die Lage der Gegenfüsslerzellen des Keimbläschens ist eine ungewöhnliche. Vgr. 40.

Fig. 15. Kernwarze, vom Pollenschlauche durchzogen, und Scheitelgegend des Embryosackes eines längsdurchschnittenen befruchteten Eychens derselben Pflanze. Vgr. 300.

Figur 16—21. Scheuchzeria palustris.

Fig. 16. Unbefruchtetes Eychen, längsdurchschnitten. Vgr. 15.

Fig. 17. Eykern eines solchen. Vgr. 90.

Fig. 18, 19. Embryosäcke solcher Eychen. Vgr. 200.

Fig. 20. Embryosack und vom Pollenschlauch durchzogene Kernwarze eines vor Kurzem befruchteten Eychens. Gleiche Vgr.

Fig. 21. Embryoanlage aus einem Eychen ähnlicher Entwickelung. Gleiche Vgr.

Fig. 22. **Puya chilensis.** Längsdurchschnittsansicht eines unbefruchteten Eychens.

Index.

Alisma Plantago. Krümmung des Eykerns 660.
Bau des Eykerns 663.
Fehlen der Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Zeitige Verdrängung der den befruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschicht durch diesen 692.
Zunahme des Umfanges des befruchteten Keimbläschens 698.
Zellenzahl des Vorkeims 700.
Alismaceen. Form des Vorkeims 700.
Allium odorans. Weite Oeffnung des Exostoms 661.
Bau des jungen Eykerns 663.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Vollständige Verdrängung der, den unbefruchteten Embryosack seitlich umgebenden Zellschichten; Vermehrung der Zellen der Kernwarze während dieses Vorganges 667.
Sonderung des Embryosackinhalts in Vacuole und Wandbeleg 669.
Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.
Gelegentliches Verschwinden der unbefruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Verschwinden des primären Kerns des Embryosackes noch vor der Befruchtung 678.
Vorbeiwachsen des Pollenschlauchs an der Kernwarze 686.
Verdrängung des inneren Integuments durch den befruchteten Embryosack 692.
Beharren des des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Entwickelung befruchteten Keimbläschens auf der Grösse des unbefruchteten bis zur ersten Theilung 698.
Allium victoriale. Verdrängung des inneren Integuments durch den Embryosack 739.
Aloë subtuberculata. Dreizahl der Integumente 661.
Amaryllideen. Beugung des freien Theiles des Funiculus 652.
Verdrängung den oberen Theil des unbefruchteten Embryosackes umhüllender Zellschichten 665.
Dreizahl der Keimbläschen 672.
Erhärten der Membran auch der fehlschlagenden Keimbläschen 694.
Form des Vorkeims 700.
Langsamkeit der Entwickelung des Embryo 708.
Amaryllis Belladonna. Einziges Integument des Eychens 664.
Aroïdeen. Verdrängung des den Embryosack seitlich umhüllenden Gewebes 669.
Zweizahl der Keimbläschen 672.
Form des Vorkeims 700.
Wachsthum des Endosperms 705.
Arum. Unterbleiben der Beugung des freien Theiles des Funiculus 653.
Massenhaftigkeit des äussern Integuments 660.
Hervorragen des Endostoms aus dem Exostom 661.
Bau des Eykerns 663.
Zeit, deren der Pollenschlauch bedarf, um von der Narbe bis in den Eymund zu gelangen 683.
Endospermbildung 704.
Arum divaricatum. Vollständige Verdrängung der, den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschichten 667.
Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.
Gelegentliches Verschwinden der unbefruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Arum maculatum. Anordnung des Zelleninhalts junger Pollenmutterzellen 633.

Bau des jungen Eykerns 663.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Vollständige Verdrängung der, den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschichten; Vermehrung der Zellen der Kernwarze während dieses Vorganges 667.
Sonderung des Embryosackinhalts in Vacuole und Wandbeleg 669.
Gelegentliches Verschwinden der unbefruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Durchbohrung der Kernwarze durch den Pollenschlauch 686.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Dauer der Zeit zwischen Ankunft des Pollenschlauchs am Embryosacke, und erster Theilung des befruchteten Keimbläschens 692.
Zunahme des Umfanges des befruchteten Keimbläschens 698.
Kürze des Vorkeims 700.

Arum orientale. Vollständige Verdrängung der, den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschichten 667.
Durchbohrung der Kernwarze durch den Pollenschlauch 686.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Zunahme des Umfanges des befruchteten Keimbläschens 698.
Kürze des Vorkeims 700.

Arum ternatum. Weite Oeffnung des Exostoms 664.
Vollständige Verdrängung der, den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschichten 667.
Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.

Asphodeleen. Verdrängung den oberen Theil des unbefruchteten Embryosackes umhüllender Zellschichten 665.

Asphodelus luteus. Krümmung der Längsachse der Chalazaregion 659.
Dreizahl der Integumente 662.
Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.
Gelegentliches Verschwinden der befruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Bildung einer freien Zelle um den primären Kern des Embryosackes 677.
Verschwinden des primären Kerns des Embryosackes noch vor der Befruchtung 678.

Bonapartea juncea. Anatropie der Eychen 659.
Einzahl der Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.

Bromeliaceen. Verdrängung den oberen Theil des unbefruchteten Embryosackes umhüllender Zellschichten 665.

Brunsvigia minor (?) Einziges Integument des Eychens 661.

Bulbocodium vernum. Beugung des freien Theiles des Funiculus 652.
Anatropie der Eychen 658.
Bau des Eykerns 663.
Vom Kern des Embryosackes ausgehende Protoplasmastränge 669.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Bau des Griffels und Fruchtknotens 737.

Caladium bicolor. Weite Oeffnung des Exostoms 661.
Vollständige Verdrängung der seitlich den unbefruchteten Embryosack umhüllenden Zellschichten durch den unteren Theil desselben 667.

Calla palustris. Unterbleiben der Beugung des freien Theiles des Funiculus 652.
Anatropie der Eychen 659.
Weite Oeffnung des Exostoms 661.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Vollständige Verdrängung der den unbefruchteten Embryosack umhüllenden Zellschichten durch den unteren Theil desselben 667.
Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.
Gelegentliches Verschwinden der unbefruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Durchbohrung der Kernwarze durch den Pollenschlauch 686.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Endospermbildung 704.
Bau des Fruchtknotens 725.

Canna. Krümmung des Eykerns 660.
Jüngste Zustände des Eykerns 663.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Verdrängung der den jungen Embryosack deckenden Zellschichten bis auf eine 665.
Zellkerne der Keimbläschen, frei im Embryosack entstehend 670.
Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.

Gelegentliches Verschwinden der unbefruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Wanderung des Pollenschlauchinhalts in die fortwachsende Spitze 685.
Eindringen des Pollenschlauchendes in den Embryosack 687.
Wucherungen des Pollenschlauchendes im Embryosacke 687.
Form des Vorkeims 700.
Unterbleiben der Endospermbildung 707.
Carex. Unterbleiben der Beugung des freien Theiles des Funiculus 652.
Anatropie der Eychen 659.
Hervorragen des Endostoms aus dem Exostom 661.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Schnelligkeit des Vordringens des Pollenschlauchs von der Narbe bis in den Eymund 682.
Form des Vorkeims 700.
Wachsthum des Endosperms 705.
Bau des reifen Embryo 709.
Cephalanthera rubra. Allmäliges Fortschreiten der Auflösung der Pollenmutterzellenwände von Aussen nach Innen 640.
Contraction der jungen Pollenhaut bei Behandlung mit Chlorzinkjod 647.
Viscingehalt von Zellen des vorderen Abschnitts der Narbe 652.
Colchicum autumnale. Vollständige Verdrängung der, den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschichten 667.
Schnelligkeit des Herabwachsens des Pollenschlauchs von der Narbe bis in den Eymund 682.
Wanderung des Pollenschlauchinhalts in die fortwachsende Spitze 685.
Vorbeiwachsen des Pollenschlauchs an der Kernwarze 686.
Rasche Dehnung der Integumente nach Ankunft des Pollenschlauches im Eymunde 691.
Ort der Anheftung des zum Embryo sich entwickelnden Keimbläschens 693.
Fehlen des Zellkerns in dem befruchteten Keimbläschen vom Herbst bis zum Mai 695.
Dauer der Zeit zwischen Ankunft des Pollenschlauchs am Embryosacke, und erster Quertheilung des befruchteten Keimbläschens 697.
Beharren des befruchteten Keimbläschens auf der Grösse des unbefruchteten bis zur ersten Theilung 698.
Wachsthum des Endosperms 705.
Langsamkeit der Entwickelung des Embryo 708.
Coix Lacryma. *C*-förmige Krümmung des Eykerns 659.
Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.
Fehlen der Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Crinum capense. Krümmung des Eykerns 660.
Einziges Integument des Eychens 662.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 676, 677.
Verästelung des Pollenschlauchs innerhalb der Mikropyle 684.
Wanderung des Pollenschlauchinhalts in die fortwachsende Spitze 685.
Inhaltskörper des Pollenschlauchendes 685.
Verdickung der Wand des Pollenschlauchendes 689.
Verdrängung des Integuments durch den befruchteten Embryosack 692.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Gelegentliches Unterbleiben der Bildung fester Zellhäute um die abortirenden Keimbläschen 694.
Beharren des befruchteten Keimbläschens auf der Grösse des unbefruchteten bis zur ersten Theilung 698.
Vorkeim 701.
Endospermbildung 703.
Verdrängung der Testa durch das Endosperm 706.
Crinum variabile. Krümmung des Eykerns 660.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Crocus vernus. Anatropie der Eychen 658.
Bau des jungen Eykerns 663.
Zahl der Zellschichten des entwickelten Eykerns 663.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Vollständige Verdrängung der den Embryosack deckenden Zellschichten 666.
Spitzenwachsthum der Scheitelgegend des Embryosackes 666
Sonderung des Embryosackinhalts in Vacuole und Wandbeleg 669.
Feste Zellhaut der unbefruchteten Keimbläschen 671.
Theilnahme der Anheftungsstellen der in

der Scheitelwölbung des Embryosackes haftenden Keimbläschen am Spitzenwachsthum des Embryosackscheitels 673.
Veränderungen des Inhalts des zum Fehlschlagen bestimmten Keimbläschens noch vor der Befruchtung 675.
Anordnung eines Theiles des Inhalts der oberen Hälfte der Keimbläschen zu faserähnlichen Bildungen 676.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 676, 677.
Leistenförmige Verdickungen der Aussenseite der Haut des Embryosackscheitels 679.
Schnelligkeit des Herabwachsens des Pollenschlauchs bis in den Eymund 682.
Verästelungen des Pollenschlauchs in der Mikropyle 684.
Wanderung des Pollenschlauchinhalts in die fortwachsende Spitze 685.
Inhaltskörper des Pollenschlauchendes 685.
Verhalten des Pollenschlauchendes zur Cuticula des Embryosackscheitels 688.
Ablösbarkeit des Pollenschlauchendes vom Embryosacke 688.
Verdickung, Schichtung und Tüpfelbildung der Wand des Pollenschlauchendes 689.
Wachsthum der Integumente, welches das des Eykerns überwiegt 691.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Erhärten der Membran auch der fehlschlagenden Keimbläschen 694.
Gelegentliche Kernlosigkeit der Trägerzelle des Vorkeims 696.
Dauer der Zeit zwischen Ankunft des Pollenschlauchs am Embryosacke, und erster Theilung des befruchteten Keimbläschens 697.
Geringe Streckung des befruchteten Keimbläschens 698.
Haften des befruchteten Keimbläschens an der Innenwand des Embryosackes 698.
Vorkeim 700, 701.
Endospermbildung 703.
Wachsthum des Endosperms 705.
Langsamkeit der Entwickelung des Embryo 708.
Monströse Entwickelung von Pollenschlauchenden und Keimbläschen 710.

Cyperaceen. Zweizahl der Keimbläschen 672.
Verdrängung des Perisperms durch den Embryosack 692.

Czackia Liliastrum. Weite Oeffnung des Exostoms 661.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Streckung des befruchteten Keimbläschens 698.
Endospermbildung 703.
Wachsthum des Endosperms 705.

Elymus arenarius. *S*-förmige Krümmung des Eykerns 659.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Endospermbildung 703.

Epipactis. Entwickelung des Pollens 645.
Viscingehalt von Zellen des vorderen Abschnitts der Narbe 652.
Zurückbleiben des Längenwachsthums des äusseren Integuments hinter dem des Inneren 661.

Erythronium dens canis. Häufige Kernlosigkeit der Trägerzelle des Vorkeims 696.
Zunahme des Umfanges des befruchteten Keimbläschens 698.
Vorkeim 701.

Fritillaria. Zahl der Zellschichten des Eykerns 663.
Zellkerne der Keimbläschen, frei im Wandbeleg des Embryosackes 670.
Bildung einer freien Zelle um den primären Kern des Embryosackes 677.
Kernlosigkeit der Trägerzelle des Vorkeims 696.
Unbeständigkeit des Maasses der Grössezunahme des befruchteten Keimbläschens 698.
Vorkeim 701.

Funkia coerulea. Anatropie der Eychen 659.
Bau des jungen Eykerns 663.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Verdrängung der den Embryosack deckenden Zellschichten bis auf eine 665.
Zellkerne der Keimbläschen, frei im Wandbeleg des Embryosackes 670.
Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.
Höhere, als Dreizahl der Keimbläschen 672.
Gelegentliches Verschwinden der unbefruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Bildung einer freien Zelle um den primären Kern des Embryosackes 677.
Verästelung des Pollenschlauches innerhalb der Mikropyle 685.

Frühzeitige Entwickelung des untersten Keimbläschens zum Embryo 698.
Vorkeim 701.

Gagea lutea. Beugung und Torsion des freien Theiles des Funiculus 652.
Anatropie der Eychen 658.
Zahl der Zellschichten des Eykerns 663.
Gelegentliches Verschwinden der unbefruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Bildung einer freien Zelle um den primären Kern des Embryosackes 678.
Verschwinden des primären Kerns des Embryosackes noch vor der Befruchtung 678.
Grössezunahme des Eychens bei Ankunft des Pollenschlauchs in der Mikropyle 690.
Wachsthum der Integumente, welches das des Eykerns überwiegt 691.
Zeitige Verdrängung der den befruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschicht durch diesen 692.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Gelegentliche Bildung des secundären Kerns des befruchteten Keimbläschens noch während des Vorhandenseins des primären 695.
Kernlosigkeit der Trägerzelle des Vorkeims 696.
Zunahme des Umfangs des befruchteten Keimbläschens 698.
Vorkeim 700.
Endospermbildung 703.
Wachsthum des Endosperms 705.

Gladiolus communis. Hebung des unteren Endes des Embryosacks durch Massenzunahme des, dasselbe umschliessenden Gewebes 665.
Vollständige Verdrängung der den Embryosack deckenden Zellschichten 666.
Theilnahme der Anheftungsstellen der in der Scheitelwölbung des Embryosackes haftenden Keimbläschen an dem Spitzenwachsthum derselben 674.
Leistenförmige Verdickungen der Aussenseite der Haut des Embryosackscheitels 679.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.

Gloriosa superba. Anatropie der Eychen 650.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Verschwinden des primären Kerns des Embryosackes noch vor der Befruchtung 678.

Gramineen. Hervorragen des Endostoms aus dem Exostom 661.
Zahl der Zellschichten des Eykerns 663.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Zweizahl der Keimbläschen 672.
Schnelligkeit des Herabwachsens des Pollenschlauches von der Narbe bis in den Eymund 682.
Verdrängung des Perisperms durch den Embryosack 692.
Häufige Kernlosigkeit der Trägerzelle des Vorkeims 696.
Kürze der Zeit zwischen der Ankunft des Pollenschlauches am Embryosacke, und der ersten Theilung des befruchteten Keimbläschens 697.
Streckung des befruchteten Keimbläschens 698.
Wachsthum des Endosperms 705.
Verdrängung des Endosperms durch das Wurzelende des Embryo 707.
Schnelligkeit der Ausbildung des Embryo 708.
Entwickelung des Scutellum 709.

Gymnadenia conopsea. Keimung 723.

Habranthus chilensis. Vorkeim 700.

Hemerocallis flava. Auflösung des primären Kerns der Pollenmutterzellen 634.
Körnerplatten zwischen den secundären und tertiären Kernen der Pollenmutterzelle 635.
Vollständige Verdrängung der den unbefruchteten Embryosack deckenden Zellschichten 666.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Endospermbildung 703.

Hippeastrum aulicum. Krümmung der Längsachse der Chalazaregion 659.
Einfachheit des Baues des Endostoms 660.
Massenhaftigkeit des äusseren Integuments 660.
Zahl der Zellschichten des Eykerns 663.
Vom Kern des Embryosackes ausgehende Protoplasmastränge 669.
Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.
Einzahl der Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Verästelung des Pollenschlauches innerhalb der Mikropyle 684.
Verdickung der Wand des Pollenschlauchendes 689.

Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Gelegentliches Unterbleiben der Bildung fester Zellhäute um die abortirenden Keimbläschen 694.
Streckung des befruchteten Keimbläsch. 698.
Vorkeim 700.
Hordeum vulgare. *S*-förmige Krümmung des Eykerns 659.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Ablösbarkeit des Pollenschlauchendes vom Embryosacke 689.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Vorkeim 701.
Endospermbildung 703.
Hyacinthus orientalis. Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.
Gelegentliches Verschwinden der unbefruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Ablösbarkeit des Pollenschlauchendes vom Embryosacke 689.
Haften des befruchteten Keimbläschens an der Innenwand des Embryosackes 698.
Endospermbildung 703.
Hymenocallis ovata. Einfachheit des Baues des Endostoms 660.
Weite Oeffnung des Endostoms 661.
Höhere, als Dreizahl der Keimbläschen 672.
Fehlen der Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Vorbeiwachsen des Pollenschlauchs an der Kernwarze; Auftreffen seines Endes auf die Seitenfläche des Embryosacks 686.
Frühzeitige Entwickelung des untersten Keimbläschens zu einem Embryo 694.
Irideen. Hebung des unteren Endes des unbefruchteten Embryosackes durch Massenzunahme des dasselbe einschliessenden Gewebes; — Verdrängung den oberen Theil des unbefruchteten Embryosackes umhüllender Zellschichten 665.
Erhärten der Membranen auch der fehlschlagenden Keimbläschen 694.
Form des Vorkeims 700.
Iris. Unregelmässige Form der Pollenmutterzellen 633.
Anatropie der Eychen 658.
Hebung des unteren Endes des Embryosacks durch Massenzunahme des dasselbe umschliessenden Gewebes 665.
Iris. Arten mit gebarteten Perigonialblättern; — Fünf- und Mehrzahl in derselben Mutterzelle entstehender Pollenkörner 636.
Simultane Theilung der Mutterzelle in mehr als zwei Tochterzellen 637.
Ausschlüpfen der Pollenzellen aus berstenden Specialmutterzellen 639.
Allmäliges Fortschreiten der Auflösung der Mutterzellwände von Aussen nach Innen 640.
Iris florentina. Anordnung des Zelleninhalts junger Pollenmutterzellen 633.
Körnerplatten zwischen den secundären und tertiären Kernen der Pollenmutterzelle 635.
Iris parisiensis. Aufquellen der inneren Schichten der Haut der Pollenmutterzellen 634.
Iris pumila. Auflösung des primären Kerns der Pollenmutterzellen 634.
Bau des jungen Eykerns 663.
Zahl der Zellschichten des entwickelten Eykerns 663.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Verdrängung der den jungen Embryosack deckenden Zellschichten bis auf eine 665.
Sonderung des Embryosackinhalts in Vacuole und Wandbeleg 669.
Zellkerne der Keimbläschen, frei im Wandbelege des Embryosacks entstehend 670.
Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 676.
Bildung einer freien Zelle um den primären Kern des Embryosackes 678.
Amylumgehalt des unbefruchteten Embryosackes 678.
Schnelligkeit des Herabwachsens des Pollenschlauchs von der Narbe bis in den Eymund 680.
Zeitige Verdrängung der den befruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschicht durch diesen 692.
Vorkeim 700.
Endospermbildung 703.
Wachsthum des Endosperms 705.
Ixia rosea. Anatropie der Eychen 658.
Vollständige Verdrängung der den Embryosack deckenden Zellschichten 666.
Spitzenwachsthum der Scheitelgegend des Embryosackes 666.

Theilnahme der in der Scheitelwölbung des Embryosackes haftenden Ansatzflächen von Keimbläschen am Spitzenwachsthum des Embryosackscheitels 674.
Bildung fester Längsfasern in dem ausgewachsenen Theile der Keimbläschen 675.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Leistenförmige Verdickungen der Aussenseite der Haut des Embryosackscheitels 679.
Wachsthum der Integumente, welches das des Eykerns überwiegt 691.
Lemna minor. Vollständige Verdrängung der, den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschichten 667.
Keimung 716.
Leucojum vernum. Krümmung der Längsachse der Chalazaregion 659.
Bau des Eykerns 663.
Cylinderform des zur Befruchtung bereiten Embryosackes 666.
Vom Kern des Embryosackes ausgehende Protoplasmastränge 669.
Feste Zellhaut der Keimbläschen 671.
Veränderungen des Inhalts des zum Fehlschlagen bestimmten Keimbläschens noch vor der Befruchtung 675.
Anordnung eines Theiles des Inhalts der oberen Hälfte der Keimbläschen zu faserähnlichen Bildungen 676.
Schnelligkeit des Herabwachsens des Pollenschlauchs von der Narbe bis in den Eymund 682.
Verästelung des Pollenschlauchs innerhalb der Mikropyle 684.
Zeitige Verdrängung der, den befruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschicht durch diesen 692.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Gelegentliches Unterbleiben der Bildung fester Zellhäute um die abortirenden Keimblaschen 694.
Kernhaltigkeit der Trägerzelle des Vorkeims 696.
Sonderung des Inhalts in Quertheilung begriffener befruchteter Keimbläschen in zwei Hälften vor Bildung der Querwand 696.
Dauer der Zeit zwischen Ankunft des Pollenschlauches am Embryosacke, und erster Theilung des befruchteten Keimbläschens 697.
Streckung des befruchteten Keimbläschens 698.
Haften des befruchteten Keimbläschens an der Innenwand des Embryosackes 698.
Auftreten der Kerne der Endospermzellen 701.
Endospermbildung 703.
Langsamkeit der Entwickelung des Embryo 708.
Liliaceen. Beugung des freien Theiles des Funiculus 652.
Massenhaftigkeit des äusseren Integuments 660.
Hervorragen des Endostoms aus dem Exostom 661.
Bau des Eykerns 663.
Dreizahl der Keimbläschen 672.
Grössenzunahme des Eychens bei Ankunft des Pollenschlauchs in der Mikropyle 690.
Erhärten der Membran auch der fehlschlagenden Keimbläschen 694.
Form des Vorkeims 700.
Langsamkeit der Entwickelung des Embryo 708.
Stillstand der Entwickelung des embryonalen Achsenendes beim Hervorsprossen des Kotyledon 709.
Lilium. Schnelligkeit des Herabwachsens des Pollenschlauchs von der Narbe bis in den Eymund 682.
Maranta zebrina. Aufquellen der Intine 640.
Melanthaceen. Zweizahl der Keimbläschen 672.
Merendera caucasica. Beugung des freien Theiles des Funiculus 652.
Anatropie der Eychen 658.
Weite Oeffnung des Endostoms 661.
Vollständige Verdrängung der, den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschichten 667.
Anschmiegung der Embryosackhaut an die Hüllhaut des Eykerns 668.
Vom Kern des Embryosackes ausgehende Protoplasmastränge 669.
Veränderungen des Inhalts des zum Fehlschlagen bestimmten Keimbläschens noch vor der Befruchtung 675.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Amylumgehalt des unbefruchteten Embryosackes 678.
Schnelligkeit des Herabwachsens des Pollenschlauchs von der Narbe bis in den Eymund 682.

Wanderung des Pollenschlauchinhalts in die fortwachsende Spitze 685.
Inhaltskörper des Pollenschlauchendes 685.
Vorbeiwachsen des Pollenschlauchs an der Kernwarze; Verhalten seines Endes an der Seitenfläche des Embryosacks 686.
Ablösbarkeit des Pollenschlauchendes vom Embryosacke 689.
Rasche Dehnung der Integumente nach Ankunft des Pollenschlauchs am Eymunde 692.
Ort der Anheftung des zum Embryo sich entwickelnden Keimbläschens 693.
Dauer der Zeit zwischen Ankunft des Pollenschlauches am Embryosacke, und erster Theilung des befruchteten Keimbläschens 697.
Beharren des befruchteten Keimbläschens auf der Grösse des unbefruchteten bis zur ersten Theilung 698.
Langsamkeit der Entwickelung des Embryo 708.
Bau des Griffels und Fruchtknotens 733.

Najadeen. Zweizahl der Keimbläschen 672.
Kernlosigkeit der Trägerzelle des Vorkeims 696.
Form des Vorkeims 700.
Schnelligkeit der Ausbildung des Embryo 708.

Najas major. Körnerplatten zwischen den tertiären Kernen der Pollenmutterzelle 635.
Simultane Theilung der Pollenmutterzelle in mehr als zwei Tochterzellen 637.
Bau der Anthere. Pollenbildung 642.
Beugung des freien Theiles des Funiculus 652.
Krümmung des Eykerns 660.
Weite Oeffnung des Exostoms 661.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Vom Kern des Embryosackes ausgehende Protoplasmastränge 669.
Einzahl der Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 676.
Entwickelung von Pollenschläuchen in den Antherenfächern 683.
Wanderung des Pollenschlauchinhalts in die fortwachsende Spitze 685.
Durchbohrung der Kernwarze durch den Pollenschlauch 686.
Tiefe Einstülpung des Embryosacks durch den Pollenschlauch 687.
Verdrängung des Perisperms durch den Embryosack 692.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Auftreten des secundären Kerns des befruchteten Keimbläschens vor Verschwinden des primären 695.
Dauer der Zeit zwischen der Ankunft des Pollenschlauchs am Embryosacke, und der ersten Quertheilung des befruchteten Keimbläschens 697.
Unstetigkeit des Maasses der Zunahme des Umfanges des befruchteten Keimbläschens 698.
Entwickelung des Embryo aus dem Vorkeime 708.
Beschaffenheit der hypokotylen Achse 709.

Narissineen. Verdrängung den oberen Theil des unbefruchteten Embryosackes umhüllender Zellschichten 665.

Narcissus Jonquilla. Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen; exceptionelle Lage derselben 677.
Einstülpung des Embryosacks durch den Pollenschlauch 687.
Zeitige Verdrängung der, den befruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschicht durch diesen 692.
Beharren des befruchteten Keimbläschens auf der Grösse des unbefruchteten bis zur ersten Theilung 698.

Narcissus poëticus. Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Einstülpung des Embryosacks durch den Pollenschlauch 687.
Zeitige Verdrängung der den befruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschicht durch diesen 692.

Neottia Nidus avis. Bau des Rostellum 648.

Neottia ovata. Auflösung des primären Kerns der Pollenmutterzellen 634.
Entwickelung des Pollens 645.
Bau des Rostellum 651.

Orchideen.
Langsame Entwickelung des Embryo 708.
Verhältniss des ersten Blattes der Keimpflanze zum Achsenende 709.

Orchis. Entwickelung des Pollens 647.
Entwickelung der Caudiculae und Retinaculae 652.
Entwickelung der Eychen 653.
Unterbleiben der Beugung des freien Theiles des Funiculus 658.
Weite Oeffnung des Exostoms 661.

Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Sonderung des Embryosackinhalts in Vacuole und Wandbeleg 669.
Freie Zellkerne der Keimbläschen 670.
Zwei- bis Dreizahl der Keimbläschen 672.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Fehlen der Cuticula des Embryosackscheitels 680.
Zeit, deren der Pollenschlauch bedarf, um von der Narbe bis in den Eymund zu gelangen 683.
Entwickelung von Pollenschläuchen in den Antherenfächern 683.
Wanderung des Pollenschlauchinhalts in die fortwachsende Spitze 685.
Abhängigkeit der vollständigen Ausbildung von Fruchtknoten und Eychen vor Ankunft von Pollenschläuchen in der Fruchtknotenhöhle 690.
Rasche Dehnung der Integumente nach Ankunft des Pollenschlauchs im Eymunde 691.
Geschlossenheit des Pollenschlauchendes bei der Befruchtung 692.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Kernhaltigkeit der Trägerzelle des Vorkeims 696.
Dauer der Zeit zwischen Ankunft des Pollenschlauchs am Embryosacke, und erster Quertheilung des befruchteten Keimbläschens 697.
Streckung des befruchteten Keimbläschens 698.
Vorkeim 700.
Langsamkeit der Entwickelung des Embryo 708.

Oryza sativa. Verhältniss des Scutellum zum Kotyledon 709.

Panicum. Endospermbildung 703.

Paris quadrifolia. Bau des jungen Eykerns 663.
Zellvermehrung des den Embryosack umgebenden Gewebes 665.
Sonderung des Embryosackinhalts in Vacuole und Wandbeleg 669.
Zellkerne der Keimbläschen, frei im Embryosack entstehend 670.
Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Beharren des befruchteten Keimbläschens auf der Grösse des unbefruchteten bis zur ersten Theilung 698.

Phajus Wallichii. Entwickelung des Pollens 649.

Philodendron Imbe. Krümmung der Längsachse der Chalazagegend 659.
Geringe Dicke des äusseren Integuments 660.
Weite Oeffnung des Exostoms 661.
Vollständige Verdrängung der, den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschichten 667.
Bau des Fruchtknotens 725.

Pistia Stratiotes. Schliessung des Exostoms zu einem engen Kanale 661.
Bau des jungen Eykerns 663.
Bau des entwickelten Eykerns 663.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Vollständige Verdrängung der, den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschichten 667.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Vorkeim 701.
Endospermbildung 705.
Anlegung des Kotyledon 709.

Pontederia cordata. Unterbleiben der Beugung des freien Theiles des Funiculus 652.
Beharren des befruchteten Keimbläschens auf der Grösse des unbefruchteten bis zur ersten Theilung 698.

Potamogeton crispus. *S*-förmige Krümmung des Eykerns 659.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Verdrängung des Perisperms durch den befruchteten Embryosack 692.
Kernlosigkeit der Trägerzelle des Vorkeims 696.

Potamogetoneen. Form des Vorkeims 700.
Schnelligkeit der Ausbildung des Embryo 708.

Pothos longifolia. Bau des Eykerns 663.
Vollständige Verdrängung der, den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschichten 667.
Anschmiegung der Embryosackhaut an die Hüllhaut des Eykerns 668.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Verschwinden des primären Kerns des Embryosackes noch vor der Befruchtung 678.

Amylumgehalt des unbefruchteten Embryosackes 678.
Zeit, deren der Pollenschlauch bedarf, um von der Narbe bis in den Eymund zu gelangen 683.
Verästelung des Pollenschlauchs in der Fruchtknotenhöhle 685.
Inhaltskörper des Pollenschlauchendes 685.
Gelegentliche Durchbohrung der Kernwarze durch Pollenschläuche; regelmässiges Vorbeiwachsen der Schläuche an der Kernwarze 686.
Ablösbarkeit des Pollenschlauchendes vom Embryosacke 689.
Eintritt mehrerer Pollenschläuche in dieselbe Mikropyle 690.
Rasche Dehnung der Integumente nach Ankunft des Pollenschlauches im Eymunde 691.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Kernhaltigkeit der Trägerzelle des Vorkeims 696.
Streckung des befruchteten Keimbläschens 698.
Vorkeim 700.
Auftreten der Kerne der Endospermzellen 704.
Endospermbildung 703, 704.
Anlegung des Kotyledon 709.
Bau des Fruchtknotens 726.

Pothos pentaphylla. Geringe Dicke des äusseren Integuments 660.
Schliessung des Exostoms zu einem engen Kanale 661.
Vollständige Verdrängung der, den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschichten 667.

Puja chilensis. Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.

Puschkinia scilloïdes. Anatropie der Eychen 658.
Veränderungen des Inhalts des zum Fehlschlagen bestimmten Keimbläschens noch vor der Befruchtung 675.
Anordnung eines Theiles des Inhalts der oberen Hälfte der Keimbläschen zu faserähnlichen Bildungen 676.
Fehlen der Cuticula des Embryosackscheitels 680.
Schnelligkeit des Herabwachsens des Pollenschlauchs von der Narbe bis in den Eymund 683.
Ablösbarkeit des Pollenschlauchendes vom Embryosacke 689.
Eintritt mehrerer Pollenschläuche in dieselbe Mikropyle 690.
Grössenzunahme der Eychen nach Ankunft des Pollenschlauches in der Mikropyle 690.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Häufige Kernlosigkeit der Trägerzelle des Vorkeims 696.
Sonderung des Inhalts in Quertheilung begriffener befruchteter Keimbläschen in zwei Hälften vor Auftreten der Scheidewand 696.
Streckung des befruchteten Keimbläschens 698.
Haften des befruchteten Keimbläschens an der Innenfläche des Embryosackes 698.
Endospermbildung 703.

Rhodea japonica. Anatropie der Eychen 658.
Verdrängung den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllender Zellschichten 667.

Ruppia maritima. *S*-förmige Krümmung des Eykerns 659.
Weite Oeffnung des Exostoms 661.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Gelegentliches Verschwinden der befruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Fehlen der Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Verdrängung des Perisperms durch den Embryosack 692.
Zunahme des Umfangs des befruchteten Keimbläschens 697.
Kürze des Vorkeims 700.
Entwickelung des Embryo aus der zweiten Zelle des Vorkeims 708.
Wucherung der hypokotylen Achse 709.

Scheuchzeria palustris. Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.
Fehlen der Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Bildung einer freien Zelle um den primären Kern des Embryosackes 678.
Unstetigkeit des Maasses der Zunahme an Umfang des befruchteten Keimbläschens 688.
Vorkeim 700.
Endospermbildung 703, 707.

Scilla bifolia. Anatropie der Eychen 658.

Endospermbildung 703.
Secale cereale. *S*-förmige Krümmung des Eykerns 659.
Weite Oeffnung des Exostoms 661.
Gelegentliches Verschwinden der unbefruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Kernhaltigkeit der Trägerzelle des Vorkeims 696.
Ablösbarkeit des befruchteten Keimbläschens von der Innenfläche des Embryosackes 699.
Vorkeim 701.
Endospermbildung 703.
Schnelligkeit der Entwickelung des Embryo 708.
Sobralia macrantha. Keimung 723.
Sorghum vulgare. *C*-förmige Krümmung des Eykerns 659.
Geringe Entwickelung des äusseren Integuments 661.
Ausnahmsweises Verschwinden der unbefruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Fehlen der Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Verschwinden des primären Kerns des Embryosackes noch vor der Befruchtung 678.
Leistenförmige Verdickungen der Embryosackhaut in der Scheitelgegend 679.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Vorkeim 701.
Endospermbildung 703.
Stratiotes aloïdes. Bau des reifen Embryo 715.
Symplocarpus foetida. Beugung des freien Theiles des Funiculus 652.
Lagenverhältniss dieser Krümmungsstelle zum Eykern 659.
Weites Zurückbleiben des Längenwachsthums des äusseren Integuments hinter dem Innern 661.
Theilung des Endostoms in dreieckige Lappen 661.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Verdrängung den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllender Zellschichten 667.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Zeitige Verdrängung der den befruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschicht durch diesen 692.
Vorkeim 700.
Verdrängung des Endosperms durch den Embryo 707.
Thalia dealbata. Embryosack 723.
Tradescantia virginica. Auflösung des primären Kerns der Pollenmutterzellen 634.
Krümmung der Längsachse der Chalazaregion 659.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Verschwinden des primären Kerns des Embryosackes noch vor der Befruchtung 678.
Beharren des befruchteten Keimbläschens auf der Grösse des unbefruchteten bis zur ersten Theilung 698.
Vorkeim 707.
Triglochin maritimum. Anatropie der Eychen 658.
Einfachheit des Baues des Endostoms 660.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Verdrängung den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllender Zellschichten 667.
Zunahme des Umfanges des befruchteten Keimbläschens 698.
Unterbleiben der Endospermbildung 707.
Entwickelung des Embryo aus dem Vorkeim 708.
Triteleia uniflora. Krümmung der Längsachse der Chalazaregion 659.
Zahl der Zellschichten des entwickelten Eykerns 663.
Triticum vulgare. *S*-förmige Krümmung des Eykerns 659.
Verschwindend geringe Entwickelung des äusseren Integuments 661.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Ablösbarkeit des Pollenschlauchendes vom Embryosacke 689.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Ablösbarkeit des befruchteten Keimbläschens von der Innenfläche des Embryosackes 699.
Vorkeim 701.
Endospermbildung 703.
Schnelligkeit der Entwickelung des Embryo 708.

Tritonia crocata. Vollständige Verdrängung der den Embryosack deckenden Zellschichten 666.
Theilnahme der Ansatzflächen in der Scheitelwölbung des Embryosackes haftender Keimbläschen am Spitzenwachsthum des Embryosackscheitels 674.
Leistenförmige Verdickungen der Aussenseite der Haut des Embryosackscheitels 679.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Auftreten der Kerne der Endospermzellen 701.
Tulipa Gesneriana. Bau des Eykerns 663.
Zellenkerne der Keimbläschen, frei im Wandbelege des Embryosackes 670.
Bildung einer freien Zelle um den primären Kern des Embryosackes 678.
Tulipeen. Verdrängung den oberen Theil des unbefruchteten Embryosackes umhüllender Zellschichten 665.
Uvularia grandiflora. Weite Oeffnung des Exostoms 661.
Vollständige Verdrängung der den unbefruchteten Embryosack seitlich umhüllenden Zellschichten 667.
Gelegentliches Verschwinden der unbefruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Veltheimia viridiflora. Beugung und Torsion des freien Theiles des Funiculus 652.
Anatropie der Eychen 658.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Verdrängung der den jungen Embryosack deckenden Zellschichten bis auf eine 665.
Cylinderform des zur Befruchtung bereiten Embryosackes; Entwickelung einer Ausstülpung desselben im unteren Theile 666.
Vom Kern des Embryosackes ausgehende Protoplasmastränge 669.
Fehlen der Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Fehlen der Cuticula des Embryosackscheitels 680.
Ablösbarkeit des Pollenschlauchendes vom Embryosacke 689.
Verdrängung des Perisperms durch den befruchteten Embryosack 692.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Gelegentliche Kernlosigkeit der Trägerzelle des Vorkeims 696.
Sonderung des Inhalts in Quertheilung begriffener befruchteter Keimbläschen in zwei Hälften vor Auftreten der Scheidewand 696.
Dauer der Zeit zwischen Ankunft des Pollenschlauchs am Embryosacke, und erster Theilung des befruchteten Keimbläschens 697.
Streckung des befruchteten Keimbläschens 698.
Endospermbildung 704.
Wachsthum des Endosperms 705.
Zannichellia palustris. *S*-förmige Krümmung des Eykerns 659.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Verdrängung des Perisperms durch den befruchteten Embryosack 692.
Entwickelung des unteren Keimbläschens zum Embryo 693.
Auftreten des secundären Kerns des befruchteten Keimbläschens von Verschwinden des primären 695.
Zunahme des Umfangs des befruchteten Keimbläschens 698.
Unterbleiben der Endospermbildung 707.
Schnelligkeit der Entwickelung des Embryo 708.
Anlegung des Kotyledon 716.
Zea Mays. *C*-förmige Krümmung des Eykerns 659.
Geringe Entwickelung des äusseren Integuments 661.
Fehlen der Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Verschwinden des primären Kerns des Embryosackes noch vor der Befruchtung 678.
Vorkeim 701.
Endospermbildung 703.
Zostera marina. Entwickelung des Pollens 643.
Beugung des Funiculus; Lagenverhältniss der Beugungsstelle zur Chalaza 659.
Hervorragen des Endostoms aus dem Exostom 661.
Jüngste Zustände des Eykerns 663.
Bau des Eykerns nach voller Ausbildung 663.
Lage der zum Embryosack sich entwickelnden Zelle des Eykerns 664.
Vollständige Verdrängung der den unbefruchteten Embryosack umhüllenden und deckenden Gewebschicht; Anschmiegung

der Embryosackhaut an die Hüllhaut des Eykerns 668.
Sonderung des Embryosackinhalts in Vacuole und Wandbeleg 669.
Zellkerne der Keimbläschen, frei entstehend 670.
Ablösbarkeit der Keimbläschen von der Embryosackhaut 672.
Gelegentliches Verschwinden der unbefruchteten Keimbläschen bis auf eines 674.
Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen 677.
Verschwinden des primären Kerns des Embryosackes noch vor der Befruchtung 678.
Fehlen der Cuticula des Embryosackscheitels 680.
Schnelligkeit des Herabsteigens des Pollenschlauchs von der Narbe in den Eymund 682.
Dauer der Zeit zwischen der Ankunft des Pollenschlauches am Embryosacke, und der ersten Theilung des befruchteten Keimbläschens 697.
Zunahme des Umfangs des befruchteten Keimbläschens 698.
Ablösbarkeit des befruchteten Keimbläschens von der Innenfläche des Embryosackes 699.
Kürze des Vorkeims 700.
Unterbleiben der Endospermbildung 707.
Entwickelung des Embryo aus dem Vorkeime 708.
Wucherung der hypokotylen Achse 709.

Errata.

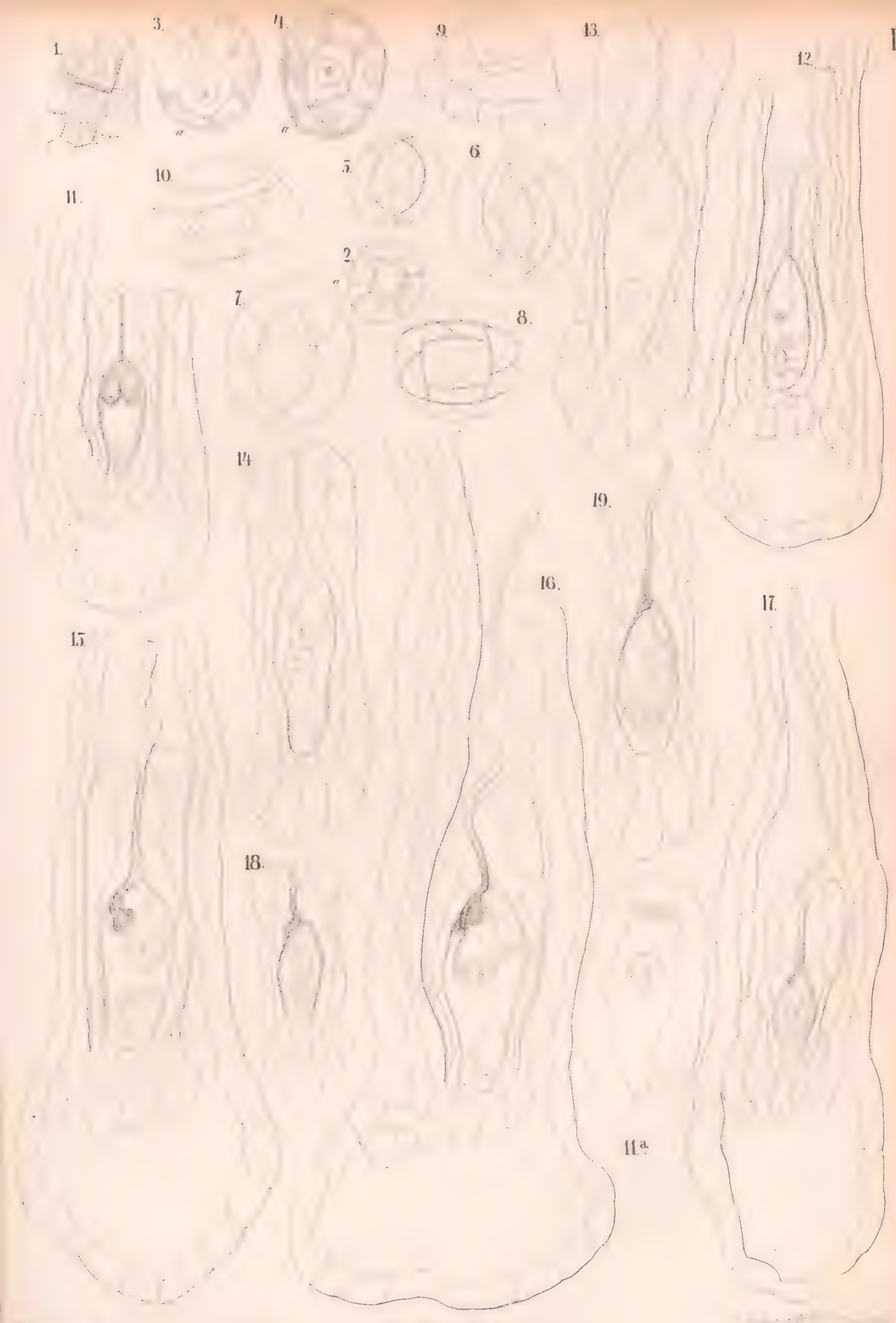
S. 661, Z. 9 v. oben für Crzackia lies Czackia.
S. 666, Z. 17 v. oben für Montrichardia lies Montbretia.
S. 669, Z. 8 v. unten für Hyppeastrum lies Hippeastrum.
S. 672, Z. 2 v. unten } für Hymenocallis caribοea
S. 677, Z. 15 v. unten } lies Hymenocallis ovata.
S. 692, Z. 14 v. oben für Scisameen lies Scitamineen.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

1 25 Najas major. 26-27 Triglochin maritimum. 28 29 Stratiotes aloides.

1-7 Ruppia maritima. 8-16 Zannichellia polustris. 17-19 Potamogeton crispus.
20-21 Alisma Plantago. 22-28 Lemna minor.

Orchis Morio.



Orchis Morio.

1-11 Neottia ovata. 12-14 Neottia Nidus avis. 15-19 Epipactis rubiginosa.

1–2 Orchis fusca. 3–7 Phajus Wallichii. 8–12 Cephalanthera rubra. 13–14 Gymnadenia conopsea. 15–17 Sobralia macrantha. 18 Thalia dealbata. 19–23 Canna Sellowii. 24–27 Maranta zebrina.

1–4. Arum orientale. 5–7. Arum ternatum. 8–10. Arum divaricatum. 11–17. Arum maculatum. 18–27. Pistia Stratiotes (tezensis).

1–3 Philodendron Imbe. 4–7 Symplocarpus foetida. 8 Caladium bicolor. 9–11 Rhodea japonica. 12–16 Calla palustris.

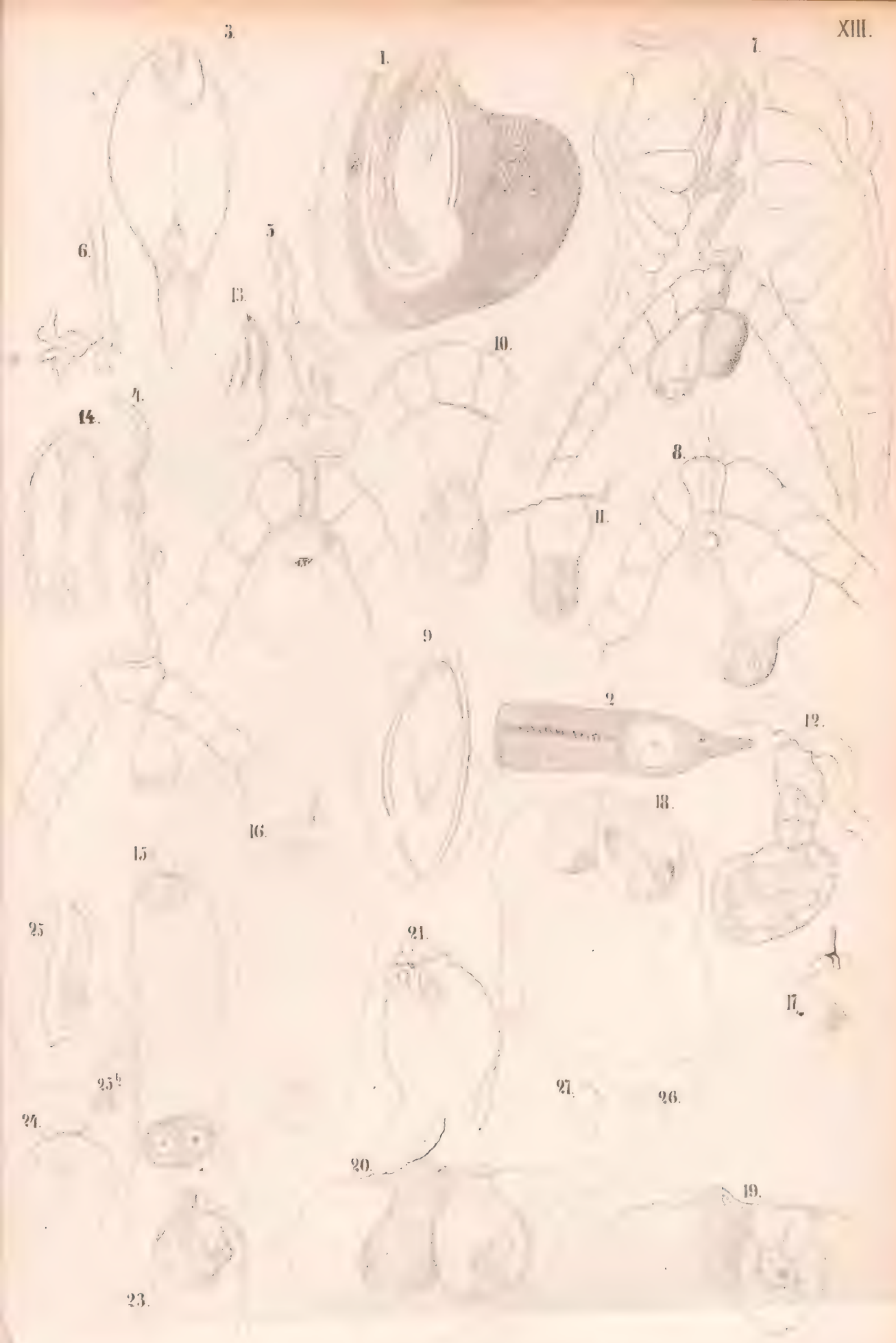
1–3 Pothos pentaphylla. 4–17 Phothos longifolia.

Pothos longifolia.

1-12. Secale cereale 13-16 Triticum vulgare. 17-19 Elymus arenarius.

1 6 Hordeum vulgare. 7 10 Sorghum halepense. 11 12 Coix Lacryma. 13 14 Carex paniccа.

15 19. C. arenaria 20–23 C. sp 24 Oryza.

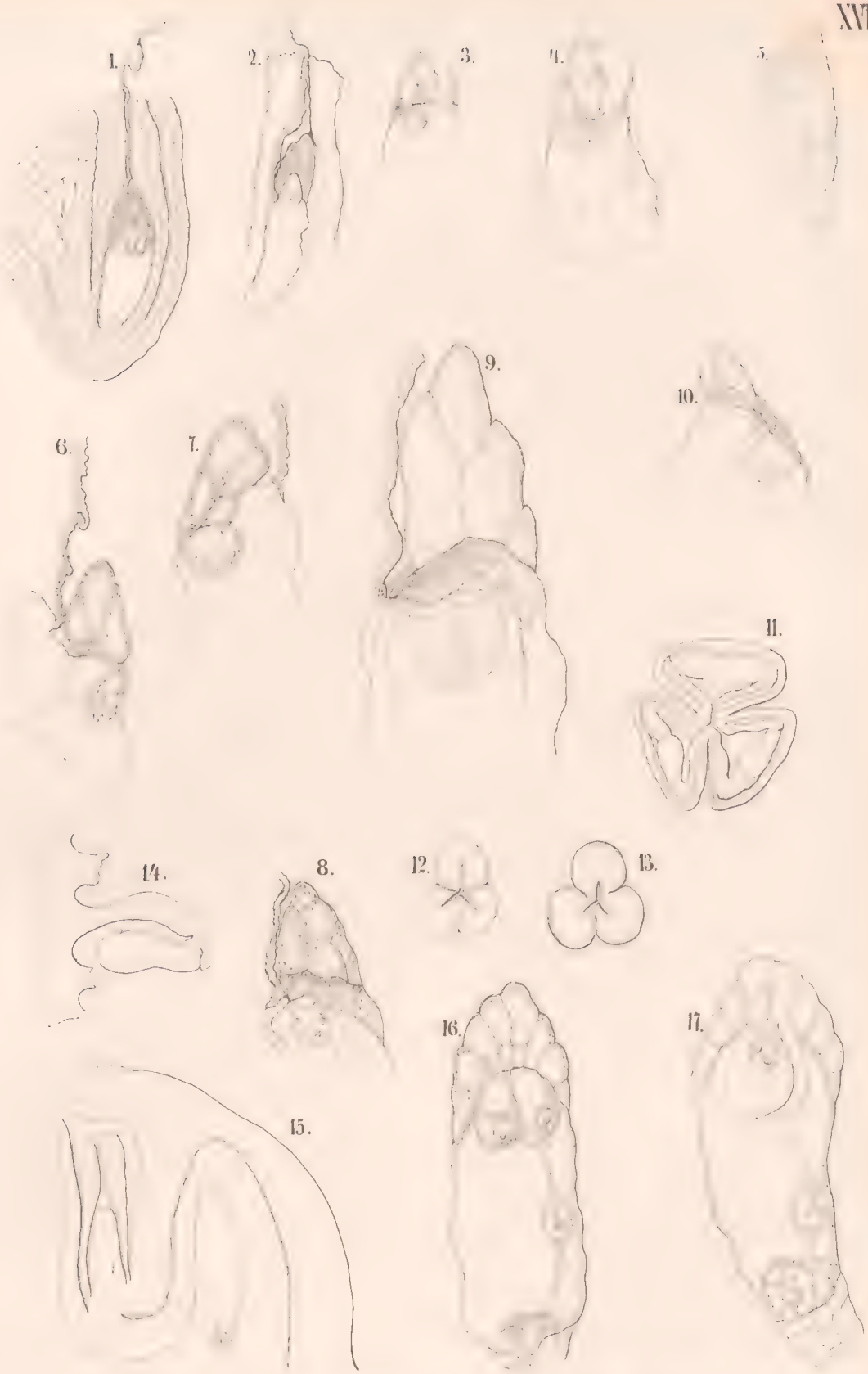


1-10 Hippeastrum aulicum. 11.12 Habranthus chilensis. 13-27 Leucojum vernum.

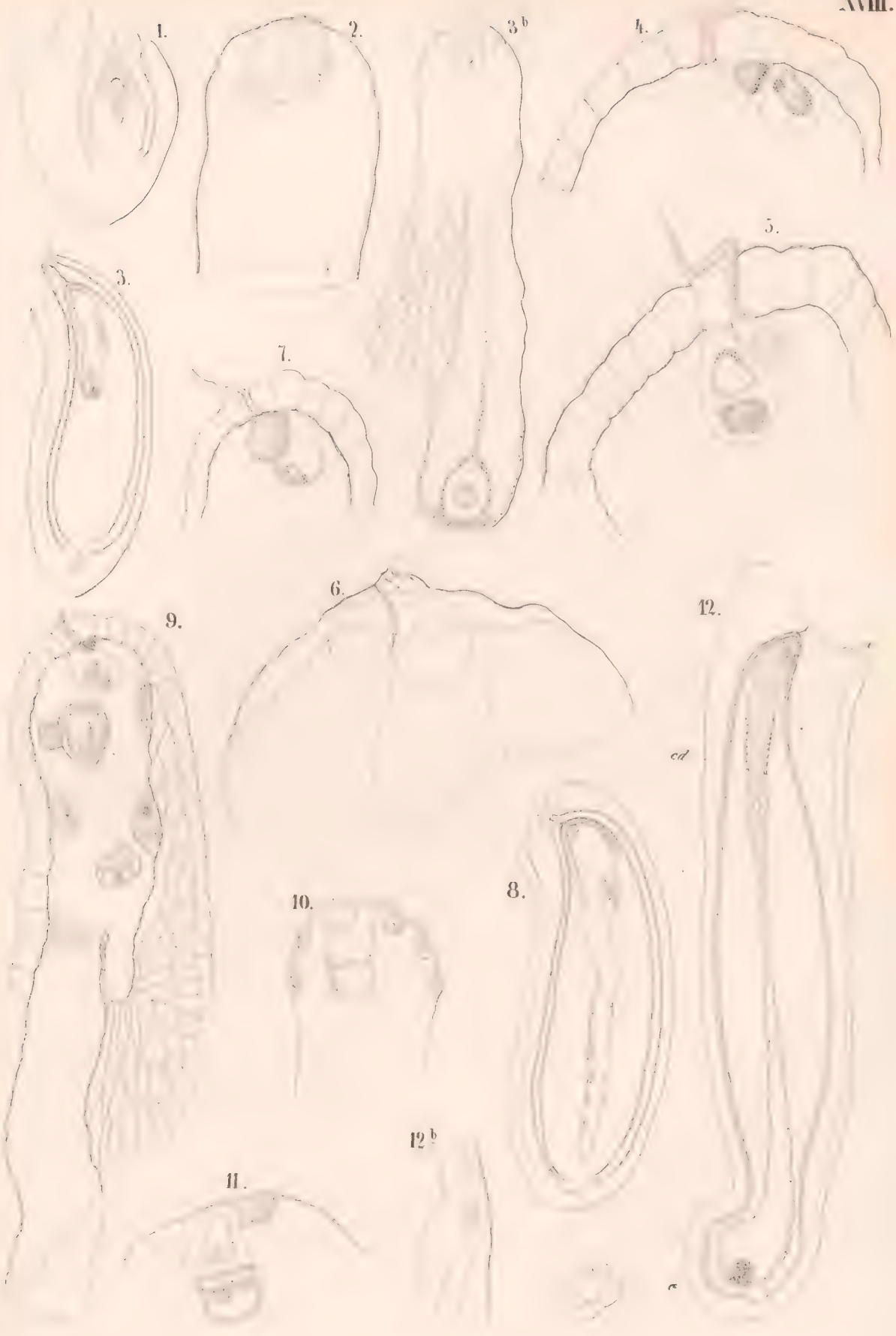
1 2 Crinum variabile 3 11 Crinum capense.

Merendera caucasica.

1–10 Merendera caucasica.. 11–13 Uvularia grandiflora.



1-10 Colchicum autumnale. 11-17 Bulbocodium vernum.



Veltheimia viridiflora.

1 Hemerocallis lutea. 2 3 Czackia Liliastrum. 4 6 Erythronium dens canis. 7 10 Allium odorans. 11 Allium victoriale.

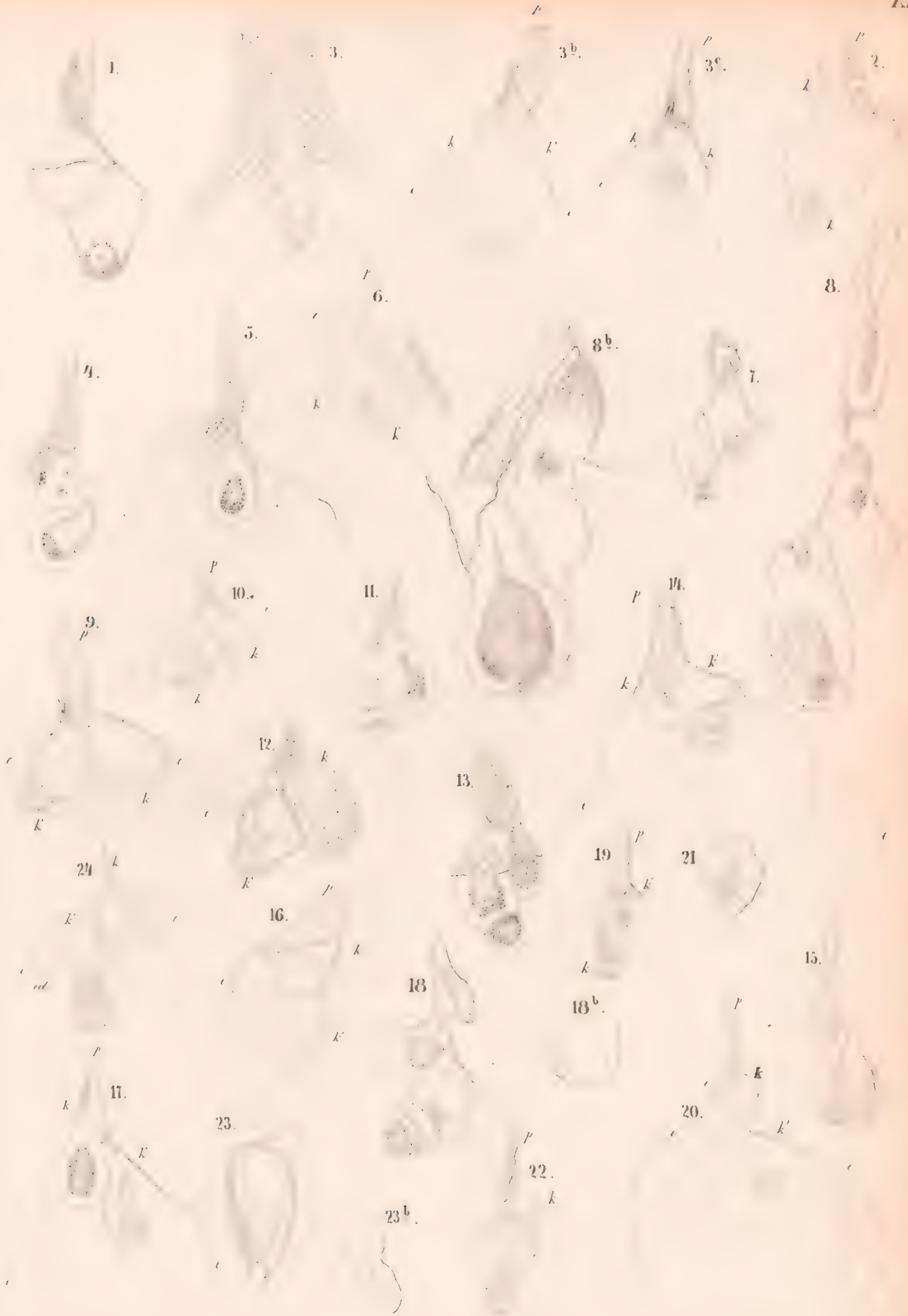
1 Triteleia uniflora. 2 4 Gagea lutea. 5 Gloriosa superba. 6 7 Funkia coerulea.
8 Bonapartea juncea. 9 12 Puschkinia scilloides. 13 17 Iris pumila.

1-9 Iris pumila. 10-28 Crocus vernus.

W. Hofmeister del.

Crocus vernus.

Lith. Anst. v. M. Frecher i. Leipzig.



Crocus vernus.

1 8 Crocus vernus. 9 Gladiolus communis. 10 11 Ixia. 12 Tritonia crocata. 13 Montbretia lineata.
14 16 Pontederia cordata. 17 20 Tradescantia virginica.

1-5 Hymenocallis ovata. 6-13 Paris quadrifolia. 14-15 Narcissus Jonquilla.
16-21 Scheuchzeria palustris. 22 Puja.

JUN 18 1900